

УДК 519.21

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.84-103

І. В. Юрченко, канд. фіз.-мат. наук,**В. К. Ясинський**, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ТА МЕТОДИ ЙОГО КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У статті досліджується задача Коші для стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду, яке описує динамічні процеси з пам'яттю під впливом випадкових збурень. Зокрема, вивчаються математичні умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такого рівняння. Теоретичні результати базуються на сучасному апараті стохастичного аналізу та функціонального диференціального числення.

Оскільки розв'язання подібних рівнянь у загальному випадку не може бути отримано аналітично, у роботі розглянуто підходи до їх наближеного чисельного розв'язання. Описано дискретизацію простору та часу, а також способи апроксимації функціональних членів рівняння з використанням буфера пам'яті. Розглянуто реалізацію шумового впливу через додавання просторово-часового стохастичного збурення, змодельованого на основі вінерового процесу.

Для перевірки теоретичних результатів і практичної ілюстрації динаміки процесів з пам'яттю розроблено комп'ютерну програму на мові Python, яка реалізує алгоритм розв'язання з використанням методу наближених обчислень Ейлера-Маруями. Розглянуто рівняння, що описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень. Побудовано графічну візуалізацію зміни стану системи в просторі та часі та теплову карту (heatmap), яка показує, як «розливається» і коливається функція $u(t, x)$ у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму. Отримані результати мають перспективу подальшого використання в теорії та практиці комп'ютерного моделювання складних динамічних систем з ефектами пам'яті та стохастичними збуреннями. Зокрема, розроблені підходи можуть бути застосовані до моделювання процесів у фізиці (теплопровідність із запізненням, дифузія в середовищах зі

структурною пам'яттю), біології та екології (розповсюдження популяцій або інфекцій з інкубаційними періодами), фінансовій математиці (волатильність із залежністю від минулих станів), а також у технічних та інформаційних системах керування зі стохастичними впливами й запізненням сигналу.

Ключові слова: *стохастичні диференціально-функціональні рівняння з частинними похідними, існування розв'язку, наближене розв'язання, комп'ютерне моделювання процесів з пам'яттю.*

Вступ. Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено численну кількість робіт, зазначених у монографіях [1, 2] та не меншу кількість опублікованих робіт науковців наприкінці XX – початку XXI ст., зокрема, праці А. Д. Мишкіса, М. В. Азбелева, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, М. М. Перестюка, В. П. Рубаника, В. І. Фодчука, Д. І. Мартинюка, Дж. Хейла, Е. М. Райта, Р. Беллмана та багатьох інших. Після введення поняття стохастичного диференціалу та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціалу, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих роботах [3-7] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними (СДФРЧП) [8-11] (див. наведену бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДФРЧП. Зокрема, у монографії [12] доводиться теорема про розв'язність задачі Коші для лінійного параболічного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями, розв'язання якого в фіксовані моменти часу зазнає імпульсного впливу. Подальше дослідження СДФРЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри у цих рівняннях (див., наприклад, роботи [13-18]).

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P} \right)$$

задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними спеціального вигляду (СДФРЧПСВ) під дією випадкових процесів $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\} : [0, T] \equiv \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з простору Скорохода $\mathbf{D}$ неперервних праворуч процесів, що мають лівосторонні границі [3, 4]

$$\begin{aligned} du(t, x, \omega) = & a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega)) dt + \\ & + b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$u_t \Big|_{t=0} \equiv u(t+\theta, x, \omega) \Big|_{t=0} = \varphi_0(\theta, \omega),$$

$$B_{kx} u_t \Big|_{t=0} \equiv B_{kx} u(t+\theta, x, \omega) \Big|_{t=0} = \varphi_k(\theta, \omega), \quad (2)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$; $k = 1, 2, \dots, m-1$; $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$;
 $u(t+\theta, x, \omega) \equiv u_t$; $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X \subset \mathbf{R}^1$; неперервні випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\}: \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ та одновимірний вінерів процес попарно незалежні, при цьому $\mathbf{E}\{w(t_2 - t_1, \omega)\} = 0$; $\mathbf{E}\{w^2(t_2 - t_1, \omega)\} = t_2 - t_1$, $t_1 < t_2$ для довільних $\{t_1, t_2\} \subset \mathbf{T} \equiv [0, T]$, $T > 0$;

$$B_{kx} u_t \equiv \frac{\partial^k u(t+\theta, x, \omega)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}, \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_n = k, \quad (3)$$

$k = \overline{1, m}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$; $a(t, \cdot, \dots, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \dots, \beta(t, \omega))$ є неперервними функціоналами від другого до передостаннього аргументу, а також неперервні по $t \in T$ та $\alpha(t, \omega)$ і $\beta(t, \omega)$.

Зауважимо, що при $\theta = 0$ матимемо стохастичне диференціальне рівняння з частинними похідними; при $\theta = -\Delta$, $\Delta > 0$ матимемо стохастичне диференціально-різницеве рівняння за Беллманом і Куком [1].

Лема 1. При виконанні вищенаведених умов існує такий зв'язок оригінала $u(t, x, \omega)$ та зображення $v(t, \omega)$ перетворення Фур'є

$$\|u(t, x, \omega)\|_{E_1} = 2\pi \|v(t, \sigma, \omega)\|_{2\mathbf{R}_+}, \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

Доведення. Існування перетворення Фур'є [4]

$$\Phi\{u(t, x, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} e^{i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \equiv v(t, \omega)$$

з імовірністю одиниця (mod $\mathbf{P}$) виконується завдяки приналежності розв'язку $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ до простору неперервних для кожного $t \in \mathbf{T}$ та $x \in X \subset E_1$ та інших аргументів. Це впливає з нерівності Чебишова [3, 4]

$$\mathbf{P}\left\{\omega: |u(t, x, \omega)|^2 > N\right\} \leq \frac{\mathbf{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\}}{N} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow +\infty$, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання.

