

УДК 514.17

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.121-136

Р. Ю. Стахів, аспірант

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

РЕАЛІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРІЇ ЛІПШИЦЯ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ КОМПЛЕКСНИХ АНАЛІТИЧНИХ МНОЖИН

У статті здійснено поглиблений аналіз розвитку та застосування ліпшицевої геометрії на нескінченності у дослідженні комплексних аналітичних множин, спрямований на встановлення взаємозв'язку між їхньою алгебраїчною природою та глобальною метричною структурою. Розглянуто узагальнене визначення ліпшицевих і біліпшицевих гомеоморфізмів на нескінченності у термінах метричних просторів, що забезпечує можливість класифікації аналітичних множин за їхньою асимптотичною поведінкою та введення поняття ліпшицевої еквівалентності поза компактними областями. Досліджено клас чистих d -вимірних цілих комплексних аналітичних підмножин, для яких сформульовано та доведено критерій алгебраїчності через існування єдиного дотичного конуса на нескінченності, який виявляється d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною. Доведено еквівалентність трьох фундаментальних властивостей: алгебраїчності аналітичної множини; унікальності її дотичного конуса на нескінченності; біліпшицевої гомеоморфності на нескінченності комплексній алгебраїчній множині. Особливу увагу приділено ролі гіпотези Мікса III, яка стосується унікальності дотичних конусів мінімальних поверхонь у R із квадратичним зростанням площі, та її зв'язку з поняттям ліпшицевої регулярності на нескінченності. Показано, що метричні інваріанти, зокрема біліпшицеві гомеоморфізми, дозволяють описати асимптотичну жорсткість і стабільність аналітичних структур. Отримані результати узагальнюють і поглиблюють теореми Чоу, Столла-Бішоп та Лоясевича, вводячи нові критерії для ідентифікації алгебраїчних множин за їхніми глобальними метричними характеристиками. Запропонований підхід формує концептуальну основу для подальших досліджень асимптотичної жорсткості, стабільності та деформацій комплексних аналітичних об'єктів у межах сучасної комплексної та диференціальної геометрії.

Ключові слова: *дотичний конус на нескінченності, алгебраїчність, глобальна нерівність, ліпшицева регулярність на нескінченності, відображення з обмеженим ростом, асимптотична геометрія, проєктивний простір.*

Вступ та постановка проблеми. У сучасній математичній науці дедалі більша увага приділяється дослідженню глобальних властивостей комплексних аналітичних множин, зокрема тих, що проявляються у нескінченності. Вивчення поведінки множин на нескінченності дозволяє не лише уточнити їх геометричну структуру, але й розкрити фундаментальні зв'язки між аналітичною природою множини та її алгебраїчними характеристиками. Особливу роль у цьому контексті відіграє геометрія Ліпшиця, що є підходом, що поєднує топологічні, метричні та аналітичні властивості об'єктів і дає змогу класифікувати множини за типом ліпшицевої або біліпшицевої еквівалентності.

Загально відомо, що клас комплексних алгебраїчних множин має жорстку структуру, яка відрізняє його від ширшого класу комплексних аналітичних множин. Проте у багатьох випадках ці множини важко розрізнити, особливо коли аналіз здійснюється в глибоких асимптотичних режимах. У зв'язку з цим виникає питання: чи можна на основі ліпшицевої геометрії визначити, чи є та чи інша аналітична множина алгебраїчною? Інакше кажучи, чи є можливим встановлення чітких метричних критеріїв алгебраїчності?

Окреме значення має дослідження дотичного конуса на нескінченності, який описує лінійне наближення множини в асимптотичному масштабі. Встановлення унікальності цього конуса, а також його алгебраїчної природи, може допомогти у розв'язанні проблеми глобальної класифікації аналітичних множин. Такий підхід, що поєднує у собі аналітичні, алгебраїчні та метричні інструменти, є новим кроком у напрямку побудови повноцінної теорії глобальної геометрії аналітичних структур у проективному або евклідовому просторі.

Попри значну кількість результатів у сфері локальної аналітичної геометрії, досі залишається недостатньо розробленою проблема розуміння структури аналітичних множин «на нескінченності». Зокрема, потребують системного обґрунтування критерії, за якими можна відрізнити комплексні алгебраїчні множини від загальних аналітичних лише на підставі їх поведінки на великих масштабах. Це завдання є не лише теоретично актуальним, але й важливим з погляду прикладних застосувань, зокрема в задачах моделювання, де властивості простору в околі нескінченності можуть істотно впливати на результати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] було розглянуто підхід до класифікації сингулярностей у комплексному просторі на основі їх Ліпшицевої геометрії, тобто структури простору в околі особливої точки, яка зберігається при біліпшицевих відображеннях. У центрі дослідження знаходиться аналіз внутрішньої та зовнішньої метрик сингулярностей та виявлення геометричних інваріантів, які відображають аналітичні особливості об'єктів.

Робота починається з пояснення різниці між топологічною, аналітичною та Ліпшицевою еквівалентністю, зосереджуючись на питанні, як виглядає аналітичний простір поблизу особливої точки залежно від обраної метрики. Значну увагу приділено зовнішній метриці, яка часто є чутливішою до аналітичних особливостей, ніж внутрішня, і, зокрема, дозволяє виявляти аналітичні інваріанти, такі як кратність. У випадку комплексних кривих доводиться, що внутрішня геометрія є тривіальною (всі криві метрично конічні), а зовнішня – несе достатньо інформації для повної класифікації топологічного типу, що підтверджується за допомогою техніки, названої *bubble trick*.

