

УДК 519.2

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.155-162

О. А. Ярова, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ В МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

У статті досліджуються багатовимірні рівняння відновлення, що становлять важливий клас інтегральних рівнянь, пов'язаних із стохастичними процесами з моментами відновлення. Такі рівняння природно виникають у теорії випадкових еволюцій, марковських і напівмарковських процесів, а також у моделюванні систем, які періодично повертаються до початкового стану. Особливу увагу приділено випадку, коли рівняння подано в матричній формі, що дозволяє узагальнити класичні скалярні співвідношення на системи рівнянь, придатні для опису багатокомпонентних процесів.

Розглянуто рівняння відновлення з нелінійним нормуючим множником, який ускладнює аналітичне дослідження, проте робить модель більш гнучкою та близькою до реальних прикладних задач. Для отримання розв'язку застосовано метод перетворення Лапласа, що дало змогу перейти від інтегрального рівняння до алгебраїчної матричної форми, придатної для подальшого аналізу. Отримано явний вираз для перетворення Лапласа розв'язку рівняння відновлення, що є ключовим кроком для подальшого відновлення часової залежності розв'язку.

Крім теоретичного аналізу, у статті наведено приклад для конкретної функції відновлення, який ілюструє ефективність застосованого підходу. Розраховано основні характеристики розв'язку та проаналізовано вплив параметрів функції відновлення на поведінку системи. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні стохастичних систем, що допускають структуру відновлення, а також у задачах прикладної ймовірності, теорії надійності та моделюванні складних процесів з багатовимірною динамікою.

Ключові слова: *рівняння відновлення, множник нормування, перетворення Лапласа, випадкова еволюція, функція відновлення.*

Вступ. Рівняння відновлення займають важливе місце в теорії випадкових процесів і математичній статистиці. Вони виникають у дослідженні систем, що після випадкових проміжків часу повертаються до певного вихідного стану, утворюючи так звані моменти відновлення. Такі рівняння дозволяють описати широкий спектр явищ у прикладних галузях – від теорії надійності технічних систем до біологічних і економічних процесів, що мають стохастичну природу.

Класичні результати, отримані в межах скалярних рівнянь відновлення, дають можливість ефективно досліджувати поведінку однотипних процесів. Проте у багатьох реальних задачах виникає необхідність опису багатовимірних або багатокомпонентних систем, у яких динаміка кожного компонента залежить від інших. Це зумовлює потребу у вивченні рівнянь відновлення в матричній формі, які є природним узагальненням одновимірного випадку.

Додаткову складність становить наявність нелінійного нормуючого множника, що зумовлює зміну масштабу або структури відновлення залежно від поточного стану системи. Такі рівняння виходять за межі лінійної теорії і потребують спеціальних методів аналізу. Одним із найбільш ефективних підходів до дослідження рівнянь цього типу є застосування перетворення Лапласа, яке дозволяє перейти від інтегральної до алгебраїчної постановки задачі та отримати вирази для перетворень шуканих функцій.

Метою роботи є дослідження багатовимірних рівнянь відновлення з нелінійним нормуючим множником, поданих у матричній формі, а також знаходження перетворення Лапласа для їх розв'язків.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо багатовимірне рівняння відновлення в матричній формі

$$X^\varepsilon(t) = A^\varepsilon(t) + F^\varepsilon X^\varepsilon(t),$$

де $X^\varepsilon(t)$ – сім'я шуканих матричнозначних функцій, $A^\varepsilon(t)$ – сім'я заданих невід'ємних матричнозначних функцій, $F^\varepsilon(dt)$ – сім'я матричнозначних скінченних невід'ємних мір на $[0; \infty)$.

Функція $F^\varepsilon(dt)$ може бути представлена в наступному вигляді

$$F^\varepsilon = F + g_1(\varepsilon)B + g_2(\varepsilon)B^2 + \dots + g_n(\varepsilon)B^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де $B_1, B_2, \dots, B_n$ – матриці, $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0, \dots, g_n(\varepsilon) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нехай $X(t)$, $t > 0$ – напівмарковський процес зі скінченною множиною станів $\{1, 2, \dots, n\}$ та неперервним часом. Позначимо $\tau_1 = \inf_{t>0} \{t : X(t) \neq X(0)\}$ – момент першого виходу з початкового стану, $\tau_2 = \inf_{t>0} \{t : X(t) \neq X(\tau_1)\}$ – момент другого виходу. Тоді $\tau_n = \inf_{t>0} \{t : X(t) \neq X(\tau_{n-1})\}$ – момент n -го виходу.