Зауважимо, що під формальним записом СДФРЧПСВ (1) розуміємо інтегральне стохастичне диференціально-функціональне рівняння Вінера-Іто [3, 4, 8, 9] вигляду

$$u(t, x, \omega) = u_0 + \int_0^t a(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \alpha(s, \omega)) ds + \\ + \int_0^t b(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \beta(s, \omega)) dw(s, \omega). \quad (5)$$

За теоремою Планшереля [1, 3, 8] виконується інтегральна рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx. \quad (6)$$

Тоді, з урахуванням означення норм, матимемо рівність

$$\|v(t, \sigma, \omega)\|_{2\mathbf{R}_+} = \frac{1}{2\pi} \|u(t, x, \omega)\|_{E_1}, \quad (7)$$

що й доводить лему 1.

Якщо $E\{v^2(t, \omega)\} \equiv \varphi(t)$ є скалярною детермінованою функцією $\varphi(t): \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^1$, то маємо нерівність Гронуолла [1, 8, 9].

Зауважимо, що рівність (4) можна посилити на σ -алгебри $\sigma(E_1), \sigma(2\mathbf{R}_+)$:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{\sigma(E_1)} = 2\pi \|v(t, \omega)\|_{\sigma(2\mathbf{R}_+)}.$$

Застосуємо перетворення Фур'є до (1)-(3), тоді матимемо СДФР вигляду

$$dv(t, \omega) = a(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(t, \omega)) dt + \\ + b(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega), \quad (8)$$

$$v_t(\omega)|_{t=0} = v(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \Phi(u_t(\omega))|_{t=0} = \varphi(\theta) = \varphi_0, \quad (9)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$,

$$\tilde{B}_k v_t|_{t=0} = \Phi(B_{kx}, u_t) = \varphi_k(\theta) \equiv \varphi_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Зауваження 1. Виконання рівності (4) леми 1 означатиме, що властивості (та умови, що породжують ці властивості) розв'язку $v(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задачі Коші СДФР вигляду (8)-(9) збігаються з властивостями розв'язку $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ СДФРЧПСВ (1)-(3) (як перетворення Фур'є відповідного розв'язку).

Надалі будемо вважати, що існують пряме та обернене перетворення Фур'є від коефіцієнтів $a(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega))$, тобто пряме перетворення Фур'є

$$\Phi\left(a\left(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega)\right)\right), \Phi\left(b\left(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega)\right)\right),$$

де $u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega)$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $x \in X \subset \mathbf{R}^1$ та відповідне обернене перетворення Фур'є $\Phi^{-1}(\cdot)$ такі, що

$$v(t, \sigma, \omega) = \Phi\{u(t, x, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} e^{i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \quad \sigma > 0,$$

$$\Phi^{-1}\{v(t, \sigma, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\sigma x} v(t, \sigma, \omega) d\sigma.$$

Зауваження 2. Частинним випадком СДФРЧПСВ (1)-(3) є випадок $m = 2$ та $a(\cdot) \equiv \alpha(t, \omega) a_1(\cdot)$, $b(\cdot) \equiv \beta(t, \omega) b_1(\cdot)$, тобто

$$\begin{aligned} du(t, x, \omega) = & \alpha(t, \omega) a_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dt + \\ & + \beta(t, \omega) b_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

за умов

$$u_t|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad B_x u_t|_{t=0} = \varphi_1(\theta). \quad (11)$$

Таке представлення корисне при переході від (10)-(11) до еквівалентного квазілінійного СДФРЧП вигляду

$$\begin{aligned} du^*(t, x, \omega) = & \left[Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega)) \right] dt + \\ & + \left[Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega)) \right] dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_t^*|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad (13)$$

$$B_x u_t^*|_{t=0} = \varphi_1(\theta) \quad (14)$$

заміною

$$a(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \alpha(t, \omega)) = \frac{Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))}{a(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))}, \quad (15)$$

$$b(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \beta(t, \omega)) = \frac{Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}{b(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}, \quad (16)$$

Це дає можливість для слабонелінійних вихідних СДФРЧП (1)-(3) звести дослідження на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному до дослідження на асимптотичну стійкість лінійного СДФРЧП вигляду [8, 9]

$$du^*(t, x, \omega) = Au_t^* dt + Bu_t^* dw(t, \omega), \quad (17)$$

$$u_t^*(x, \omega) \Big|_{t=0} = \psi(\theta, \omega). \quad (18)$$

Якщо (1)-(3) є сильно нелінійним СДФРЧП або нелінійним змішаного типу, то дослідження (1)-(3) на стійкість у середньому квадратичному проводиться другим методом Ляпунова-Красовського [8, 9].

Теорема 1. Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для вихідного СДФРЧП (1)-(3) та виконуються умови:

- 1) нелінійні функціонали $a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ з ймовірністю одиниця належать до класу неперервних функціоналів;
- 2) $a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$, $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ задовольняють умову Ліпшиця за всіма аргументами від другого до m -го з ймовірністю одиниця зі сталою $L > 0$ та при всіх $\alpha(t, \omega)$, $\beta(t, \omega)$;
- 3) випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\} : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ і вінеровий процес $w(t, \omega) : \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ ($\mathbf{E}\{w(t, \omega)\} = 0$, $\mathbf{E}\{w^2(t, \omega)\} = t$) попарно незалежні;
- 4) функціонали a та b задовольняють при $t \in \mathbf{T}$ умови обмеженості вигляду:

$$a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega)) \leq a(0, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(0, \omega)), \quad (19)$$

$$b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega)) \leq b(0, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(0, \omega)), \quad (20)$$

якщо

$$\begin{aligned} \alpha(t, \omega) &\leq \alpha(0, \omega), \quad \beta(t, \omega) \leq \beta(0, \omega), \quad t \in \mathbf{T}, \\ \alpha(0, \omega) &= \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \alpha(t, \omega), \quad \beta(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(t, \omega). \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді зі ймовірністю одиниця існує розв'язок СДФРЧП (1)-(3).