У випадку нормальних поверхневих сингулярностей вводиться поняття *thick-thin decomposition* – розбиття сингулярності на «товсті» (*thick*) та «тонкі» (*thin*) частини. Товсті частини є метрично конічними (зберігають геометричну структуру при масштабуванні), тоді як тонкі частини мають менший тангенціальний конус і містять так звані «швидкі петлі», що є перешкодою до метричної конічності. На основі цієї побудови формується внутрішня геометрична декомпозиція, яка узагальнює топологічну структуру сингулярності.

Окрему частину займає дослідження зовнішньої Ліпшицевої геометрії поверхонь. Тут використовується розширена версія методу бульбашок – зокрема, зі «стрибками» (*bubble trick with jumps*), які дозволяють аналізувати поведінку простору на різних масштабах та виявляти нові інваріанти. Побудовано зовнішню геометричну декомпозицію, що відображає складніші аналітичні особливості сингулярності, зокрема через вивчення полярних кривих, їхніх розділювальних точок та зв'язку з проєкціями.

У науковій праці [2] досліджується бі-ліпшицева геометрія поверхонь, що формуються як об'єднання двох нормально вкладених Гельдерових трикутників. Розвиваються ідеї метричної геометрії сингулярностей, із зосередженням уваги на зв'язку між внутрішніми й зовнішніми метриками, а також на інваріантах, які дозволяють класифікувати такі множини з позицій бі-ліпшицевої еквівалентності.

Центральним об'єктом аналізу є пара нормально вкладених Гельдерових трикутників. Вводяться функції відстані між цими трикутниками й досліджуються їхні метричні властивості. Основним питанням є визначення того, чи можна певну пару трикутників вважати зовнішньо бі-ліпшицевою еквівалентною іншій парі, зокрема парі, де другий трикутник є графіком функції, визначеної на першому. Простий аналіз показує, що це не завжди можливо, оскільки геометрична взаємодія між трикутниками може бути надто складною.

Щоб виявити структуру зв'язку між такими трикутниками, вводиться поняття зон, які об'єднують дуги за порядком дотичності до функції відстані. Ці зони можуть бути відкритими або замкненими, регулярними або сингулярними, і в кожній із них функція має перед-

бачувану поведінку. Далі вводиться поняття елементарної зони, де структура функції є стабільною, та описують умови, за яких ця стабільність гарантує бі-ліпшицеву еквівалентність.

Потім вводиться новий інваріант – так звана $\sigma\tau$ -піца, яка об'єднує комбінаційні та метричні характеристики зони. Складова σ описує перестановку зон з найвищим порядком дотичності, тоді як складова τ фіксує відповідність між нетрансверсальними зонами. Саме поєднання цих двох параметрів дозволяє створити інструмент для класифікації пар трикутників. Було доведено, що $\sigma\tau$ -піца зберігається при зовнішніх бі-ліпшицевих відображеннях, і сформульовано гіпотезу про її повноту як класифікаційного інваріанту.

Особливу увагу приділено прикладам, які демонструють, що класичні піци (тобто інваріанти на рівні окремих трикутників) не є повними. У деяких випадках пари трикутників мають однакові піци, але не є зовнішньо бі-ліпшицево еквівалентними. Саме це мотивує введення інваріанта $\sigma\tau$ -піци, здатного відобразити більш тонкі властивості структури простору.

У той же час можна констатувати, що питання, пов'язане з реалізацією геометрії Ліпшица на нескінченності комплексних аналітичних множин все ще залишається недостатньо дослідженим та потребує подальшого опрацювання.

Мета дослідження. Дослідження геометрії Ліпшица на нескінченності комплексних аналітичних множин для досліджень алгебраїчності та жорсткості комплексних аналітичних множин.

Виклад основного матеріалу дослідження. Фундаментальним визначенням в процесі дослідження глобальної геометрії Ліпшица складних аналітичних множин є наступне:

Означення 1. Нехай $X \subset \mathbb{R}^n$ та $Y \subset \mathbb{R}^n$ це дві підмножини. Приймаємо, що X та Y є біліпшицевими гомеоморфними на нескінченності, якщо існують компактні підмножини $K \subset \mathbb{R}^n$ та $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ та біліпшицевий гомеоморфізм $\varphi: X \setminus K \rightarrow Y \setminus \tilde{K}$. У цьому випадку також кажемо, що X та Y є біліпшицевими еквівалентами на нескінченності.

Ліпшицеві та біліпшицеві відображення мають вигляд:

Означення 2. Нехай $X \subset \mathbb{R}^n$ та $Y \subset \mathbb{R}^m$. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається ліпшицевим, якщо існує $\lambda > 0$ таке, що

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \lambda x_1 - x_2 \quad (1)$$

для всіх $x_1, x_2 \in X$. Ліпшицеве відображення $f: X \rightarrow Y$ називається біліпшицевим, якщо його обернене відображення існує і є ліпшицевим.

Клас еквівалентності множини X у вищезгаданому відношенні еквівалентності називається геометрією Ліпшица на нескінченності X .

