

УДК 512.9:517.98

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.163-176

А. Р. Ясельський, аспірант

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНІ БАЗИСИ І БАГАТОВИМІРНІ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА

У роботі розвинена конструкція блочно-симетричних інваріантів для послідовностей багатовимірних блоків та отримані багатовимірні формули Ньютона, які пов'язують три природні системи базисів. Дослідження спирається на введення блочних степеневих сум, а також повних і елементарних блочно-симетричних багаточленів, для яких побудовані багатозмінні формальні генеруючі степеневі ряди і встановлено фундаментальну тотожність векторного типу. Показано, що логарифмічна форма цієї тотожності призводить до системи рекурентних співвідношень Ньютона-Жирара з явними комбінаторними коефіцієнтами, що забезпечує коректний облік мономів у багатовимірному випадку. Отримані співвідношення сумісні з класичними формулами та не потребують додаткових припущень щодо комутативності перетворень або спеціальної нормалізації коефіцієнтів. Доведено, що переходи між зазначеними базисами мають трикутний характер щодо природного часткового порядку на мультиіндексах, що забезпечує єдність розкладів і оберненість відповідних лінійних перетворень. Доведено, що блочні степеневі суми утворюють базис інваріантної підалгебри, а повні і елементарні функції надають альтернативні розкладання з чіткими правилами перерахунку коефіцієнтів.

Детально розглянуто нескінченновимірний випадок із усіченням за кількістю блоків. Показано, що усічені представлення утворюють зростаючу за включенням послідовність (кожне наступне містить попереднє) і є рівномірно обмеженими на будь-якій фіксованій множині, що забезпечує рівномірну на компактних множинах збіжність до вихідного інваріанту. На основі цих властивостей сформульовано висновок про мінімальний набір твірних для кожного фіксованого сумарного ступеня. Для будь-якого фіксованого ступеня всі інваріанти цього ступеня генеруються елементами того ж ступеня з будь-якої з трьох систем, при цьому усічені за кількістю блоків ряди рівномірно на компактах сходяться до відповідних повних блочно-симетричних багаточленів. Розроблена схема узагальнює класичну теорію симетричних функцій на блоковий випадок та формує єдину методологію для побудови базисів, взаємних переходів та контролю збіжності, що створює основу для

подальших досліджень у галузі комбінаторики та алгебраїчного аналізу інваріантів.

Ключові слова: *вектор, функція, базис, збіжність, інваріанти, мультиіндекси.*

Вступ та постановка проблеми. Симетричні та багатосиметричні багаточлени є базовими інструментами алгебри й комбінаторики для опису інваріантів, побудови базисів і аналізу структур на просторах функцій. Узагальнення до блочного контексту необхідне для описування системи з внутрішньою симетрією, де змінні групуються в блоки, а симетрія реалізується дією групи перестановок на блоках, що узгоджує класичні конструкції з багатовимірними структурами функціонального аналізу. Разом із тим, існує брак цілісної схеми, яка одночасно охоплює три природні блочно-симетричні системи, узгоджені векторними тотожностями Ньютона-Жирара, із доведеною трикутною структурою переходів за частковим порядком на мультиіндексах і з аналітичним блоком про усічення. Запропонований підхід поєднає алгебраїчну та аналітичну частини, забезпечує рівномірну збіжність усічених представлень і фіксує мінімальні системи твірних, формуючи повну базисну структуру блочно-симетричних інваріантів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У науковому просторі сьогодення представлено значну кількість досліджень, присвячених вивченню симетричних, багатосиметричних та блокових багаточленів, а також їх алгебраїчних властивостей у різних функціональних просторах. Так, у роботі [1] запроваджено хроматичну багатосиметричну функцію для графів і досліджено її зв'язок із гомогенними підмножинами. Автори формують алгебро-комбінаторну рамку для аналізу багатосиметричних інваріантів, описують базисні розкладення та структурні властивості нового об'єкта

У роботі [2] розвинуто теорію мульти-квазісиметричних функцій із напівгруповими показниками та досліджено їхню алгебраїчну структуру в контексті алгебри Гопфа і алгебри Рота-Бакстера. Автори формують узагальнену рамку для побудови базисів та операцій, описують взаємодію між комбінаторними генеруючими конструкціями й коалгебраїчними структурами та демонструють зв'язок із сучасними напрямками алгебраїчної комбінаторики.