Доведення існування розв'язку СДФРЧП (1)-(3) складається з двох частин – прямого та оберненого ходу.

Прямий хід містить кроки А-Д.

Крок А. Застосувавши перетворення Фур'є до рівняння (1)-(3), отримуємо

$$v(t, \omega) \equiv \Phi(u(t, x, \alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \quad \sigma > 0, \quad (22)$$

одержимо СДФРЧП для зображень вигляду

$$\begin{aligned} dv(t, \omega) &= a(t, v_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(t, \omega)) dt + \\ &+ b(t, v_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (23)$$

де $v_t \equiv v(t + \theta, \omega) = \Phi(u_t)$, за умов

$$v_t|_{t=0} \equiv v(t+\theta, \omega)|_{t=0} = v_0(\theta), \quad (24)$$

$$\tilde{B}_l v_t|_{t=0} = \Phi(B_k u_t)|_{t=0} = v_l(\theta), \quad l = \overline{1, m}, \quad \theta \in [-\Delta, 0]. \quad (25)$$

Крок В. Від (23)-(25) переходимо до апроксимуючого рівняння

$$\begin{aligned} d\tilde{v}(t, \omega) = & a(0, \tilde{v}_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(0, \omega)) dt + \\ & + b(0, \tilde{v}_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(0, \omega)) d\omega(t, \omega), \end{aligned} \quad (26)$$

якщо

$$\alpha(t, \omega) \leq \alpha_0, \quad \beta(t, \omega) \leq \beta_0, \quad t \in \mathbf{T},$$

$$\alpha_0 \equiv \alpha(0, \omega), \quad \beta_0 \equiv \beta(0, \omega),$$

$$a(t, \dots, \alpha(t, \omega)) \leq a(0, \dots, \alpha(0, \omega)),$$

$$b(t, \dots, \beta(t, \omega)) \leq b(0, \dots, \beta(0, \omega)),$$

за умов

$$\tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(\omega), \quad t \in [-\Delta, 0], \quad (27)$$

$$B_k \tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\varphi}_k(\omega), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \theta \in [-\Delta, 0]. \quad (28)$$

Отже, можна вважати, що розв'язки (23) та (26) пов'язані нерівністю

$$v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega), \quad t \in [-\Delta, \infty). \quad (29)$$

Крок С. Доведення існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ задачі Коші СДФР (26)-(28) проводиться локальним методом кроків (ЛМК) з переходом на глобальний метод кроків, який полягає в наступному:

- 1) спочатку доводиться існування неперервного розв'язку СДФР (26)-(28) $\tilde{v}(t, \omega)$ на відрізку $[0, \Delta]$ за принципом стислих відображень, використовуючи початкові значення $\varphi_k(\theta)$, $k = \overline{0, m-1}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$;
- 2) відбувається перестановка знайдених значень $\tilde{v}(t, \omega)$, $t \in [0, \Delta]$ на місце початкових, що будуть виступати в якості початкових для знаходження $\tilde{v}(t, \omega)$ на відрізку $[\Delta, 2\Delta]$;
- 3) пункт 2 повторюємо N разів;
- 4) припиняємо процес знаходження розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ рівняння (26)-(28) на відрізку $[(N-1)\Delta, N\Delta]$, якщо $N\Delta = T$.

Крок D. На кожному відрізку $[(k-1)\Delta, k\Delta]$, $k = \overline{1, N}$, працює ЛМК знаходження розв'язку $\tilde{v}(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, якщо $\Delta t = \frac{k\Delta}{n} > 0$,

$$n = 10^3 \sim 10^6.$$

Існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ при застосуванні ЛМК обґрунтовується принципом стислих відображень. Опишемо його застосування, а саме, визначимо для $\tilde{v}(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ простір Σ як повний простір випадкових процесів $\tilde{v}(t, \omega)$ з $[-\Delta, T]$, вимірних відносно простору σ -алгебр

$$\Sigma_t \equiv \mathfrak{N}_1(dw(t, \omega)) \cup \mathfrak{N}_2(\alpha(t, \omega)) \cup \mathfrak{N}_3(\beta(t, \omega)) \bigcup_{j=4}^{m-1} \mathfrak{N}_j(\varphi_j(t, \omega)),$$

$t \in [-\Delta, 0]$, з нормою

$$\|v(t, \omega)\|_{\Sigma}^2 \equiv \mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta \leq t \leq T} |\tilde{v}(t, \omega)|^2 \right\} < \infty.$$

Визначимо для $\tilde{v}(t, \omega) \in \Sigma$ оператор

$$(\tilde{S}\tilde{v}(t, \omega))(t) = v(0, \omega) + \int_0^t a(s, \tilde{v}_s, B_1\tilde{v}_s, \dots, B_m\tilde{v}_s, \alpha(s, \omega))ds +$$

$$+ \int_0^t b(s, \tilde{v}_s, B_1\tilde{v}_s, \dots, B_m\tilde{v}_s, \beta(s, \omega))dw(s, \omega),$$

$$(\tilde{S}\tilde{v}(t, \omega))(t) = (\varphi_0(t, \omega), \varphi_1(t, \omega), \dots, \varphi_{m-1}(t, \omega), \alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)), \quad t \in [-\Delta, 0].$$

Для скорочення подальших записів покладемо

$$\varphi_j(t, \omega) = \varphi_{j0} = \text{const}, \quad t \in [-\Delta, 0].$$

З властивостей інтегралів Рімана та Вінера-Іто, зауважень 1, 2 та умов теореми 1 випливає, що оператор $\tilde{S}$ переводить простір Σ у простір Σ .