Щодо алгебраїчності комплексних аналітичних множин, можливо, найважливішим результатом є відома теорема Чоу (див. [3, с. 910, Теорема V]), яка формулюється наступним чином: Компактна комплексна аналітична підмножина комплексного проективного простору є комплексною алгебраїчною підмножиною. Теорема Чоу має багато важливих наслідків та версій і є основою для застосування аналітичних методів в алгебраїчній геометрії. Теорема Чоу, є результатом, відомим з теореми Столла-Бішопа, яка стверджує, що ціла комплексна аналітична множина (тобто вимірна множина $X \subset \mathbb{C}^n$ така, що існує скінченна сім'я цілих функцій F таких, що $X = \{x \in \mathbb{C}^n; f(x)=0 \text{ для всіх } f \in \mathcal{F}\}$) є алгебраїчною множиною тоді і тільки тоді, коли її об'ємне зростання обмежене. Для більшої точності теорема Столла-Бішопа говорить наступне:

Теорема 1. (Теорема Столла-Бішопа [4-6]). Нехай $Z \subset \mathbb{C}^k$ – чиста d -вимірна ціла комплексна аналітична підмножина. Тоді Z – комплексна алгебраїчна множина тоді і тільки тоді, коли існує константа $R > 0$ така, що

$$\frac{\mathcal{H}^{2d}(Z \cap \bar{B}_r^{2k}(0))}{r^{2d}} \leq R \text{ для всіх } r > 0, \quad (2)$$

де $\mathcal{H}^{2d}(Z \cap \bar{B}_r^{2k}(0))$ позначає $2d$ -вимірну міру Хаусдорфа

$$Z \cap \bar{B}_r^{2k}(0) = \{x \in Z; \|x\| \leq r\}.$$

Доведемо теорему, яка пов'язує алгебраїчність аналітичних множин з геометрією Ліпшиця на нескінченності комплексних аналітичних множин.

Теорема 2. Нехай $Z \subset \mathbb{C}^n$ – чиста d -вимірна ціла комплексна аналітична підмножина. Тоді наступні твердження взаємно еквівалентні:

- 1) X – комплексна алгебраїчна множина;
- 2) X має єдиний дотичний конус на нескінченності, який є d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною;
- 3) X є біліпшицевою гомеоморфною на нескінченній комплексній алгебраїчній множині.

Вважається, що всі підмножини $\mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$) мають індуковану евклідову метрику.

2. Попередній аналіз.

2.1. Ліпшицева регулярність на нескінченності.

Означення 3. Підмножина $X \subset \mathbb{R}^n$ називається ліпшицевою регулярною на нескінченності, якщо X та $\mathbb{R}^k$ є біліпшицевими гомеоморфними на нескінченності для деякого $k \in \mathbb{N}$.

2.2. Дотичний конус.

Означення 4. Нехай $X \subset \mathbb{R}^m$ – підмножина така, що $p \in \bar{X}$. Дана послідовність дійсних додатних чисел $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ така, що $t_j \rightarrow +\infty$, враховуємо, що $v \in \mathbb{R}^m$ – дотична до X на нескінченності відносно $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, якщо існує послідовність точок $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ така, що

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_j} x_j = v.$$

Означення 5. Нехай $X \subset \mathbb{R}^m$ – підмножина така, що $p \in \bar{X}$, та $T = \{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – послідовність дійсних додатних чисел $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ така, що $t_j \rightarrow +\infty$. Позначимо множину всіх векторів, які є дотичними до X на нескінченності відносно T , через $C_\infty^T(X)$. Коли $C_\infty^T(X)$ та $C_\infty^S(X)$ збігаються для будь-якої іншої послідовності дійсних додатних чисел $S = \{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такої, що $s_j \rightarrow +\infty$, позначимо $C_\infty^T(X)$ через $C_\infty(X)$ і назвемо його дотичним конусом до X на нескінченності.

Зауважимо, що дотичний конус множини X на нескінченності може бути неоднозначним.

Як уже було сказано в [7], загалом, перевірити, чи мають необмежені підмножини унікальний дотичний конус на нескінченності, не є легким завданням, навіть у випадку деяких класів аналітичних підмножин, наприклад, стосовно такої проблеми існує досі невирішена гіпотеза Мікса III ([8], Гіпотеза 3.15), яка стверджує, що: будь-яка належним чином занурена мінімальна поверхня в $\mathbb{R}^3$ квадратичного зростання площі має унікальний дотичний конус на нескінченності.

Розглянемо визначення дотичних конусів комплексних аналітичних множин.

Означення 6. Нехай $X \subset \mathbb{C}^m$ – комплексна аналітична підмножина, а $p \in X$. При цьому $v \in \mathbb{R}^m$ – дотичний вектор до X у точці p , якщо існують послідовності $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ та $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ такі, що $t_j \rightarrow +\infty$ та $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{x_j - p}{t_j} = v$. Позначаємо множину всіх век-

торів, які є дотичними до X у точці p , через $C(X, p)$ і називаємо її дотичним конусом X у точці p .

2.3. Розмірність комплексної аналітичної підмножини.

Означення 7. Нехай $X \subset \mathbb{C}^n$ – комплексна аналітична підмножина. Сингулярна множина X , що позначається $Sing(X)$, – це множина точок $p \in X$ таких, що $U \cap X$ не є комплексним аналітичним підмноговидом $\mathbb{C}^n$ для будь-якого відкритого околу U точки p . Точка $Sing(X)$ називається сингулярністю X . Якщо $p \in Reg(X) := X \setminus Sing(X)$, кажемо, що X є гладким у точці p .

