

problem is developed using the Ritz method, incorporating the local potential concept proposed by Glansdorff and Prigogine.

Key words: *Multi-component pollutant transport, finite element method (FEM), boundary value problem, Dirac delta function, air purification modeling, pollutant dispersion, nonlinear differential equations, Ritz method, local potential, modified Newton's method, Gauss method, kinetic constant estimation.*

Отримано: 9.06.2025

УДК 519.856.330.43

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.68-74

О. І. Радзієвська*, канд. фіз.-мат. наук,

І. Б. Ковальська**, канд. фіз.-мат. наук

*Національний університет харчових технологій, м. Київ,

** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАСТОСУВАННЯ БАЙЄСІВСЬКОГО МЕТОДУ В МОДЕЛЮВАННІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У сучасному світі дані є одним з найважливіших ресурсів. Здатність ефективно аналізувати їх та робити обґрунтовані висновки стає ключовою. Байєсівські методи, основою яких є теорема Байєса, пропонують потужний та гнучкий інструмент для розв'язання складних проблем, дозволяючи оновлювати початкові уявлення в світлі нових доказів. Методи спираються на поняття апостеріорної ймовірності та використання формули Байєса, а ймовірність Байєса розглядається, як ступінь впевненості у відповідній події.

Теорема Байєса, по суті, є формалізацією того, як можна вчитися на досвіді. Вона надає математичний апарат для об'єднання попередніх знань (або «априорних» переконань) з даними, отриманими з реального світу, для формування більш точних і надійних «апостеріорних» висновків. Це робить байєсівські методи особливо цінними в сферах, де невизначеність є невід'ємною частиною процесу, а також там, де потрібно приймати рішення в умовах обмеженої інформації.

У статті з допомогою теореми Байєса моделюється апостеріорна функція щільності розподілу ймовірностей деякого параметра – невідомого математичного сподівання (наприклад, середнього відсотку зростання прибутку домогосподарств в даній місцевості). Нехай з попередніх досліджень відомий середній відсоток зростання прибутку. Якщо випадковим чином отримати вибірку з n домогосподарств, тобто випадкову вибірку x з генеральної сукупності, яка, припустимо, має нормальний розподіл з невідомим математичним сподіванням і відомою дисперсією, то можна знайти апостеріорну функцію

щільності розподілу ймовірностей цього параметра. Для дослідження прибутку у відсотках домогосподарств за перший квартал відбирається випадкова вибірка з 10 домогосподарств.

У результаті показано, що поєднання додаткової інформації, яка міститься лише в десяти незалежних спостереженнях, з апріорною інформацією призвело до значного зниження невизначеності припущення щодо параметра математичного сподівання.

Ключові слова: *теорема Байєса, апостеріорна ймовірність, апріорна інформація, математичне сподівання, нормальний розподіл, зростання прибутку, зниження невизначеності.*

Вступ. У сучасному світі дані є одним з найважливіших ресурсів. Здатність ефективно аналізувати їх та робити обґрунтовані висновки стає ключовою. Байєсівські методи, основою яких є теорема Байєса, пропонують потужний та гнучкий інструмент для розв'язання складних проблем, дозволяючи оновлювати початкові уявлення в світлі нових доказів. Цей підхід є втіленням індуктивного методу, адже він дозволяє переходити від спостережень до загальних висновків, постійно уточнюючи початкові гіпотези.

Наведемо тут слова Г. Джефріса [1]: «Фундаментальною проблемою наукового прогресу, як і повсякденного життя, є навчання на досвіді. Знання, отримані таким чином, частково складаються просто з опису того, що ми вже спостерігали, але частково вони полягають в тому, що ми використовуємо висновки з минулого досвіду для передбачення майбутнього досвіду. Ця частина знань може бути названа узагальненням або індукцією».

Таким чином, індукція робить наголос не тільки на узагальненні на основі спостереження, але також не виключає опис, як важливу складову частину навчання на досвіді і узагальнення для передбачення можливих результатів.