Рівняння (26) еквівалентне рівнянню

$$\tilde{v} = \tilde{S}\tilde{v}. \quad (31)$$

Тому доведення існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ СДФР (26) еквівалентне доведенню існування єдиної нерухомої точки оператора $\tilde{S}^n$ у просторі Σ [3, 19, 20]. Визначимо оператор $\tilde{S}^n$, ($n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел), як n -кратне послідовне застосування оператора $\tilde{S}$.

При виконанні умов Ліпшиця можна одержати нерівність

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{t-\Delta \leq s \leq t} \left| (\tilde{S}\tilde{v}^{(1)}(t, \omega))(s) - (\tilde{S}\tilde{v}^{(2)}(t, \omega))(s) \right|^2 \right\} \leq$$

$$\leq 3(T+3)T \left\| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|_{\Sigma}^2, \quad (32)$$

де для всіх $t \in [0, T]$, $\tilde{v}^{(1)}(t, \omega)$ та $\tilde{v}^{(2)}(t, \omega)$ – розв'язки СДФР (26)-(28).

Тоді для довільних $l \in \mathbf{N}$ за умов теореми 1 та нерівності (32) можна, послідовно змінюючи $l = \overline{1, n}$, одержати нерівність

$$\begin{aligned} & \left\| S^l \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - S^l \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|_{\Sigma}^2 = \\ & = \mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta \leq s \leq T} \left| \left(S^l \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) \right)(s) - \left(S^l \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right)(s) \right|^2 \right\} \leq \\ & \leq \frac{3T^{n+1}}{l!} \left\| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|_{\Sigma}^2, \end{aligned} \quad (33)$$

де $\mathbf{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання.

З нерівності (33) одержуємо, що для довільного додатного $T > 0$ та досить великого $l \in \mathbf{N}$ оператор S є стискаючим [1, 3, 9]. Отже, у нього існує нерухома точка $\tilde{v} \in \Sigma$, тобто виконується рівність

$$\tilde{v} = S^l \tilde{v}. \quad (34)$$

Випадковий процес $\tilde{v}(t, \omega)$ є розв'язком СДФР (26)-(28), оскільки для довільних $l \in \mathbf{N}$ з (30) впливає нерівність

$$\left\| \tilde{v} - S\tilde{v} \right\|_{\Sigma} = \left\| S^{kl} \tilde{v} - S^{k(l+1)} \tilde{v} \right\|_{\Sigma} \leq \frac{3(Tk+1)^{lk} T^{lk}}{(lk)!} \left\| \tilde{v} - S\tilde{v} \right\|_{\Sigma}. \quad (35)$$

З (35) при $l \rightarrow +\infty$ впливає існування нерухомої точки $\tilde{v}(t, \omega)$, яка є розв'язком (26)-(28).

За оберненим ходом за теоремою порівняння [1, 3, 19] існує $v(t, \omega)$ як розв'язок (23)-(25) з урахуванням зауваження 1, оскільки $v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega)$ для всіх $t \in [0, T]$. З урахуванням леми 1 та зауваження 1 отримуємо, що існує $u(t, x, \omega)$ як розв'язок задачі Коші (1)-(3).

Неперервність $u(t, x, \omega)$ за змінною $t \in [0, T]$ впливає з еквівалентного до СДФРЧП (1) інтегрального функціонального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) &= u_0 + \int_0^t a(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \alpha(s, \omega)) ds + \\ &+ \int_0^t b(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \beta(s, \omega)) dw(s, \omega), \end{aligned}$$

оскільки інтеграл Рімана та інтеграл Вінера-Іто є неперервними випадковими процесами [4]. Теорему 1 доведено.

Для доведення єдиності розв'язку СДФРЧП (1)-(3) за $\text{mod } \mathbf{P}$ сформулюємо узагальнену лему Гронуолла для випадкових процесів.

Лема 2. Нехай $v(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задовольняє такі умови:

- 1) $\in \mathfrak{N}_t$ -вимірною;
- 2) $v(t, \omega) \geq 0$;
- 3) обмежена дійсним числом;
- 4) $v(t, \omega) \equiv 0$ для довільного $t \in [-\Delta, 0]$;
- 5) задовольняє для $t > 0$ нерівність

$$P \left\{ \omega : v(t, \omega) \leq L \int_0^t \int_{-\Delta}^0 v(t+s, \omega) d\beta(s) ds \right\} = 1. \quad (36)$$

Тоді виконується співвідношення

$$P \{ \omega : v(t, \omega) = 0 \} = 1 \quad \forall t > 0. \quad (37)$$

Доведення. Проінтегруємо неівність з (36)

$$\begin{aligned} v(t, \omega) &\leq L \int_0^t \int_{-\Delta}^0 \int_0^\tau \int_{-\Delta}^0 v(\tau_1 + s_1, \omega) d\beta(s_1) ds d\beta(s) d\tau \leq \\ &\leq L^2 K_1 K \int_0^t \int_{-\Delta}^0 \int_0^\tau d\tau_1 d\beta(s) d\tau \leq L^2 K_1^2 t^2 K \pmod{\mathbf{P}}, \end{aligned}$$

де $\beta(s)$ – функція обмеженої варіації,

$$|v(t, \omega)| \leq K; \quad \int_{-\Delta}^0 d\beta(s) \leq K; \quad \int_0^t \int_{-\Delta}^0 \tau d\beta(s) d\tau \leq \frac{K_1 t^2}{2}.$$

Повторюючи ітерації l разів, одержимо нерівність

$$v(t, \omega) \leq \frac{(LK_1 T)^l K^{l-1}}{l!} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0 \pmod{\mathbf{P}}. \quad (38)$$

Лема 2 доведена.