Таким чином, якщо $p \in Reg(X) = X \setminus Sing(X)$, існує відкритий окіл $U \subset \mathbb{C}^n$ точки p такий, що $X \cap U$ є комплексним аналітичним підмноговидом $\mathbb{C}^n$, і тоді визначаємо розмірність X у точці p як $\dim_p X := \dim X \cap U$. Таким чином, визначаємо розмірність X як

$$\dim X := \max_{p \in Reg(X)} \dim_p X. \quad (3)$$

Нехай $d = \dim X$. У цьому випадку кажемо, що X є d -вимірною підмножиною. Кажемо, що X є чисто вимірною підмножиною (або чистою d -вимірною підмножиною), якщо $\dim_p X = d$ для всіх $p \in Reg(X)$.

3. Алгебраїчність та ліпшицева геометрія на нескінченності.

Теорема 3. Нехай $X \subset \mathbb{C}^n$ – чиста d -вимірна ціла комплексна аналітична підмножина. Тоді наступні твердження взаємно еквівалентні:

- 1) X – комплексна алгебраїчна множина;
- 2) X має єдиний дотичний конус на нескінченності, який є d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною;
- 3) X є біліпшицевим гомеоморфним на нескінченності комплексних алгебраїчних множин.

Доведення. Доведемо, що (1) еквівалентно (2), а (1) еквівалентно (3).

(1) $\Rightarrow$ (2). Використовуючи глобальну нерівність Лоясевича, у [9] вже було доведено, що будь-яка комплексна алгебраїчна множина має єдиний дотичний конус на нескінченності, який є комплексною нерівністю.

Нехай $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ – канонічна проекція. Припустимо, що X – комплексна алгебраїчна множина. X має єдиний дотичний

конус на нескінченності. Якщо X – обмежена множина або, що еквівалентно, $d=0$, то $C_\infty(X)=\{0\}$, що є 0-вимірною комплексною алгебраїчною множиною. Отже, припустимо, що X – необмежена множина або, що еквівалентно, $d>0$. Таким чином, замикання X в $\mathbb{C}P^n$, що позначається $\bar{X}$, є комплексною алгебраїчною підмножиною $\mathbb{C}P^n$, а $\tilde{X}=\pi^{-1}(\bar{X})\cup\{0\}$ – однорідна комплексна алгебраїчна множина $\mathbb{C}^{n+1}$. Нехай $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ – однорідні поліноми такі, що $\tilde{X}=\{(x_0, x) \in \mathbb{C}^{n+1}; \tilde{p}_1(x_0, x)=\dots=\tilde{p}_r(x_0, x)=0\}$. Зокрема, $Z=\bar{X} \cap H_\infty$ – це комплексна алгебраїчна підмножина $\mathbb{C}P^n$, що задовольняє $Z=\{(x_0 : x) \in \mathbb{C}P^n; x_0=0 \text{ та } \tilde{p}_1(x_0, x)=\dots=\tilde{p}_r(x_0, x)=0\}$, де H_∞ – гіперплощина на нескінченності, тобто $H_\infty=\{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{C}P^n; x_0=0\}$. Для кожного $i \in \{1, \dots, r\}$, нехай $p_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ буде поліномом, заданим як $p_i(x)=\tilde{p}_i(0, x)$ для всіх $x \in \mathbb{C}^n$, і таким чином $C^*(X)=\{x \in \mathbb{C}^n; p_1(x)=\dots=p_r(x)=0\}$. Зокрема, $\tilde{X} \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^n)=\{0\} \times C^*(X)$.

Твердження 1. $C_\infty(X)=C^*(X)$.

Доведення твердження 1. Оскільки $C_\infty(X)$ та $C^*(X)$ є дійсними конусами, тобто якщо $v \in C_\infty(X)$ (відповідно $v \in C^*(X)$), то $tv \in C_\infty(X)$ (відповідно $tv \in C^*(X)$) для всіх $t \geq 0$, достатньо показати, що $C_\infty(X) \cap \mathbb{S}^{2n-1} = C^*(X) \cap \mathbb{S}^{2n-1}$. Більше того, $C^*(X)$ є комплексним конусом, тобто якщо $v \in C^*(X)$, то $\lambda v \in C^*(X)$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$.

Оскільки $C_\infty(X_1 \cup X_2) = C_\infty(X_1) \cup C_\infty(X_2)$ та $C^*(X_1 \cup X_2) = C^*(X_1) \cup C^*(X_2)$, припускаємо, що X є незвідною алгебраїчною множиною.

Нехай $v \in C_\infty(X)$ така, що $\|v\|=1$. Тоді існує послідовність $\{z_j\}_j \subset X$ така, що $\lim_{j \rightarrow +\infty} z_j = \infty$ та $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{z_j}{\|z_j\|} = v$. Таким чином, для кожного j , нехай $L_j = \pi^{-1}(1 : z_j) \cup \{0\}$ та $w_j \in L_j \cap \mathbb{S}^{2n+1}$.

Оскільки $\left(\frac{1}{\|z_j\|} : \frac{z_j}{\|z_j\|} \right) \rightarrow (0 : v)$ при $j \rightarrow +\infty$, отримуємо, беручи

підпоследовність, якщо необхідно, що $w_j \rightarrow (0, \lambda v)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ з $|\lambda|=1$. Оскільки $\tilde{X}$ – однорідна комплексна алгебраїчна множина, $(0, v) \in \tilde{X}$ і, отже, $v \in C^*(X)$. Це показує, що $C_\infty(X) \subset C^*(X)$.