Варто відмітити, що основними принципами та положеннями індуктивного методу є:

1. **Спостереження:** індуктивний метод починається зі збору та аналізу великої кількості конкретних даних або спостережень. Ці дані можуть бути будь-чим: від зображень і текстів до числових показників і результатів експериментів.
2. **Виявлення закономірностей:** на основі зібраних даних відбувається пошук повторюваних елементів, зв'язків та тенденцій. Це може бути визначення спільних рис об'єктів, кореляцій між змінними або послідовностей подій.
3. **Формулювання гіпотез:** після виявлення закономірностей формуються попередні гіпотези або правила, які пояснюють ці закономірності. Ці гіпотези є припущеннями про те, як працює система або явище.

4. **Перевірка та узагальнення:** сформульовані гіпотези перевіряються на нових даних. Якщо гіпотези виявляються правильними, вони узагальнюються до загальних принципів, теорій або моделей. Цей процес може бути ітеративним, тобто гіпотези можуть уточнюватися або переформулюватися в міру надходження нових даних.

Теорема Байєса, по суті, є формалізацією того, як можна вчитися на досвіді [2]. Вона надає математичний апарат для об'єднання попередніх знань (або «апостеріорних» переконань) з даними, отриманими з реального світу, для формування більш точних і надійних «апостеріорних» висновків. Це робить байєсівські методи особливо цінними в сферах, де невизначеність є невід'ємною частиною процесу, а також там, де потрібно приймати рішення в умовах обмеженої інформації.

Найважливішим елементом байєсовського підходу є теорема Байєса.

Постановка задачі. Нехай $p(x, \theta)$ сумісна функція щільності розподілу ймовірностей для вектора випадкових спостережень x і вектора параметрів θ , який теж є випадковим. Координатами вектора θ є параметри, які описують модель випадкового явища. Відповідно до теореми множення ймовірностей можна записати

$$p(x, \theta) = p(x/\theta) p(\theta) = p(\theta/x) p(x).$$

Звідси теорема Байєса має вигляд:

$$p(\theta/x) = \frac{p(x/\theta) p(\theta)}{p(x)},$$

де $p(x) = \int p(x/\theta) p(\theta) d\theta$.

Отже, можна записати:

$$p(\theta/x) \sim p(\theta) p(x/\theta). \quad (1)$$

Знак $\sim$ означає пропорційність, $p(\theta/x)$ – апостеріорна функція щільності розподілу ймовірностей для вектора параметрів θ при додатковій інформації x і $p(\theta)$ апостеріорна функція щільності розподілу ймовірностей для вектора параметрів θ .

Розглянемо приклад застосування цієї теореми для отримання апостеріорної функції щільності розподілу ймовірностей параметра μ – невідомого математичного сподівання (наприклад, середнього відсотку зростання прибутку домогосподарств в деякій місцевості). Нехай з попередніх досліджень відомо, що він дорівнює μ . Для цього випадковим чином було отримано вибірку з n домогосподарств, тобто випадкову вибірку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з генеральної сукупності, яка, припустимо, має нормальний розподіл з невідомим параметром μ і відомою дисперсією $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Отже потрібно знайти апостеріор-

ну функцію щільності розподілу ймовірностей параметра μ , тобто $p(\mu/x, \sigma_0^2)$. З формули (1) маємо:

$$p(\mu/x, \sigma_0^2) \sim p(\mu) p(x/\mu, \sigma_0^2),$$

де $p(\mu)$ – функція щільності розподілу ймовірностей параметра μ , а $p(x/\mu, \sigma_0^2)$ – функція правдоподібності для невідомого параметра μ . У цьому випадку функція правдоподібності має вигляд:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n / \mu, \sigma_0^2) = \left(2\pi\sigma_0^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (2)$$

Введемо позначення

$$k = n-1, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu})^2. \quad (3)$$

Далі покажемо, що виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = ks^2 + n(\mu - \bar{\mu})^2. \quad (4)$$

Дійсно, маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{\mu}) - (\mu - \bar{\mu}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu})(\mu - \bar{\mu}) + n(\mu - \bar{\mu})^2. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu}) = 0,$$

$$\text{то } \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu})^2 + n(\mu - \bar{\mu})^2.$$

З цієї рівності, враховуючи позначення (3), одержимо рівність (4).