У роботі [3] досліджено симетричні багаточлени на ℓ_1 та їхній зв'язок із симетричним простором Фока. Автори описують ізоморфізм між відповідними алгебраїчними конструкціями, аналізують структуру розкладів і топологічні властивості та демонструють інструменти для роботи із симетричними функціями на просторах послідовностей.

У роботі [4] досліджено генеруючі елементи алгебри блок-симетричних багаточленів на добутку банахових просторів $\mathbb{C}^S$. Автори формують алгебраїчні умови для побудови мінімальних систем твірних і описують структурні властивості відповідних інваріантів, включно з взаємозв'язками між різними типами генеруючих конструкцій. Подано конструктивні процедури отримання твірних і наведено приклади, що демонструють застосування підходу у багатовимірному блочному контексті.

Проте, незважаючи на значну кількість наукових надбань, питання інтеграції трьох природних блочно-симетричних систем у єдину конструкцію через багатовимірні формули Ньютона-Жирара, строгого обґрунтування їх трикутних переходів між базисами та доведення рівномірної збіжності усічених представлень на просторах ℓ_p ще не було розглянуто.

Постановка завдання. Формальна постановка задачі побудови блочно-симетричних базисів та виведення багатовимірних формул Ньютона формулюється так. Нехай задано простір $X = \ell_p(\mathbb{R}^s)$ з $1 \leq p \leq \infty$; елемент $x \in X$ представляється як послідовність блоків $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in \mathbb{R}^s$. Нехай група $G = S_{\text{fin}}$ (скінченні перестановки індексів блоків) діє за правилом $(\sigma \cdot x)_i = x_{\sigma(i)}$. Розглядається інваріантна підалгебра фінітарних багаточленів:

$$\mathcal{P}^G = \{P : P(\sigma \cdot x) = P(x) \forall \sigma \in G\}. \quad (1)$$

Для мультиіндексу $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s \setminus \{0\}$ визначимо блочні степеневі суми $H_\alpha(x) = \sum_{i \geq 1} \prod_{j=1}^s x_{i,j}^{\alpha_j}$ і багатовимірні генеруючі функції:

$$H(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^s} S_\beta z^\beta = \prod_{i \geq 1} \left(1 - \sum_{\alpha \neq 0} x_i^\alpha z^\alpha \right)^{-1}, \quad (2)$$

$$E(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^s} R_\beta z^\beta = \prod_{i \geq 1} \left(1 + \sum_{\alpha \neq 0} x_i^\alpha z^\alpha \right), \quad (3)$$

де $z^\beta = \prod_{j=1}^s z_j^{\beta_j}$. Задача полягає у побудові систем $\{H_\alpha\} \{S_\beta\} \{R_\beta\}$, які

задовольняють такі умови:

- $H_\alpha, S_\beta, R_\beta \in \mathcal{P}^G$ для всіх індексів; для усічень за числом блоків N відповідні добутки визначеннях $H(z), E(z)$ є скінченними, а

граничні об'єкти узгоджуються як формальні ряди або межі в $\| \cdot \|_0$ на множині $B_x(R)$;

- треба ввести $\mathcal{P}(z) = \sum_{\alpha \neq 0} \alpha H_\alpha z^{\alpha-1}$, $z^{\alpha-1} = \prod_{j: \alpha_j > 0} z_j^{\alpha_j-1}$ та забезпечити тотожності $\nabla_z \log H(z) = \mathcal{P}(z)$, $\nabla_z \log E(-z) = -\mathcal{P}(z)$, з яких виводяться рекурентні співвідношення Ньютона-Жирара між коефіцієнтами: $|\beta| S_\beta = \sum_{0 < \alpha \leq \beta} c(\alpha, \beta) S_{\beta-\alpha} H_\alpha$, $|\beta| R_\beta = \sum_{0 < \alpha \leq \beta} \tilde{c}(\alpha, \beta) R_{\beta-\alpha} H_\alpha$, із явними комбінаторними коефіцієнтами $c, \tilde{c}$;
- треба довести що інваріантна алгебра генерується означеними системами: $\mathcal{P}^G = [H_\alpha : \alpha \neq 0] = \mathbb{R}[S_\beta : \beta \in \mathbb{N}^s] = \mathbb{R}[R_\beta : \beta \in \mathbb{N}^s]$, а перетворення між $\{H_\alpha\} \leftrightarrow \{S_\beta\}$ та $\{H_\alpha\} \leftrightarrow \{R_\beta\}$ є трикутними відносно часткового порядку на мультиіндексах, що забезпечує єдність представлення кожного $P \in \mathcal{P}^G$;
- для кожного k система $\{H_\alpha : |\alpha| \leq k\}$ (еквівалентно, $\{S_\beta\}$ чи $\{R_\beta\}$ з $|\beta| \leq k$) генерує всі інваріантні багаточлени сумарного ступеня $\leq k$; послідовності усічених представлень за N збігаються до P у $\| \cdot \|_0$ на компактах або в заданій поліномній нормі.