Нехай $v \in C^*(X)$ – вектор такий, що $\|v\|=1$. Оскільки $\{0\} \times C^*(X) = \pi^{-1}(Z) \cup \{0\}$, існує послідовність $\{(x_{0j}, y_j)\}_j \subset \tilde{X} \setminus (\{0\} \times C^*(X))$, яка збігається до $(0, v)$. Згідно з лемою про вибір комплексних кривих, існує комплексна аналітична крива $\alpha: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \tilde{X}$ така, що $\alpha(0) = (0, v)$ та $f(\alpha(t)) \neq 0$, для всіх достатньо малих $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, де $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ – проекція на першу координату. Тоді для будь-якого відкритого околу $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, який містить $(0, v)$, маємо, що $f(\tilde{X} \cap U)$ містить відкритий окол $0 \in \mathbb{C}$. Таким чином, можна вважати, що $x_{0j} > 0$ для всіх j . Згідно з лемою про вибір кривої, існує напівалгебраїчна дуга $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \tilde{X}$ така, що $\gamma(0) = (0, v)$ та $\gamma((0, \varepsilon)) \subset \tilde{X} \cap ((0, +\infty) \times \mathbb{C}^n)$. Можемо параметризувати γ так, що $\gamma(t) = (t, \beta(t))$, де β задовольняє $\lim_{t \rightarrow 0^+} \beta(t) = v$. Отже, $\frac{\beta(t)}{t} \in X$ для всіх $t \in (0, \varepsilon)$. Нехай $\{t_j\}_j \subset (0, \varepsilon)$ – послідовність, яка збігається

до 0. Тоді послідовність $\{z_j\}_j \subset X$, задана як $z_j = \frac{\beta(t_j)}{t_j}$, задоволь-

няє $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{z_j}{\|z_j\|} = v$, що показує, що $v \in C_\infty(X)$. Отже,

$C^*(X) \subset C_\infty(X)$, що завершує доведення твердження 1.

Оскільки $C^*(X)$ є однорідною комплексною алгебраїчною множиною, отримуємо, що $C_\infty(X)$ також є однорідною комплексною алгебраїчною множиною. Оскільки

$$\dim_{\mathbb{C}} Z \geq \dim_{\mathbb{C}} \bar{X} + \dim_{\mathbb{C}} H_\infty - n \geq d + n - 1 - n = d - 1,$$

то $\dim_{\mathbb{C}} C_\infty(X) \geq d$, $\dim_{\mathbb{R}} C_\infty(X) \leq \dim_{\mathbb{R}} X = 2d$. Отже, $C_\infty(X)$ є d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною.

(2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо, що X має єдиний дотичний конус на нескінченності, який є d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною $Y = C_\infty(X)$. Нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ буде канонічним базисом $\mathbb{C}^n$. Для

$$\lambda \in \Lambda(n, d) := \{\lambda : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, n\}; \lambda(1) < \dots < \lambda(d)\},$$

запишемо $\mathbb{C}_\lambda = \text{span}\{e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(d)}\}$ і $\pi_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ є ортогональною проекцією.

Роблячи лінійну зміну координат, якщо необхідно, можемо вважати, що $\pi_\lambda^{-1}(0) \cap Y = \{0\}$ для всіх $\lambda \in \Lambda$. Зокрема, $\pi_\lambda|_X : X \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$ є правильним відображенням. Таким чином, існує комплексна аналітична множина $\sigma \subset \mathbb{C}_\lambda$ така, що $\dim \sigma < d$ та

$f_\lambda := \pi_\lambda|_{X \setminus \pi_\lambda^{-1}(\sigma)} : X \setminus \pi_\lambda^{-1}(\sigma) \rightarrow \mathbb{C}_\lambda \setminus \sigma$ – відображення з k_λ -шарами для деякого $k_\lambda \in \mathbb{N}$. Оскільки f_λ – ліпшицеве відображення, то за формулою копліші отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{2d}(X \cap B_r^{2n}(0)) &= \sum_{\lambda \in \Lambda(n, d)} \int_{\mathbb{C}_\lambda} \mathcal{H}^0(\pi_\lambda^{-1}(y) \cap X \cap B_r(0)) d\mathcal{H}^{2d}(y) \leq \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda(n, d)} k_\lambda \mathcal{H}^{2d}(\mathbb{C}_\lambda \cap B_r(0)) \leq k \binom{n}{d} \mu_{2d} r^{2d}, \end{aligned} \quad (4)$$

для всіх $r > 0$, де μ_{2d} – об'єм $2d$ -вимірної одиничної кулі, а $k = \max\{k_\lambda; \lambda \in \Lambda(n, d)\}$. За теоремою Столла-Бішопа, X – комплексна алгебраїчна множина.