Єдиність розв'язку задачі Коші СДФРЧР (1)-(3).

Теорема 2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P})$ задано задачу Коші (1)–(3) та виконуються такі умови:

- 1) коефіцієнти $\alpha(t, \cdot, \alpha)$ і $\beta(t, \cdot, \beta)$ неперервні за всіма аргументами;
- 2) одновимірні неперервні випадкові процеси $\alpha(t, \omega)$, $\beta(t, \omega)$ і вінеровий процес $w(t, \omega)$ попарно незалежні, $\mathbf{E}\{\Delta w(t, \omega)\} = 0$, $\mathbf{E}\{\Delta^2 w(t, \omega)\} = \Delta t^2$;

3) коефіцієнти $a(t, \cdot, \alpha)$ і $\beta(t, \cdot, \beta)$ задовольняють умови обмеженості

$$\begin{aligned} & \|a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha)\|^2 + \|b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta)\|^2 \leq \\ & \leq l \left(1 + \|u(t + \theta, x, \omega)\|^2 \right), \quad u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega), \quad (39) \\ & \theta \in [-\Delta, 0], \quad \Delta > 0, \quad x \in X \subset \mathbf{R}^1; \end{aligned}$$

4) виконується нерівність вигляду

$$\begin{aligned} & \left| a(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{mx} u_t^{(1)}, \alpha) - a(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{mx} u_t^{(2)}, \alpha) \right|^2 + \\ & + \left| b(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{mx} u_t^{(1)}, \beta) - b(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{mx} u_t^{(2)}, \beta) \right|^2 \leq \quad (40) \\ & \leq l_r \|u_t^{(1)}(x, \omega) - u_t^{(2)}(x, \omega)\|^2, \quad l_r > 0, \end{aligned}$$

де $u_t^{(j)}(x, \omega) \equiv u_t^{(j)}(t + \theta, x, \omega)$, $j = 1, 2$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$;
 $B_{kx} u_t^{(j)}(x, \omega)$ – частинні похідні k -го порядку по x , $k = \overline{1, m}$,
 $\|u_t^{(j)}\| \equiv \|u^{(j)}(t + \theta, x, \omega)\| \leq r$, $j = 1, 2$.

Тоді існує єдиний розв'язок $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з імовірністю одиниця (mod $\mathbf{P}$).

Доведення. Під нормою розумітимемо вираз [1,4], який враховує післядію $\theta \in [-\Delta, 0]$ вигляду

$$\|u_t(x, \omega)\|^2 = u_{0t} + \int_{-\Delta}^0 |u(t + \theta, x, \omega)|^2 d\theta, \quad (41)$$

де θ враховує значення розв'язку СДФРЧП (1)-(3) на відрізку часу $[t, t + \theta]$, $t \in \mathbf{R}_+^1$, $\theta \in [-\Delta, 0]$.

Доведення будемо проводити з використанням прямого та оберненого ходу, аналогічно до теореми 1. Прямий хід доведення складається з кроків А-С, в результаті яких прийдемо до СДФР вигляду

$$\begin{aligned} d\tilde{v}(t, \omega) &= a(t, \tilde{v}_t(\omega), B_1 \tilde{v}_t, \dots, B_m \tilde{v}_t, \alpha(0, \omega)) dt + \\ &+ b(t, \tilde{v}_t(\omega), B_1 \tilde{v}_t, \dots, B_m \tilde{v}_t, \beta(0, \omega)) d\omega(t, \omega), \quad (42) \end{aligned}$$

з відповідними початковими умовами та при

$$\alpha(t, \omega) \leq \alpha(0, \omega), \quad \beta(t, \omega) \leq \beta(0, \omega), \quad t \in [0, T],$$

$$\alpha(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \alpha(t, \omega), \quad \beta(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(t, \omega), \quad T > 0.$$

Під СДФР (42) розуміємо інтегральне стохастичне рівняння Вінера-Іто з післядією $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, \omega) = v_0 + \int_0^t a(s, \tilde{v}_s, B_x \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \alpha(0, \omega)) ds + \\ + \int_0^t b(s, \tilde{v}_s, B_x \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \beta(0, \omega)) dw(s, \omega), \quad \forall t \in [0, T], \quad T > 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Доведення єдиності за ймовірністю одиниця СДФР (42) проводиться на відрізках $[0, \Delta]$, $[\Delta, 2\Delta]$, ..., $[(N-1)\Delta, N\Delta]$ з послідовним урахуванням знайденого розв'язку, наприклад, з відрізка $[\Delta, 2\Delta]$ в якості початкових значень на $[0, \Delta]$ тощо.

Отже, доведемо єдиність розв'язку на відрізку $[0, \Delta]$, потім про-суватимемося праворуч для доведення єдиності на відрізку $[\Delta, 2\Delta]$, враховуючи за початкові дані знайдений розв'язок на $[0, \Delta]$. Так буде-демо продовжувати до кінця відрізка $[0, T]$.