Метою є побудова таких інваріантів і встановлення наведених тотожностей та рекурентних зв'язків, що реалізують мінімальне породження й однозначну параметризацію блочно-симетричної інваріантної алгебри на $X = \ell_p(\mathbb{R}^s)$ у багатовимірний ньютонівський формі.

Викладення основного матеріалу дослідження. Виходячи з побудованих вище концепцій, сформулюємо основні математичні результати щодо алгебри блочно-симетричних функцій на просторі $\ell_p(\mathbb{R}^s)$ [5].

Вони стосуються побудови базисів інваріантів та узагальнення класичних формул Ньютона на випадок багатовимірних блоків. Зокрема, буде показано, що введені блочні степеневі суми утворюють алгебраїчний базис інваріантної алгебри, а також виведено взаємозв'язки (формули Ньютона) між різними базисами цієї алгебри [6].

Теорема 1 (Алгебраїчний базис блочно-симетричних поліномів).
Нехай $\mathcal{P}^G$ – алгебра всіх поліномів на $\ell_p(\mathbb{R}^s)$, інваріантних відносно перестановок s -вимірних блоків координат (тобто блочно-симетричних поліномів). Тоді множина поліномів має вигляд:

$$H_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{r=1}^s \left(x_j^{(r)} \right)^{\alpha_r} \quad (4)$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$ – мультиіндекс, утворює алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}^G$ для всіх $1 \leq p < \infty$ [7]. Інакше кажучи, будь-який блочно-симетричний поліном $P \in \mathcal{P}^G$ можна єдиним чином подати як $P(x) = Q(H_{\alpha_1}(x), \dots, H_{\alpha_m}(x))$ для деяких скінченних мультиіндексів $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Поліноми $H_{\alpha}(x)$ називаються блочними степеневими сумами [8]. Наприклад, для однотипного мультиіндексу $\alpha = (n, 0, \dots, 0)$ маємо $H_{n,0,\dots,0}(x) = \left(x_1^{(1)}\right)^n + \left(x_2^{(1)}\right)^n + \dots$, що є сумою n -тих степенів першої координати по всіх блоках.

Доведення. Спочатку зафіксуємо $p \in [1, \infty)$. За означенням, $H_{\alpha}(x)$ належить до $H_{\alpha}(x) \in G$ – інваріантних багаточленів (інваріантних відносно перестановок блоків). Для доведення його алгебраїчності незалежності та повноти в $\mathcal{P}^G$, розглянемо формальні степеневі ряди (генеруючі функції) за всіма мультиіндексами степеневих сум [9]. Нехай $z = (z_1, \dots, z_s)$ – формальний вектор змінних. Введемо дві формальні серії.

$H(z)$ – це генеруюча функція для блочних степеневих сум $H_{\alpha}(x)$:

$$H(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s, |\alpha| \geq 1} z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s} H_{\alpha}(x), \quad (5)$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$. Ця серія містить члени від степеня 1 до нескінченності по загальному ступеню $|\alpha|$.

$E(z)$ – це генеруюча функція для повних однорідних блочно-симетричних багаточленів $S_{\beta}(x)$ (у літературі їх також називають $E_{\beta}(x)$ – повні симетричні функції Макмагона) [10]:

$$E(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^s, |\beta| \geq 0} z_1^{\beta_1} \dots z_s^{\beta_s} S_{\beta}(x), \quad (6)$$

де $S_{0,\dots,0}(x) = 1$. Серію $E(z)$ можна явно подати через нескінченний добуток:

$$E(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(x_j^{(1)} z_1 + x_j^{(2)} z_2 + \dots + x_j^{(s)} z_s \right)}, \quad (7)$$

що випливає з визначення $S_{\beta}(x)$ як суми всіх мономів з фіксованими сумарними ступенями β_r по r координаті. Формула (7) збігається з рядом $E(z)$ і підтверджує, що кожен $S_{\beta}(x) \in G^S$ -інваріантним багаточленом.