(1) $\Rightarrow$ (3). Оскільки тотожне відображення є біліпшицевим відображенням, отримуємо, що (1) передбачає (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Припускаємо, що X є біліпшицевим гомеоморфним на нескінченності комплексної алгебраїчної множини. Нехай $A \subset \mathbb{C}^m$ – комплексна алгебраїчна множина така, що існують компактні підмножини $K \subset \mathbb{C}^m$ та $\tilde{K} \subset \mathbb{C}^m$, а також біліпшицевий гомеоморфізм $\varphi : A \setminus \tilde{K} \rightarrow X \setminus K$. Нехай $\lambda \geq 1$ такий, що

$$\frac{1}{\lambda} x - y \leq \varphi(x) - \varphi(y) \leq \lambda x - y, \forall x, y \in A \setminus \tilde{K}. \quad (5)$$

Зафіксуємо $x_0 \in A \setminus \tilde{K}$ та покладемо $y_0 = \varphi(x_0)$. Нехай $\tilde{r}_0 = \|x_0\|$ та $r_0 = \|y_0\|$. Таким чином, для будь-якого $y \in X \setminus K$ з $\|y\| = r$, нехай $x \in A \setminus \tilde{K}$ такого, що $y = \varphi(x)$, тоді маємо

$$x \leq \varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_0) + \varphi^{-1}(y_0) \leq \lambda y - y_0 + x_0 \leq \lambda(r + r_0) + \tilde{r}_0. \quad (6)$$

Таким чином, для будь-якого $r > 0$ отримуємо, що

$$(X \setminus K) \cap B_r^{2n}(0) \subset \varphi\left((A \setminus \tilde{K}) \cap B_{\lambda(r+r_0)+\tilde{r}_0}^{2n}(0)\right). \quad (7)$$

Отже, для будь-якого $r > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{2d}\left(X \cap B_r^{2n}(0)\right) &= \mathcal{H}^{2d}\left((X \setminus K) \cap B_r^{2n}(0)\right) + \\ &+ \mathcal{H}^{2d}\left(X \cap K \cap B_r^{2n}(0)\right) \leq \mathcal{H}^{2d}\left(\varphi\left((A \setminus \tilde{K}) \cap B_{\lambda(r+r_0)+\tilde{r}_0}^{2m}(0)\right)\right) + \\ &+ \mathcal{H}^{2d}(X \cap K) \leq \lambda^{2d} \mathcal{H}^{2d}\left((A \setminus \tilde{K}) \cap B_{\lambda(r+r_0)+\tilde{r}_0}^{2m}(0)\right) + \\ &+ \mathcal{H}^{2d}(X \cap K) \leq \lambda^{2d} \mathcal{H}^{2d}\left(A \cap B_{\lambda(r+r_0)+\tilde{r}_0}^{2m}(0)\right) + \mathcal{H}^{2d}(X \cap K). \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки A є комплексною алгебраїчною множиною, за теоремою Столла-Бішопа існує константа $C > 0$ така, що $\mathcal{H}^{2d}\left(A \cap B_t^{2m}(0)\right) \leq Ct^{2d}$ для всіх $t > 0$. Оскільки $\mathcal{H}^{2d}(X \cap K) < +\infty$, існує $R_1 > 0$ таке, що

$$\frac{\mathcal{H}^{2d}\left(X \cap B_r^{2n}(0)\right)}{r^{2d}} \leq \frac{\lambda^{2d} C (\lambda(r+r_0)+\tilde{r}_0)^{2d} + \mathcal{H}^{2d}(X \cap K)}{r^{2d}} \leq R_1, \quad (9)$$

для всіх $r \geq 1$. Але X є аналітичним у точці 0, тоді

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^{2d}\left(X \cap B_r^{2n}(0)\right)}{r^{2d}} = \mu_{2d}m(X, 0), \quad (10)$$

де $m(X, 0)$ позначає кратність X у точці 0. Отже, існує $R_2 > 0$ таке, що

$$\frac{\mathcal{H}^{2d}\left(X \cap B_r^{2n}(0)\right)}{r^{2d}} \leq R_2 \quad (11)$$

для всіх $r \leq 1$.

Отже, за теоремою Столла-Бішопа, X є комплексною алгебраїчною множиною.

З теореми Ліпшиця про регулярність випливає, що біліпшицев гомеоморфізм між двома комплексними аналітичними множинами X та Y переводить кожну незвідну компоненту X на незвідну компоненту Y . Таким чином, маємо теорему для необов'язково чистих вимірних множин:

Наслідок 1. Нехай $X \subset \mathbb{C}^n$ – ціла комплексна аналітична підмножина. Тоді наступні твердження взаємно еквівалентні:

1) X є комплексною алгебраїчною множиною;

- 2) кожна незвідна компонента Y множини X має єдиний дотичний конус на нескінченності, який є d -вимірною комплексною алгебраїчною множиною, де $d = \dim Y$;
- 3) X є біліпшицевою гомеоморфною на нескінченності комплексних алгебраїчних множин.

Наслідок 2. Нехай $X \subset \mathbb{C}^n$ та $Y \subset \mathbb{C}^m$ – дві цілі комплексні аналітичні підмножини. Припустимо, що X та Y є біліпшицевою гомеоморфною на нескінченності. Тоді X є комплексною алгебраїчною підмножиною тоді і тільки тоді, коли Y також є комплексною алгебраїчною підмножиною.

Наслідок 3. Нехай $A \subset \mathbb{C}P^n$ – підмножина. Припустимо, що існує гіперплощина $H \subset \mathbb{C}P^n$ така, що $A \setminus H$ – чиста d -вимірна комплексна аналітична підмножина $\mathbb{C}P^n \setminus H$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) A – d -вимірна комплексна алгебраїчна підмножина $\mathbb{C}P^n$;
- 2) $A \cap H$ – $(d-1)$ -вимірна комплексна алгебраїчна підмножина $\mathbb{C}P^n$;
- 3) $A \cap H$ – $(d-1)$ -вимірна комплексна аналітична підмножина H .