Нехай $\tilde{v}^{(1)}(t, \omega)$ та $\tilde{v}^{(2)}(t, \omega)$ – два розв'язки СДФР (42) на відрі-зку $[0, \Delta]$. Розглянемо такі різниці

$$\begin{aligned} I \equiv \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right|^2 \right\} \leq \\ \leq \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0, \omega)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0, \omega)) \right) ds + \right. \\ \left. + \int_0^t \left(b(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \beta(0, \omega)) - \right. \right. \\ \left. \left. - b(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \beta(0, \omega)) \right) dw(s, \omega) \right]^2 \right\} \leq \\ \leq 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0, \omega)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0, \omega)) \right) ds \right]^2 \right\} + \end{aligned} \quad (44)$$

$$+2\mathbf{E}\left\{\left[\int_0^t\left(b\left(s,\tilde{v}_s^{(1)},B_x\tilde{v}_s^{(1)},...,B_m\tilde{v}_s^{(1)},\beta(0,\omega)\right)-\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.-b\left(s,\tilde{v}_s^{(2)},B_x\tilde{v}_s^{(2)},...,B_m\tilde{v}_s^{(2)},\beta(0,\omega)\right)\right)dw(s,\omega)\right]^2\right\}\equiv I_1+I_2,$$

де використано очевидну нерівність $(A+B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2$.

Оцінимо кожний з інтегралів у (44) з використанням нерівності Коші-Буняковського. Для спрощення надалі опускатимемо ω у формулах для $\alpha(0,\omega)$ та $\beta(0,\omega)$.

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \mathbf{E}\left\{\left[\int_0^t\left(a\left(s,\tilde{v}_s^{(1)},B_x\tilde{v}_s^{(1)},...,B_m\tilde{v}_s^{(1)},\alpha(0)\right)-\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-a\left(s,\tilde{v}_s^{(2)},B_x\tilde{v}_s^{(2)},...,B_m\tilde{v}_s^{(2)},\alpha(0)\right)\right)ds\right]^2\right\}\leq \\ &\leq t\mathbf{E}\left\{\left[\int_0^t\left(a\left(s,\tilde{v}_s^{(1)},B_x\tilde{v}_s^{(1)},...,B_m\tilde{v}_s^{(1)},\alpha(0)\right)-\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-a\left(s,\tilde{v}_s^{(2)},B_x\tilde{v}_s^{(2)},...,B_m\tilde{v}_s^{(2)},\alpha(0)\right)\right)ds\right]^2\right\}\leq \\ &\leq T\mathbf{E}\left\{\int_0^t l_r\left\|\tilde{v}_s^{(1)}-\tilde{v}_s^{(2)}\right\|^2 ds\right\}\leq Tl_r\int_0^t\mathbf{E}\left\{\left\|\tilde{v}_s^{(1)}-\tilde{v}_s^{(2)}\right\|^2\right\}ds. \end{aligned} \quad (45)$$

Далі використаємо відомі властивості інтеграла Вінера-Іто [4, 19] для оцінки I_2 , а саме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\int_0^t\xi(s,\omega)dw(s,\omega)\right\}&=0, \\ \mathbf{E}\left\{\left(\int_0^t\xi(s,\omega)dw(s,\omega)\right)^2\right\}&=\int_0^t\mathbf{E}\left\{\xi^2(s,\omega)\right\}ds. \end{aligned} \quad (46)$$

Матимемо таку оцінку для I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \mathbf{E}\left\{\left[\int_0^t\left(b\left(s,\tilde{v}_s^{(1)},B_x\tilde{v}_s^{(1)},...,B_m\tilde{v}_s^{(1)},\beta(0)\right)-\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-b\left(s,\tilde{v}_s^{(2)},B_x\tilde{v}_s^{(2)},...,B_m\tilde{v}_s^{(2)},\beta(0)\right)\right)dw(s,\omega)\right]^2\right\}\leq l_r\int_0^t\mathbf{E}\left\{\left\|\tilde{v}_s^{(1)}-\tilde{v}_s^{(2)}\right\|^2\right\}ds. \end{aligned} \quad (47)$$

Далі слід урахувати нерівність

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}_s^{(1)} - \tilde{v}_s^{(2)} \right\|^2 \right\} &= \mathbf{E} \left\{ \left[\int_{-\Delta}^0 \left\| \tilde{v}_s^{(1)}(s+\tau, \omega) - \tilde{v}_s^{(2)}(s+\tau, \omega) \right\| d\beta(\tau) \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq \left(\overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_1(t) + \overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_2(t) \right) \int_{-\Delta}^0 \mathbf{E} \left\{ \left\| v^{(1)}(s+\tau, \omega) - v^{(2)}(s+\tau, \omega) \right\|^2 \right\} d\tau, \end{aligned}$$

де $\overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_i(t)$ є повною варіацією функції $\beta_i(t)$ на відрізку $[-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$, $i=1, 2$.

У результаті отримуємо нерівність для I вигляду

$$\begin{aligned} I &\equiv \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|^2 \right\} \leq \\ &\leq L \int_0^t \int_{-\Delta}^0 \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}^{(1)}(s+\tau, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(s+\tau, \omega) \right\|^2 \right\} d\beta(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (48)$$

де $L \equiv 3l_r(T+1)$, $\beta(\tau) = \overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_1(\tau) + \overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_2(\tau)$.

За лемою 2 матимемо, що $\mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|^2 \right\} = 0$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right\|^2 \right\} = 0. \quad (49)$$

Отже, з мартингальної властивості [3, 4] для $\tilde{v}(t, \omega)$, а саме, $\mathbf{E} \{ \tilde{v}(t, \omega) / \mathfrak{N}_s \} = \tilde{v}(s, \omega)$, та з (49) випливає, що $\mathbf{P} \{ \omega : \tilde{v}_1(t, \omega) = \tilde{v}_2(t, \omega) \} = 1$, тобто за ймовірністю одиниця доведено існування єдиного розв'язку (1)-(3).

Обернений хід. З урахуванням теореми 1, зауваження 1 та теореми порівняння [3, 4, 19] $v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega)$ можна стверджувати, що $\mathbf{P} \{ \omega : u_1(t, x, \omega) = u_2(t, x, \omega) \} = 1$ для довільного $x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^1$.