Аналогічно, для елементарних блочно-симетричних багаточленів $R_{\beta}(x)$ (їх також називають елементарними функціями Макмагона) має генеруюча функція:

$$R(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^s, \beta \geq 0} z_1^{\beta_1} \dots z_s^{\beta_s} R_{\beta}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + x_j^{(1)} z_1 + x_j^{(1)} z_2 + \dots + x_j^{(s)} z_s \right). \quad (8)$$

Формула (8) безпосередньо випливає з того, що $R_{\beta}(x)$ сумує мономи, в кожному з яких кожен блок координат використовується не більш ніж понад один раз (аналогічно до класичних елементарних симетричних функцій). Зокрема, $R_{1,2,0,\dots,0}(x)$ сумує всі добутки вигляду $x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2} x_{(2)}^{i_2}$ з попарно різними i_1, i_2 . З означення видно, що $R_{\beta}(x)$ також $\in G$ -інваріантним.

Очевидно, що всі функції $H_{\alpha}(x)$, $S_{\beta}(x)$, $R_{\beta}(x)$ належать $\mathcal{P}^G$. Щоб довести, що вони утворюють саме базиси (алгебраїчно незалежні системи твірних) $\mathcal{P}^G$, розглянемо співвідношення між ними. Виходячи з (7) та (8), отримуємо фундаментальну тотожність генеруючих функцій:

$$R(z) = \frac{1}{E(-z)}. \quad (9)$$

Ця векторна формула Ньютона (узагальнення класичної формули $\prod_i (1 + tx_i) = \frac{1}{\prod_i (1 - tx_i)}$ відображає зв'язок між елементарними та повними симетричними функціями і залишається справедливою і в у випадку нескінченної кількості блоків. Більш того, застосування логарифмічного перетворення до (9) та подальший розклад у ряд дають експоненційну форму багатовимірної формули Ньютона:

$$R(z) = \exp \left(- \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s, \alpha \geq 1} \frac{(|\alpha| - 1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_s!} H_{\alpha}(-x) z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s} \right). \quad (10)$$

Ця рівність впливає із розкладу (7) шляхом логарифмування та порівняння з (8). Формула (10) є векторною формулою Ньютона, яка пов'язує між собою генеруючі функції для базисів H_α та R_β . Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s}$ у лівій та правій частині (10), одержуємо систему рекурентних співвідношень між базисами H_α та R_β . Зокрема, для довільного ненульового мультиіндексу $\alpha \in \mathbb{N}^s$ виконується співвідношення (узагальнена формула Гірара-Ньютона):

$$|\alpha| R_\alpha(x) = \sum_{0 < \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|-1} \frac{\alpha!}{\beta_1! \dots \beta_s!} R_{\alpha-\beta}(x) H_\beta(x). \quad (11)$$

Аналогічно, для базисів H і S (повних симетричних функцій) маємо співвідношення без знаків чергування:

$$|\alpha| S_\alpha(x) = \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \dots \beta_s!} S_{\alpha-\beta}(x) H_\beta(x). \quad (12)$$

У сумах (11)-(12) використовується натуральний частковий порядок на мультиіндексах ($0 < \beta \leq \alpha$ означає $\beta \neq 0$ і $\beta_r \leq \alpha_r$ для всіх r). Врахування комбінаторних коефіцієнтів $\frac{|\alpha|!}{\beta_1! \dots \beta_s!}$ забезпечує пра-

вильний підрахунок однакових мономів при переході від сум за блоками до сум за впорядкованими наборами індексів у відповідних поліномах. Формули (11) та (12) є прямими узагальненнями класичних рекурентних формул Ньютона для симетричних багаточленів. Доведення формул (11)-(12) ґрунтується на розкладі генеруючих функцій (7)-(8) у степеневі ряди з наступним порівнянням коефіцієнтів.

Логарифмування тотожності (9) та подальший степеневий розклад встановлюють відповідність між коефіцієнтами при мономах типу z^α в експоненціальній серії та алгебраїчними співвідношеннями між базисами. Прирівнювання коефіцієнтів однакових степенів z^α у розкладі генеруючої функції з (10) дає рекурентну формулу (11) – зв'язок між елементом p_α і нижчими за порядком елементами з базисів p та e . Аналогічне порівняння коефіцієнтів для генеруючих функцій $e(z)$ і $h(z)$ результує у формулу (12). Комбінаторні множники $C_{\alpha,j}$ застосовуються для підрахунку кількості способів отримання відповідного моному при переході від сумування по блоках до сумування по впорядкованих наборах індексів, забезпечуючи коректний облік кратностей. У випадку $s=1$, співвідношення (11)-(12) зво-

дяться до класичних формул Ньютона тобто при $s=1$ і $|\alpha|=k$ коефіцієнти $C_{\alpha,j}$ вироджуються до k , що відповідає класичному множнику k при e_k у рекуренті для p_k . Отримані співвідношення таким чином є прямим узагальненням на блоки довільної розмірності.