Узагальнене (метричне) означення ліпшицевих і біліпшицевих гомеоморфізмів на нескінченності охоплює як підмножини евклідових просторів, так і загальні (належні) метричні простори:

Означення 8 (Ліпшицеве та біліпшицеве відображення). Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) – метричні простори, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Відображення $f: A \rightarrow B$ зветься L -ліпшицевим, якщо існує константа $L \geq 1$ така, що

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in A.$$

Відображення f зветься біліпшицевим, якщо воно бієктивне на свій образ і існує $L \geq 1$, для якого

$$L^{-1} d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in A.$$

У цьому разі f є гомеоморфізмом між (A, d_X) та $(f(A), d_Y)$, причому і f , і f^{-1} – ліпшицеві.

Означення 9 (Ліпшицевий / біліпшицевий гомеоморфізм на нескінченності). Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) – належні метричні простори (тобто замкнені кулі компактні). Кажуть, що X і Y є ліпшицево еквівалентними на нескінченності (відповідно, біліпшицево гомеоморфними на нескінченності), якщо існують компактні підмножини $K \subset X, K' \subset Y$ та відображення $f: X \setminus K \rightarrow Y \setminus K'$ таке, що:

- 1) f є гомеоморфізмом між $X \setminus K$ та $Y \setminus K'$ (безперервне, бієктивне, з неперервним оберненням);
- 2) f є ліпшицевим, а f^{-1} – ліпшицевим (тобто f біліпшицеве на своїй області визначення). Еквівалентно, існує константа $L \geq 1$, для якої

$$L^{-1} d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X \setminus K,$$

а також

$$L^{-1} d_Y(y, y') \leq d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leq L d_Y(y, y') \quad \forall y, y' \in Y \setminus K'.$$

У цьому випадку f називається (бі) ліпшицевим гомеоморфізмом на нескінченності, а клас еквівалентності простору X за цим відношенням називають ліпшицевою геометрією X на нескінченності.

Варто зауважити:

1. Належність до великих масштабів. Умова «поза компактами» формалізує «поведінку на великих відстанях». Вибір конкретних компактів K, K' неістотний: якщо відображення існує для деяких K, K' , то воно існує і для будь-яких більших компактів $K_1 \supset K, K'_1 \supset K'$ (звуживши область визначення).
2. Еквівалентні формулювання. Замість вимоги « f – гомеоморфізм і біліпшицевий» можна одразу вимагати на $X \setminus K$ двосторонню ліпшицеву нерівність з константою $L \geq 1$, що автоматично гарантує бієктивність на образ та ліпшицевість оберненого (на $Y \setminus K'$).
3. Строгість щодо квазіізометрій. Біліпшицевість (без додаткових адитивних членів) є сильнішою, ніж квазіізометричність. Тому біліпшицева еквівалентність на нескінченності зберігає тонкі метричні інваріанти (наприклад, точні темпи зростання об'ємів), що важливо в комплексній та алгебраїчній геометрії.
4. Випадок підмножин $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$. Для $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ (або $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$) з індукованою евклідовою метрикою означення вище збігається з класичним: існують компактні K, K' та біліпшицевий гомеоморфізм $f: X \setminus K \rightarrow Y \setminus K'$.
5. Ліпшицева регулярність на нескінченності. Підмножина X називається ліпшицево регулярною на нескінченності, якщо вона біліпшицево гомеоморфна на нескінченності $\mathbb{R}^k$ для деякого k . Це поняття використовується для метричної класифікації «кінців» простору та вивчення асимптотичної геометрії.
6. Еквівалентність як відношення. Біліпшицева гомеоморфність на нескінченності задає відношення еквівалентності на класі належ-

них метричних просторів: рефлексивність дає тотожне відображення поза компактами; симетрію – існування біліпшицевого оберненого; транзитивність – композиція біліпшицевих гомеоморфізмів поза сумою відповідних компактів.

Це узагальнення робить поняття «біліпшицевої еквівалентності на нескінченності» придатним для широкого спектра задач глобальної (великомасштабної) геометрії, зокрема для комплексних аналітичних та алгебраїчних множин, де воно природно взаємодіє з такими інваріантами, як дотичні конуси на нескінченності та об'ємне зростання.

Біліпшицеві гомеоморфізми на нескінченності дозволяють класифікувати необмежені множини за їхньою *асимптотичною геометрією*. Ліпшицева геометрія на нескінченності дозволяє ввести поняття *кінців простору та еквівалентності типів нескінченності*. Також у комплексному випадку біліпшицеві гомеоморфізми на нескінченності відіграють ключову роль у встановленні зв'язку між метричними властивостями аналітичних множин та їхньою алгебраїчною природою. Поняття біліпшицевої еквівалентності застосовується для аналізу *дотичних конусів на нескінченності*, які описують «напрямки зростання» множини при віддаленні до нескінченності. Якщо два простори біліпшицеві на нескінченності, то їхні дотичні конуси метрично еквівалентні, тобто мають однакову асимптотичну структуру.

У диференціальній геометрії біліпшицеві гомеоморфізми на нескінченності використовують для дослідження *жорсткості* мінімальних поверхонь. Гіпотеза Мікса III¹ стверджує, що будь-яка належним чином занурена мінімальна поверхня в $\mathbb{R}^3$ із квадратичним зростанням площі має єдиний дотичний конус на нескінченності. Ця властивість є біліпшицевим інваріантом: вона не змінюється при біліпшицевих перетвореннях, отже, геометрія на нескінченності визначає клас еквівалентності таких поверхонь.