Теорема 2 доведена.

Алгоритм побудови наближеного розв'язку для СДФРЧП (1)-(3). Алгоритм побудови наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних зазвичай базується на методі Монте-Карло [21, 22] та дискретизації рівняння, наприклад, за допомогою методу Ейлера-Маруями [22] або диференціальних схем (метод Мілштейна [22]).

Зокрема, якщо розглядати СДРЧП у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t) = \sigma(u, x, t)\dot{W},$$

де $\mathcal{L}$ – диференціальний оператор, $f(u, x, t)$ – детермінована функція, а $\sigma(u, x, t)\dot{W}$ – стохастичний шум (формальний запис просторово-часового білого шуму), тоді алгоритм побудови розв'язку складається з таких кроків:

- 1) ділимо область розв'язку на сітку: $x_i = i\Delta x$, $t_n = n\Delta t$;
- 2) вибираємо часовий крок Δt і просторовий крок Δx ;
- 3) використовуємо метод Монте-Карло разом зі стохастичними схемами:

- **метод Ейлера-Маруями:**

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n})\Delta t + \sigma(u_{i,n})\Delta W_n,$$

де $\Delta W_n \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$ – нормальний випадковий шум.

- **Метод Мілштейна (точніше враховує нелінійності):**

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n})\Delta t + \\ + \sigma(u_{i,n})\Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma'(u_{i,n})\sigma(u_{i,n})((\Delta W_n)^2 - \Delta t).$$

- **виконуємо числове моделювання**, а саме, генеруємо випадковий шум ΔW_n , для кожної точки сітки обчислюємо значення $u_{i,n+1}$, повторюємо ітерації для всіх часових кроків.

Розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t, u_\tau) = \sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t),$$

де $\mathcal{L}$ – оператор диференціювання (наприклад, лапласіан), $f(u, x, t, u_\tau)$ – нелінійний функціонал, що залежить від стану $u_\tau = u(x, t - \tau)$, $\sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t)$ – формальний запис просторово-часового білого шуму.

Прикладами таких рівнянь можуть бути стохастичне рівняння реакції-дифузії зі запізненням вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, u_\tau) + \sigma \dot{W}$$

чи стохастичне рівняння моделі популяційної динаміки вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru(1 - u_\tau) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W}.$$

Для отримання наближеного розв'язку СДФРЧП можна розширити методи, використані для СДРЧП, додавши пам'ять для обліку затримки. Тоді отримаємо такий вигляд алгоритму:

- 1) дискретизація простору та часу (як і раніше, розділяємо область на сітку x_i, t_n , з кроками $\Delta x, \Delta t$);
- 2) зберігання історії розв'язку (вводимо буфер для значень $u(x, t - \tau)$, що зберігає значення рішення за попередні моменти часу);
- 3) модифікація схеми Ейлера-Маруяма:
 - для кожного вузла сітки оновлюємо стан:

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L} u_{i,n} + f(u_{i,n}, u_{i,n-m}) \Delta t + \sigma dW_n,$$
 - затримане значення $u_{i,n-m}$ береться з попередніх кроків.

Для стохастичного рівняння теплопровідності зі затриманою реакцією вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u_\tau + \sigma \dot{W}$$

при значеннях довжини області $L = 1.0$, часу моделювання $T = 0.5$, кількості точок у просторі $N_x = 50$, кількості часових кроків $N_t = 1000$, коефіцієнта дифузії $\alpha = 0.01$, інтенсивності шуму $\sigma = 0.1$, впливу запізнення $\beta = 0.05$ та затримки $\tau = 0.1$ отримуємо графік розподілу температури зі запізненням, зображений на рис. 1.



Рис. 1. Розподіл температури зі запізненням

Для отримання розв'язку використовувалася мова Python з бібліотекою deque для збереження минулих значень. При кожному кроці алгоритму додавалося нове значення, а старе видалялося, значення оновлювалися з урахуванням запізнення u_τ . Вплив запізнення призводить до осциляцій і затриманої реакції.

Розглянемо також стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними у вигляді:

$$du(t, x) = \left[D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \alpha u(t, x) + \beta \int_{-r}^0 u(t + \theta, x) d\theta \right] dt + \sigma dW(t, x),$$

де $u(t, x)$ – невідома функція часу t і простору x ; D – коефіцієнт дифузії; α – коефіцієнт згасання; β – коефіцієнт впливу пам'яті; r – глибина пам'яті (інтервал запізнення); σ – амплітуда шуму; $W(t, x)$ – просторово-часовий вінерів процес.

Дане рівняння описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень [22, 23].

Для значень параметрів $L = 1.0$ (довжина простору), $T = 1.0$ (час моделювання), $D = 0.01$ (коефіцієнт дифузії), $\alpha = 1.0$ (згасання), $\beta = 0.5$ (пам'ять), $\sigma = 0.2$ (шум), $r = 0.1$ (глибина пам'яті), $N_x = 50$ (кількість точок у просторі), $N_t = 1000$ (кількість кроків у часі) отримуємо при моделюванні з використанням бібліотек Numpy та Matplotlib мови Python теплову карту (heatmap), яка показує, як «розливається» і коливається функція $u(t, x)$ у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму (див. рис. 2). Кольорова шкала відображає інтенсивність значення функції $u(t, x)$.