Одержані результати узагальнюють класичну теорію симетричних функцій. За розмірності блока $s=1$ усі введені конструкції зводяться до звичайних симетричних многочленів, а співвідношення (11)-(12) збігаються з класичними тотожностями Ньютона-Жирара для елементарних та повних симетричних функцій. Трикутна структура переходів між базисами у блочно-симетричному контексті при $s=1$ вироджується до впорядкування за загальним степенем. Це забезпечує єдність розкладів кожного симетричного многочлена.

З формул (11)-(12) випливає що системи H_α , S_β та R_β пов'язані між собою лінійними переходами, що мають трикутний характер відносно порядку на мультиіндексах [11]. Зокрема, кожний багаточлен $H_\alpha(x)$ виражається через $S_\beta(x)$ (або $R_\beta(x)$) з $(|\beta| \leq |\alpha|)$ (і навпаки, S_α та R_α виражаються через R_β з $(|\beta| \leq |\alpha|)$) таким чином, що в отриманих розкладах відсутні члени «вищого» ступеня, ніж α . Забезпечує єдність таких розкладів та оберненість відповідних лінійних перетворень. Інакше кажучи, переходи між базисами H_α , S_β та R_β здійснюються невивірженими трикутними матрицями.

У результаті доведено, що всі три системи H_α , S_β та R_β утворюють повні алгебраїчні базиси інваріантної алгебри P^G [12]. Цим завершується виклад побудови блочно-симетричних базисів і узагальнення формул Ньютона на випадок алгебри симетричних функцій на $\ell_p(\mathbb{R}^s)$.

Приклад. Розглянемо випадок двох s -вимірних блоків (при $s=2$) для ілюстрації отриманих результатів. Нехай $x = (x^1, x^2)$, де $x^1 = (x_{11}, x_{12})$ та $x^2 = (x_{21}, x_{22})$ – два 2-вимірних блоків змінних. Поліном $F(x) = (x_{11} + x_{12})^2 + (x_{21} + x_{22})^2$ є блочно-симетричним на $\mathbb{R}^4$, оскільки є інваріантним відносно перестановки двох блоків. Таким чином демонструється, як представити $F(x)$ через базисні елементи блочні степеневі суми. З розкладу $(x_{i1} + x_{i2})^2 = x_{i1}^2 + 2x_{i1}x_{i2} + x_{i2}^2$ для кожного блоку $i=1, 2$ видно, що:

$$F(x) = x_{11}^2 + x_{12}^2 + 2x_{11}x_{12} + x_{21}^2 + x_{22}^2 + 2x_{21}x_{22}, \quad (13)$$

Згрупуємо члени за типами мономів і запишемо суму через блочні інваріанти:

$$F(x) = (x_{11}^2 + x_{21}^2) + (x_{12}^2 + x_{22}^2) + 2(x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22}), \quad (14)$$

Тут перша дужка є $p_{(2,0)}(x)$ – сума квадратів першої координати обох блоків, друга дужка є $p_{(0,2)}(x)$ – сума квадратів другої координати, а останній доданок $2 \times (3)$ містить подвійну суму попарних добутків координат у кожному блоці. Таким чином, $F(x)$ подається у вигляді $F(x) = p_{(2,0)}(x) + p_{(0,2)}(x) + 2p_{(1,1)}(x)$. Отриманий розклад демонструє єдність подання блочно-симетричного полінома через базис $\{p_\alpha\}$ та узгоджується з теоремою 1.