Враховуючи (4), функцію правдоподібності (2) можна переписати таким чином:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n / \mu, \sigma_0^2) = \left(2\pi\sigma_0^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} (ks^2 + n(\mu - \bar{\mu})^2)}. \quad (5)$$

З припущення, що генеральна сукупність має нормальний розподіл, функцію щільності розподілу ймовірностей для невідомого параметра μ можна записати у вигляді:

$$p(\mu) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma_1\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2} (\mu - \mu_1)^2}, \quad (6)$$

де μ_1 – апіорне математичне сподівання, σ_1 – апіорна дисперсія, тобто параметри, які встановлює дослідник на основі початкової інформації.

Отже, враховуючи (5) і (6) маємо:

$$p(\mu)p(x/\mu, \sigma_0^2) = (\sqrt{2\pi}\sigma_1)^{-1} e^{-(2\sigma_1^2)^{-1}(\mu-\mu_1)^2} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(ks^2+n(\mu-\bar{\mu})^2)} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-n} e^{-\frac{ks^2}{2\sigma_0^2}} \left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{n(\mu-\bar{\mu})^2}{\sigma_0^2}\right)} \right).$$

Вираз $(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-n} e^{-\frac{ks^2}{2\sigma_0^2}}$ визначається на основі початкової інформації, а вираз $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{n(\mu-\bar{\mu})^2}{\sigma_0^2}\right)}$ містить невідомий параметр μ . Тому ми можемо записати:

$$p(\mu/x, \sigma_0^2) \sim p(\mu)p(x/\mu, \sigma_0^2) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{n(\mu-\bar{\mu})^2}{\sigma_0^2}\right)}.$$

Виконаємо тотожні перетворення з показником степеня останньої частини цього співвідношення:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{n(\mu-\bar{\mu})^2}{\sigma_0^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n} \sigma_0^2} \left(\frac{\sigma_0^2(\mu-\mu_1)^2}{n} + \sigma_1^2(\mu-\bar{\mu})^2 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sigma_1^2 \sigma_0^2}{n}} \left(\left(\frac{\sigma_0^2}{n} + \sigma_1^2 \right) \mu^2 - 2 \left(\frac{\sigma_0^2}{n} \mu_1 + \sigma_1^2 \bar{\mu} \right) \mu + \frac{\sigma_0^2}{n} \mu_1^2 + \sigma_1^2 \bar{\mu}^2 \right).$$

Далі, виділяючи повний квадрат і сталий множник, якій залежить від початкової інформації, одержуємо співвідношення:

$$p(\mu/x, \sigma_0^2) \sim e^{-\frac{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_0^2/n}{2\sigma_1^2 \sigma_0^2/n} (\mu - \frac{\frac{\sigma_0^2}{n} \mu_1 + \sigma_1^2 \bar{\mu}}{\frac{\sigma_0^2}{n} + \sigma_1^2})^2}.$$

Звідси маємо, що випадкова величина μ нормально розподілена з математичним сподіванням:

$$M(\mu) = \frac{\frac{\sigma_0^2}{n} \mu_1 + \sigma_1^2 \bar{\mu}}{\frac{\sigma_0^2}{n} + \sigma_1^2} = \frac{\bar{\mu} \left(\frac{\sigma_0^2}{n} \right)^{-1} + \mu_1 (\sigma_1^2)^{-1}}{\left(\frac{\sigma_0^2}{n} \right)^{-1} + (\sigma_1^2)^{-1}}$$

і дисперсією

$$D(\mu) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_0^2 / n}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 / n} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_0^2}{n}\right)^{-1} + (\sigma_1^2)^{-1}}.$$

Введемо позначення:

$$b_0 = \left(\frac{\sigma_0^2}{n}\right)^{-1}, b_1 = (\sigma_1^2)^{-1}. \quad (7)$$

У цих позначеннях математичне сподівання і дисперсія мають вигляд:

$$M(\mu) = \frac{\bar{\mu}b_0 + \mu_1 b_1}{b_0 + b_1} \quad \text{і} \quad D(\mu) = \frac{1}{b_0 + b_1}. \quad (8)$$

Застосуємо формули (7) і (8) до числових результатів дослідження.