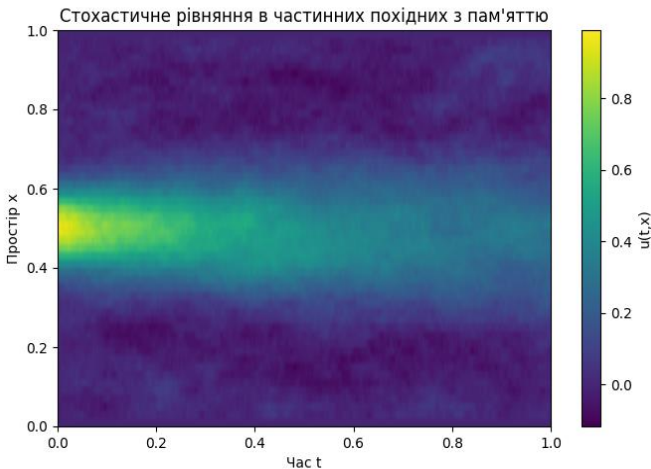


Рис. 2. Теплова карта для розв'язку СДРЧП

Висновки. У статті доведено існування розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду (1)-(3). Окрему увагу приділено обговоренню алгоритмів наближеного розв'язання подібних рівнянь, що можуть бути реалізовані засобами комп'ютерного моделювання для динамічних процесів з пам'яттю під впливом випадкових збурень. Отримані результати можуть бути використані для розвитку методів математичного моделювання складних стохастичних процесів у прикладних задачах.

Список використаних джерел:

1. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-Difference Equations*. New York & London: Academic Press, 1963.
2. Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations*. I–III. Series: Applied Mathematical Sciences. Springer Nature Switzerland AG. 2023. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-33928-8>
3. Gihman I. I., Skorokhod A. V. *Stochastic Differential Equations*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. 356 p.
4. Gihman I. I., Skorokhod A. V. *The Theory of Stochastic Processes*. I–III. Series: Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2004–2007. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49941-1>
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. *Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний*: зб. наук. пр. Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1981. С. 25–59.
6. Oksendal B., *Stochastic differential equations*, 6d, Springer, 2013. 379 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>
7. Arnold L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. London: John Wiley and Sons, 1974, 244 p.
8. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
9. Царьков Е. Ф., Ясинский В. К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 301 с.
10. Перун Г. М., Ясинский В. К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных. *Укр. мат. журн.* 1993. Т. 45, № 9. С. 1773–1781. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01058639>
11. Перун Г. М. Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку. *Український математичний журнал*. 2008. Т. 60, № 10. С.1422–1426. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11253-009-0151-y>
12. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні задачі в просторах Діні. Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. 248 с.
13. Stanzhytskyi O., Tsukanova A. Existence and Uniqueness of the solutions to the Cauchy problem for the stochastic reaction-diffusion differential equation of neutral type. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 226. № 3. P. 306–334.

14. Koroliuk V. S., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, Issue 1. P. 56-63. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-015-9697-x>.
15. Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters. *System Research & Information Technologies*. 2018. № 3. P. 80-90. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.01. URL: <http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/138168>.
16. Lukashiv T. O., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables. *Cybernetics and System Analysis*. 2020. Vol. 56, Iss. 2. P. 303-311. URL: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00246-5>
17. Perun G. M., Yasynskyy V. K. The Cauchy Problem for a Stochastic Parabolic Equation with an Argument Deviation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. No. 6. P.952-956. URL: <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00529-7>.
18. Yasynskyy V. K., Yurchenko I. V. On the existence of optimal control for stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances. *Cybernetics and System Analysis*. 2024. Vol. 60. № 3. P. 462-471. URL: <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00687-2>.
19. Robert C. Dalang, Davar Khoshnevisan, Carl Mueller, David Nualart, Yimin Xiao. A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations. Salt Lake City, Utah, 2006. Springer, Berlin, Heidelberg, NewYork, London, Milan, Paris, Tokyo, 228 p. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/cmlr/Preprints/Utah-Summer-School.pdf>.
20. Pao-Liu Chow. Stochastic Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Nonlinear Science Series*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, 292 p.
21. Kozachenko Yu., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A.M. Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. *ISTE Press Elsevier*. 2016, 346 p.
22. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992. 636 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>.
23. Lord G. J., Powell C. E., Shardlow T. An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press, 2014, 503 p. URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139017329>.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A STOCHASTIC PARTIAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION OF A SPECIAL FORM AND METHODS OF ITS COMPUTER MODELING

This article investigates the Cauchy problem for a stochastic partial differential-functional equation (SPDFE) of a special form, which models dynamic processes with memory under the influence of random perturbations. In particular, we examine the mathematical conditions ensuring the

existence and uniqueness of the solution. The theoretical results are based on modern tools of stochastic analysis and functional differential calculus.

Since analytical solutions to such equations are generally unavailable, the paper explores approaches for approximate numerical solutions. We describe the discretization of space and time, and techniques for approximating the functional (memory-dependent) terms using a historical buffer. Stochastic perturbations are modeled as space-time noise based on the Wiener process.

We developed a Python-based software implementation using the Euler–Maruyama method to validate the theoretical results and provide a practical illustration of memory-driven dynamics. The considered equation models the evolution of a system under spatial diffusion, damping, memory effects (via past state dependence), and stochastic noise. For the numerical solution, we use discretized approximations of the memory integral as an average over a buffer of previous values. A graphical visualization of the spatiotemporal evolution is constructed, including a heatmap that shows how the system state $u(t, x)$ «spreads» and fluctuates under the combined influence of memory and noise.

The results are promising for further applications in the theory and practice of computational modeling of complex dynamical systems with memory and stochasticity. In particular, the developed approaches may be applied in modeling processes in physics (heat conduction with delay, diffusion in memory-structured media), biology and ecology (population dynamics or epidemic spread with incubation delays), financial mathematics (volatility depending on past states), and technical or information control systems with stochastic effects and signal delays.

Key words: *stochastic partial functional differential equations, existence of a solution, approximate solution, computer modeling of processes with memory.*

Отримано: 12.06.2025