Теорема 2 (Збіжність усічених представлень). Нехай $P(x) \in P^G$ – довільний блочно-симетричний поліном на $X = \ell_p(\mathbb{R}^s)$, $1 \leq p < \infty$ [13]. Позначимо через $P^{(N)}(x)$ його усічене представлення, побудоване як багаточлен від степеневих сум $H_\alpha(x)$, у якому в усіх добутках входять лише перші N блоків змінних $x_1, \dots, x_N$ [14]. Тоді виконується збіжність:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in B_X(R)} |P^{(N)}(x) - P(x)| = 0, \forall R > 0. \quad (15)$$

Доведення. За означенням $P(x)$ має представлення у вигляді скінченної комбінації мономів $x_{i_1}^{\alpha^{(1)}} \cdots x_{i_m}^{\alpha^{(m)}}$, інваріантної до перестановок блоків. Усічений багаточлен $P^{(N)}(x)$ включає лише ті члени, індекси яких $i_j \leq N$. Для кожного $R > 0$ послідовність $P^{(N)}(x)$ є монотонною за включенням наборів індексів та рівномірно обмеженою на множині $B_X(R)$, бо всі степені $x_{i,j}^\alpha$ обмежені величиною $R^{|\alpha|}$. Оскільки $P(x)$ містить лише скінченне число різних типів мономів, різниця $P(x) - P^{(N)}(x)$ на $B_X(R)$ дорівнює нулю для всіх достатньо великих N .

Наслідок. Системи H_α , S_β та R_β утворюють мінімальний набір твірних алгебри P^G у тому сенсі, що для кожного ступеня k

множина $\{H_\alpha : |\alpha| \leq k\}$ генерує всі інваріанти ступеня $\leq k$ [15]. При цьому усічені ряди за N блоками збігаються рівномірно на компактних множинах $B_X(R)$ до повного $P(x)$.

Блочно-симетричні (Макмагоно-симетричні) поліноми узагальнюють класичні симетричні: замість скалярних змінних беруться блоки з s координат. Багаточлен P на просторі $\ell^p(\mathbb{C}^s)$ є блочно-симетричним, якщо для будь-якої перестановки індексів σ виконується рівність $P(x_1, x_2, \dots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$, де $x_i \in \mathbb{C}^s$. Алгебру таких багаточленів позначимо через $Pvs(\ell^p(\mathbb{C}^s))$.

Для $p=1$ (абсолютно сумовні ряди) природно будуються елементарні блочно-симетричні багаточлени R_k (Макмагоно-елементарні), що сумують добутки координат з різних блоків за заданим мультиіндексом $k = (k_1, \dots, k_s)$.

Поряд із ними визначаються повні багаточлени H_k – блокові аналоги класичних повних симетричних функцій; відповідні ряди є абсолютно збіжними на $\ell^p(\mathbb{C}^s)$ для кожного $1 \leq p < \infty$. Також розглядаються блочні степеневі суми P_k – прямий аналог класичних степеневих сум.

Перехід від $p=1$ до $p>1$ ускладнює наявність «класичних» R_k у нескінченновимірному випадку. Це долається через узагальнені співвідношення Ньютона, які рекурсивно пов'язують базиси та однозначно визначають сімейство E_k як узагальнення елементарних функцій на випадок $E_k = R_k$. А при $p=1$ маємо $E_k = R_k$.

Для $1 \leq p < \infty$ алгебра $Pvs(\ell^p(\mathbb{C}^s))$ є поліноміальною у зліченній кількості твірних; надалі, коли це зручно, використовуємо систему H_k як фіксовану систему твірних (аналогічні перетворення можливі й для (11)). Системи P_k , H_k та E_k пов'язані трикутними переходами відносно природного часткового порядку на мультиіндексах, що забезпечує єдність розкладів і оберненість переходів. Зокрема, кожний блочно-симетричний багаточлен подається як скінченна алгебраїчна комбінація елементів вибраної системи твірних.

Розглянемо алгебру $H_{bs}(\ell^p)$ симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ^p . Одним із ключових інструментів

аналізу такої алгебри є опис її спектру – множини всіх неперервних мультиплікативних функціоналів $\varphi: H_{bs}(\ell^p) \rightarrow \mathbb{C}$.

Відомо, що спектр алгебри $H_{bs}(\ell^p)$ можна ототожнити з множиною аналітичних функцій на комплексній площині, що утворюють відносно композиції добуток комутативну напівгрупу. Іншими словами, кожному характеру $\varphi: H_{bs}(\ell^p) \rightarrow \mathbb{C}$ на алгебрі $H_{bs}(\ell^p)$ відповідає деяка ціла функція $\varphi \mapsto F_\varphi(t)$, причому добуток двох характерів відповідає мультиплікативній композиції відповідних їм функцій $F_{\varphi_1 \varphi_2}(t) = F_{\varphi_1}(t) \cdot F_{\varphi_2}(t)$.