Висновки. У результаті проведеного дослідження було встановлено тісний зв'язок між геометрією Ліпшиця на нескінченності та алгебраїчною природою комплексних аналітичних множин. Доведено, що для чистих цілих комплексних аналітичних підмножин наявність єдиного дотичного конуса на нескінченності, який є комплексною алгебраїчною

¹ Гіпотеза Мікса III (Meeks' Conjecture III) – це відома відкрита проблема в диференціальній геометрії, що стосується асимптотичної структури мінімальних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Вона формулюється в контексті дослідження дотичних конусів на нескінченності та їхньої унікальності, і має глибокий зв'язок із ліпшицевою геометрією на нескінченності, адже остання описує метричну еквівалентність аналітичних об'єктів при великих масштабах.

множиною, еквівалентна їх алгебраїчності. Крім того, встановлено, що біліпшицевий гомеоморфізм на нескінченності до алгебраїчної множини також є достатньою та необхідною умовою алгебраїчності. Зазначено, що біліпшицеві гомеоморфізми на нескінченності – це не лише математичний інструмент, а універсальний концепт, який: формалізує еквівалентність метричних структур на великих масштабах; дозволяє класифікувати аналітичні та алгебраїчні множини за їхньою асимптотичною поведінкою; забезпечує зв'язок між теорією мінімальних поверхонь, аналітичною геометрією, та прикладними дисциплінами.

Таким чином, отримані результати узагальнюють і доповнюють відомі теореми Чоу, Столла-Бішоп та Лоясевича, пропонуючи нові критерії для класифікації комплексних аналітичних множин у глобальному контексті. Запропоновані підходи дозволяють виявляти глибинні метричні інваріанти, що відповідають алгебраїчній структурі, та відкривають перспективи для подальших досліджень жорсткості, стабільності та деформацій аналітичних об'єктів у межах сучасної комплексної геометрії.

Список використаних джерел:

1. Pichon A. An introduction to Lipschitz geometry of complex singularities. *arXiv*: website. 2020. URL: <https://arxiv.org/abs/2007.04160> (last accessed: 24.05.2025).
2. Birbrair L., Gabrielov A. Lipschitz geometry of pairs of normally embedded Hölder triangles. *arXiv*: website. 2022. URL: <https://arxiv.org/abs/2207.09962> (last accessed: 24.05.2025).
3. Chow W.-L. On Compact Complex Analytic Varieties. *American Journal of Mathematics*. 1949. Vol. 71. № 4. P. 893-914.
4. Stoll W. The growth of the area of a transcendental analytic set. *Mathematische I. Annalen*. 1964. Vol. 156. № 1. P. 47-78.
5. Stoll W. The growth of the area of a transcendental analytic set. II. *Mathematische Annalen*. 1964. Vol. 156. P. 144-170.
6. Bishop E. Condition for the analyticity of certain sets. *Michigan Mathematical Journal*. 1964. Vol. 11. P. 289-304.
7. Fernandes A., Sampaio J. E. On Lipschitz rigidity of complex analytic sets. *The Journal of Geometric Analysis*. 2020. Vol. 30. P. 706-718.
8. Meeks III Global W. H. problems in classical minimal surface theory. In: Hoffman D. (ed.). *Global Theory of Minimal Surfaces*. American Mathematical Society, Clay Mathematics Institute, 2005. P. 453-470.
9. Lê C.-T., Pham T.-S. On tangent cones at infinity of algebraic varieties. *Journal of Algebra and Its Applications*. 2018. Vol. 16. № 2.

REALIZATION OF LIPSCHITZ GEOMETRY AT INFINITY ON COMPLEX ANALYTIC SETS

The article provides an in-depth analysis of the development and application of Lipschitz geometry at infinity in the study of complex analytic sets, aimed at establishing the relationship between their algebraic nature

and the global metric structure. A generalized definition of Lipschitz and Bialpischitz homeomorphisms at infinity in terms of metric spaces is considered, which provides the possibility of classifying analytic sets according to their asymptotic behavior and introducing the concept of Lipschitz equivalence outside compact domains. A class of pure d -dimensional entire complex analytic subsets is investigated, for which a criterion of algebraicity is formulated and proven due to the existence of a unique tangent cone at infinity, which turns out to be a d -dimensional complex algebraic set. The equivalence of three fundamental properties is proved: algebraicity of an analytic set; uniqueness of its tangent cone at infinity; of the Bialpischitz homeomorphism at infinity to a complex algebraic set. Special attention is paid to the role of the Meeks' Conjecture III, which concerns the uniqueness of tangent cones of minimal surfaces in R^3 with quadratic growth of area, and its connection with the concept of Lipschitz regularity at infinity. It is shown that metric invariants, in particular Bialpischitz homeomorphisms, allow us to describe the asymptotic rigidity and stability of analytic structures. The results obtained generalize and deepen the theorems of Chow, Stoll-Bishop, and Lojasevich, introducing new criteria for identifying algebraic sets by their global metric characteristics. The proposed approach forms a conceptual basis for further studies of the asymptotic rigidity, stability, and deformations of complex analytic objects within the framework of modern complex and differential geometry.

Key words: *tangent cone at infinity, algebraicity, global inequality, Lipschitz regularity at infinity, mapping with bounded growth, asymptotic geometry, projective space.*

Отримано: 4.12.2025