Досліджується прибуток у відсотках домогосподарств за перший квартал. Для цього відбирається випадкова вибірка з 10 домогосподарств. Отримано наступні результати у відсотках: 6; 3; -7; -9; 3; -6; 2; -3; 2; -3. Вважаємо математичне сподівання прибутку μ невідомим, а дисперсію $\sigma_0^2 = 4$. З попередніх досліджень маємо апіорну інформацію: $\mu_1 = -0,8$ і $\sigma_1^2 = 9$.

З результатів дослідження одержуємо: $\bar{\mu} = -1,2$. Далі використовуючи формули (7) і (8) знаходимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини μ : $M(\mu) = -1,18$; $D(\mu) = 0,6$.

Для порівняння апіорної функції щільності розподілу ймовірностей і апостеріорної функції щільності розподілу ймовірностей побудуємо їх графіки.

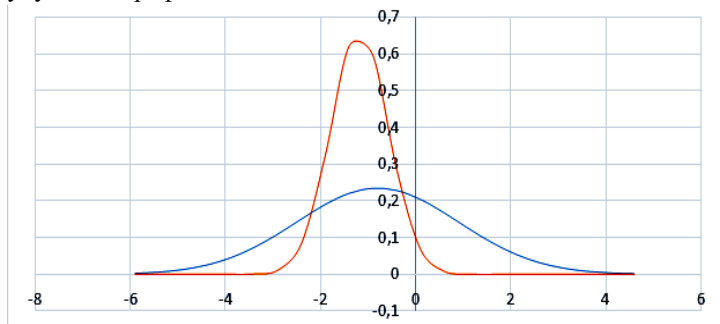


Рис. 1. Графік апіорної і апостеріорної функції щільності розподілу μ

На цьому графіку більш полого лінія є графіком функції для апіорної інформації, а більш крута – це графік функції для апостеріорної інформації.

Висновок. Можна переконатися, що поєднання додаткової інформації, яка міститься лише в десяти незалежних спостереженнях, з нашою апіорною інформацією призвело до значного зниження невизначеності припущення щодо параметра математичного сподівання μ . Тобто, апіорна дисперсія становить $\sigma_1^2 = 9$, коли апостеріорна дорівнює 0,6.

Список використаних джерел:

1. Jeffreys H. Scientific Inference. Third Edition. Cambridge University Press. 2011. P. 282.
2. Zellner. An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. Wiley-Interscience, 1996. 448 p.

APPLICATION OF BAYESIAN METHOD IN MODELING ECONOMIC PROCESSES

In the modern world, data is one of the most important resources. The ability to effectively analyze them and draw informed conclusions is becoming key. Bayesian methods, the basis of which is Bayes' theorem, offer a powerful and flexible tool for solving complex problems, allowing you to update your initial ideas in the light of new evidence. The methods are based on the concept of posterior probability and the use of Bayes' formula, and Bayes' probability is considered as the degree of confidence in the corresponding event.

Bayes' theorem, in essence, is a formalization of how you can learn from experience. It provides a mathematical apparatus for combining prior knowledge (or «prior» beliefs) with data obtained from the real world to form more accurate and reliable «posterior» conclusions. This makes Bayesian methods particularly valuable in areas where uncertainty is an inherent part of the process, as well as where decisions need to be made under conditions of limited information.

In this article, Bayes' theorem is used to model the posterior probability density function of some parameter – an unknown mathematical expectation (for example, the average percentage increase in household income in a given area). Let the average percentage increase in income be known from previous studies. If we randomly obtain a sample of n households, that is, a random sample x from the general population, which, let us assume, has a normal distribution with an unknown mathematical expectation and a known variance, then we can find the posterior probability density function of this parameter. To study the percentage income of households for the first quarter, a random sample of 10 households is selected.

As a result, it is shown that the combination of additional information contained in only ten independent observations with a priori information led to a significant reduction in the uncertainty of the assumption regarding the parameter of the mathematical expectation.

Key words: *Bayes' theorem, posterior probability, a priori information, mathematical expectation, normal distribution, profit growth, uncertainty reduction.*

Отримано: 25.06.2025