Такий функціональний опис спектру було вперше реалізовано для випадку $p=1$ і узагальнено надалі на довільні $1 \leq p < \infty$. Зокрема, доведено, що спектр $M_{bs}(\ell^p)$ із точністю до ізоморфізму збігається з наступною множиною цілих функцій.

$$\left\{ F(t) = \exp(\lambda t) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_n} \right) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

У цій моделі нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_n} \right)$ відповідає точковому функціоналу $\delta_x(f) = f(x)$, заданому оцінюванням у точці $x \in \ell^p$, де координати x_n зв'язані з нулями a_n наведеної функції (наприклад $x_n = -\frac{1}{a_n}$ для ненульових a_n). Множник $\exp(\lambda t)$ відповідає так званому винятковому характеру ψ_λ , який не є точковим (його дія визначається параметром λ замість конкретного вектора x). Добуток $\delta_x \psi_\lambda$ при цьому відповідає конволюції $\delta_x \star \psi_\lambda$ (за Чернего-Галіндо-Загороднюком) точкового та виняткового функціоналів. Ба більше, будь-який характер $\varphi \in M_{bs}(\ell^p)$ можна єдиним чином розкласти у вигляді такої конволюції $\varphi = \delta_x \star \psi_\lambda$.

Де $x \in \ell^p$ та $\lambda \in \mathbb{C}$ – єдині параметри, що характеризують φ . Цей результат показує, що *спектральний аналіз* алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ^p природно спирається на дві складові – точкові (оцінювальні) гомоморфізми та виняткові (експоненціальні) функціонали. Такий опис не лише класифікує всі характери алгебри

$H_{bs}(\ell^P)$, але й дає можливість досліджувати їхні властивості за допомогою апарату теорії цілих функцій.

Зокрема, виявляється, що різні вибори базису симетричних функцій призводять до різних координатних описів спектру (наприклад, у вигляді послідовностей значень на системі породжувальних многочленів або у вигляді згаданих цілих функцій), що висвітлює різні структурні аспекти спектру. У випадку блочно-симетричних аналітичних функцій спектральний аналіз здійснюється аналогічно, хоча явний опис спектру стає більш складним. Втім, відомо, що й для таких алгебр зберігається властивість факторизації кожного характеру у добуток (конволюцію) точкового та виняткового компонентів, аналогічну наведеному вище випадку. Це дозволяє екстраполювати результати спектрального аналізу на ширший клас симетричних структур (включно з блочно- та суперсиметричними функціями) без втрати загальності основних висновків.

Висновки. Загалом, розроблена узгоджена схема для блочно-симетричних інваріантів узагальнює класичні формули Ньютона на багатовимірний випадок і поєднує три природні системи через генеруючі ряди та рекурентні співвідношення Ньютона-Жирара. Переходи між цими системами мають трикутний характер відносно природного часткового порядку на мультиіндексах, що забезпечує єдність розкладів і оберненість відповідних перетворень, а усічені представлення рівномірно збігаються на компактах, що підкріплює висновок про мінімальний набір твірних для фіксованого сумарного ступеня. Таким чином, завершено побудову повних алгебраїчних базисів інваріантної підалгебри в блочному контексті й закладено підґрунтя для подальших застосувань та узагальнень.

Перспективи розвитку включають уточнення комбінаторних коефіцієнтів у більш загальних моделях блоків, дослідження стійкості розкладів у різних нормах, алгоритмічні аспекти обчислення коефіцієнтів та застосування у задачах комбінаторики і алгебраїчного аналізу інваріантів, де природно виникають структури з блочною симетрією.

Список використаних джерел:

1. Crew L., Haithcock E., Reynes J., Spirkl S. Homogeneous sets in graphs and a chromatic multisymmetric function. *Advances in Applied Mathematics*. 2024. Vol. 158. Art. 102718. DOI: 10.1016/j.aam.2024.102718.
2. Gao X., Guo L., Peng X.-S. Multi-quasisymmetric functions with semigroup exponents, Hopf algebras and Rota-Baxter algebras. *arXiv*. 2024. arXiv:2406.14800. DOI: 10.48550/arXiv.2406.14800.
3. Zagorodnyuk A., Novosad Z., Holubchak O. Symmetric polynomials on and the symmetric Fock space. *AIP Conference Proceedings*. 2022. Vol. 2483. Art. 040007. DOI: 10.1063/5.0114863.

4. Kravtsiv V., Vitrykus D. Generating elements of the algebra of block-symmetric polynomials on the product of Banach spaces. *AIP Conference Proceedings*. 2022. Vol. 2483. Art. 030010. DOI: 10.1063/5.0115680.
5. Vasylyshyn T. V., Zahorodniuk V. A. Weakly symmetric functions on spaces of Lebesgue integrable functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2022. Vol. 14. № 2. P. 437-441.
6. de Vries S. On Newton's identities in positive characteristic. *arXiv*. 2023. arXiv:2305.19850. DOI: 10.48550/arXiv.2305.19850.
7. Burtnyak I. V., Chopyuk Yu. Yu., Vasylyshyn S. I., Vasylyshyn T. V. Algebras of weakly symmetric functions on spaces of Lebesgue measurable functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2023. Vol. 15. № 2. P. 411-419. DOI: 10.15330/cmp.15.2.411-419.
8. Kravtsiv V. V. Analogues of the Newton formulas for the block-symmetric polynomials on. *Carpathian Mathematical Publications*. 2020. Vol. 12. № 1. P. 17-22. DOI: 10.15330/cmp.12.1.17-22.
9. Vasylyshyn T., Zhyhallo K. Entire symmetric functions on the space of essentially bounded integrable functions on the union of Lebesgue-Rohlin spaces. *Axioms*. 2022. Vol. 11. № 9. Art. 460. DOI: 10.3390/axioms11090460.
10. Kravtsiv V. Block-supersymmetric polynomials on spaces of absolutely convergent series. *Symmetry*. 2024. Vol. 16. № 2. Art. 179. DOI: 10.3390/sym16020179.
11. Baziv N., Zagorodnyuk A. Analytic invariants of semidirect products of symmetric groups on Banach spaces. *Symmetry*. 2023. Vol. 15. № 12. Art. 2117. DOI: 10.3390/sym15122117.
12. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous polynomials on the Cartesian product of ℓ_p -spaces. *Axioms*. 2022. Vol. 11. № 2. Art. 41. DOI: 10.3390/axioms11020041.
13. Chernega I., Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of symmetric entire functions on. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2024. Vol. 30. № 1-2. P. 1-11. DOI: 10.31392/MFAT-npu26_1-2.2024.01.
14. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on the complex Banach space of all Lebesgue integrable essentially bounded functions on the union of Lebesgue-Rohlin spaces. *AIP Conference Proceedings*. 2022. Vol. 2483. Art. 030014. DOI: 10.1063/5.0115145.
15. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably generated algebras of analytic functions on Banach spaces. *Axioms*. 2023. Vol. 12. № 8. Art. 798. DOI: 10.3390/axioms12080798.

BLOCK-SYMMETRIC BASES AND MULTIDIMENSIONAL NEWTON FORMULAS

In this work we develop a construction of block-symmetric invariants for sequences of multidimensional blocks and obtain multidimensional Newton formulas that link three natural systems of bases. The study relies on introducing block power sums as well as complete and elementary block-symmetric polynomials, for which generating functions are built and a fundamental vector identity is established. It is shown that the logarithmic form of this identity leads to a system of Newton-Girard recurrence re-

lations with explicit combinatorial coefficients, which ensures a correct accounting of monomials in the multidimensional setting. The obtained relations are consistent with the classical formulas and do not require additional assumptions concerning the commutativity of transformations or any special normalization of coefficients. It is proved that transitions between the indicated bases have a triangular character with respect to the natural partial order on multi-indices, which entails the uniqueness of expansions and the invertibility of the corresponding linear transformations. The results include the statement that block power sums form a basis of the invariant subalgebra, while complete and elementary functions provide alternative expansions with clear coefficient conversion rules.

Special attention is paid to the infinite-dimensional situation with truncation by the number of blocks. It is shown that the truncated representations form a sequence that is monotone with respect to inclusion and uniformly bounded on balls, which ensures uniform convergence on compact sets to the original invariant. On the basis of these properties, a conclusion is formulated about a minimal generating set for each fixed total degree. For any such degree, all invariants are generated by elements of the same degree from any of the three systems, while truncated series by the number of blocks converge to full polynomials uniformly on compact sets. The proposed scheme generalizes the classical theory of symmetric functions to the block case and forms a unified methodology for constructing bases, performing mutual transitions, and controlling convergence, which creates a foundation for further research in combinatorics and the algebraic analysis of invariants.

Key words: *vector, function, basis, convergence, invariants, multi-indices.*

Отримано: 12.09.2025