Розглянемо послідовність процесів з незалежними приростами $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Процеси $X(t)$ та $\xi_i(t)$ – незалежні. Крім цього, незалежні копії процесу з незалежними приростами $\xi_i^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$ не залежать від процесу $X(t)$.

Побудуємо випадкову еволюцію

$$\zeta(t) = \begin{cases} \xi_i(t), & \text{при } t < \tau_1, & X(0) = i \\ \xi_j(t), & \text{при } \tau_1 \leq t < \tau_2 & X(\tau_1) = j \\ \xi_z(t), & \text{при } \tau_2 \leq t < \tau_3 & X(\tau_2) = z \\ \dots\dots\dots & \dots \end{cases}$$

Згідно з побудовою, $\zeta(t)$ – процес з незалежними приростами.

Нехай $f(t)$, $t > 0$, - додатна скінченна функція і $\xi_i(t)$ – додатно визначений випадковий процес. Тоді $f(\zeta(t))$ – додатно визначена функція.

Розглянемо наступний інтегральний процес

$$\eta(t) = \int_0^t f(\zeta(u)) du.$$

Згідно з припущеннями, $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами.

Також, припустимо, що

$$1 - F_i(t) \sim t^{-a} a_i L(t),$$

де $L(t)$ – повільно змінна функція, $0 < a < 1$ і $\sum a_i = 1$.

Тоді середній час перебування в деякому фіксованому стані i , при умові, що $X(0) = i$ є нескінченним. Крім цього, $E_i \tau = \infty$, де E_i – умовне математичне сподівання при умові $X(0) = i$. Припустимо, що

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\xi_i(u)) du \rightarrow b_i(t)$$

за ймовірністю.

Розглянемо поведінку даного процесу. Для початку запишемо перетворення Лапласа для рівняння відновлення

$$\psi_i(s, t) = E_i(e^{-s\eta(t)}).$$

Далі, розглянемо наступне співвідношення

$$\begin{aligned} \psi_i(s, t) &= E_i(e^{-s \int_0^t \eta(u) du}; \tau_1 > t, X(0) = i) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_0^t E_i(e^{-s \int_0^{\tau_1} \xi_i(u) du}), \tau_1 \in du, X(\tau_1) = j) E_j(e^{-s\eta(t-u)}) = \\ &= E_i(e^{-s \int_0^{\tau_1} \xi_i(u) du}) P_i(\tau_1 > t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t E_i(e^{-s \int_0^{\tau_1} \xi_i(u) du}) P_i(\tau_1 \in du, X(\tau_1) = j) E_j(e^{-s\eta(t-u)}). \end{aligned}$$

В результаті отримаємо перетворення Лапласа багатовимірного рівняння відновлення

$$\psi_i(s, t) = E_i(e^{-s \int_0^t \xi_{\tau_1}(u) du}) P_i(\tau_1 > t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t E_i(e^{-s \int_0^{\tau_1} \xi_{\tau_1}(u) du}) P_{ij}(du) \psi_j(s, t-u).$$

В результаті отримано наступну теорему.

Теорема 1. Нехай $\eta(t) = \int_0^t f(\xi(u)) du$. Тоді перетворення Лапласа для багатовимірного рівняння відновлення має наступний вигляд

$$\psi_i(s, t) = E_i(e^{-s \int_0^t \xi_{\tau_1}(u) du}) P_i(\tau_1 > t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t E_i(e^{-s \int_0^{\tau_1} \xi_{\tau_1}(u) du}) P_{ij}(du) \psi_j(s, t-u).$$

Розглянемо багатовимірне рівняння відновлення

$$E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(t)}) = E_i(e^{-\lambda \xi_{\tau_1}^\varepsilon(t)}) \cdot P\{\tau < t \mid X^\varepsilon(0) = i\} + \sum_{j=1}^m \int_0^t (E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(u)})) p_{ij}(du) \cdot E_j(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(t-u)}).$$

Нехай виконуються наступні умови

1. $0 \leq E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) < \infty$.
2. $E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du)$ – нерозкладна матриця.
3. Має місце слабка збіжність

$$E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) \rightarrow E_i(e^{-\lambda \xi(u)}) p_{ij}(du).$$
4. $E_i(e^{-\lambda \xi(u)}) p_{ij}(du)$ – блочно розкладна матриця.
5. $E_i(e^{-\lambda \xi(u)}) p_{ij}(du)$ – рівномірно інтегровна.

Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $E_i(e^{-\lambda \xi^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du)$ – негратчаста матриця і виконуються умови 1-5. Тоді існує матриця C та нелінійний нормуючий множник $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ такі, що для кожного $i \in E_s$ та $j \in E_k$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{ij}^\varepsilon \left[\frac{t}{g(\varepsilon)}; \frac{t}{g(\varepsilon)} + u \right] = u \cdot q_{sk}(t) \cdot \frac{p_j^{(k)}}{\pi_k},$$

де $q_{sk} = [e^{tC}]_{sk}$, $\pi_k = \sum_{i,j \in E_k} p_i^{(k)} \cdot \int_0^\infty t F_{ij}(dt)$, $H_{ij}^\varepsilon \left[\frac{t}{g(\varepsilon)}; \frac{t}{g(\varepsilon)} + u \right]$ – функція відновлення на інтервалі $\left[\frac{t}{g(\varepsilon)}; \frac{t}{g(\varepsilon)} + u \right]$.

Розглянемо приклад.

Нехай

$$F^\varepsilon = F + g_1(\varepsilon)B_1 + g_2(\varepsilon)B_2 + \dots + g_n(\varepsilon)B_n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 4g_1(\varepsilon) & \frac{1}{2} - g_2(\varepsilon) & 2g_1(\varepsilon) \\ \frac{1}{2} - 2g_1(\varepsilon) & \frac{1}{2} - g_3(\varepsilon) & g_3(\varepsilon) \\ g_2(\varepsilon) & g_2(\varepsilon) & 1 - g_3(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Крім цього, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$, $g_3(\varepsilon) = o(g_2(\varepsilon))$ і $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Матриця F є блочно-розкладною, де

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ і } F_2 = 1.$$

Власний вектор матриці F

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю B

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$b_{11}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Припустимо, що π_s – відомий.

Тоді

$$H_{ij} \left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} + a \right) - H_{ij} \left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} \right) \rightarrow \left(e^{\frac{3tC}{\pi_1}} \right)_{sk} \cdot \frac{p_j^{(k)}}{\pi_k},$$

де $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Наступним кроком, потрібно знайти матрицю e^{tC} , де $C = \frac{3}{\pi_1} \cdot C$.

Позаяк

$$b_{12}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

i

$$b_{21}^1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

то

$$C = \frac{3}{\pi_1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi_1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці дорівнюють -3 та 0.

Тоді, жорданова форма має набуває наступного вигляду

$$J = \frac{1}{\pi_1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Також,

$$J = SCS^{-1},$$

де

$$S = \frac{1}{\pi_1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$e^{tC} = S^{-1} e^{tJ} S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{3t}{\pi_1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3t}{\pi_1}} & \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3t}{\pi_1}}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результаті отримаємо наступні співвідношення

$$H_{ij} \left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} + a \right) - H_{ij} \left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} \right) \rightarrow \frac{a}{2\pi_1} \cdot e^{-\frac{3t}{\pi_1}},$$

де $i, j \in E_1$, $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$,

$$H_{i3}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} + a\right) - H_{i3}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}\right) \rightarrow \frac{a}{3\pi_2} \cdot (1 - e^{-\frac{3t}{\pi_1}}),$$

де $i, j \in E_1$, $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$,

$$H_{3j}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} + a\right) - H_{3j}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}\right) \rightarrow 0,$$

де $i, j \in E_1$, $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$,

$$H_{33}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)} + a\right) - H_{33}\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}\right) \rightarrow \frac{1}{\pi_2},$$

де $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Таким чином, знайдено функції відновлення в нелінійній апроксимації.

У результаті проведеного дослідження, знайдено розв'язок багатовимірного рівняння відновлення в нелінійній апроксимації та розглянуто приклад.

У подальшому виникає потреба в дослідженні інших властивостей розв'язку багатовимірного рівняння відновлення. Крім цього, слід розглянути рівняння відновлення в різних апроксимаціях.

Висновки. У роботі досліджено багатовимірні рівняння відновлення з нелінійним нормуючим множником у матричній формі. Отримано перетворення Лапласа для розв'язку рівняння, що дозволяє перейти від інтегральної до аналітичної постановки задачі.

Наведено приклад для конкретної функції відновлення, який підтверджує ефективність методу. Результати можуть бути використані для моделювання стохастичних систем із регенераційною структурою та подальшого аналізу їхніх асимптотичних властивостей.

Список використаних джерел:

1. Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Limit theorem for multidimensional renewal equation. *Cybernetics and System Analysis*. 2022. Vol. 58. № 1. P. 144-147.
2. Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. The renewal equation in nonlinear approximation. *Matematychni Studii*. 2021. Vol. 56. № 1. P. 103-106.
3. Yeleyko Ya. I., Nishchenko I. I. A limit theorem for a matrix-valued evolution. *Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат.* 1993. Вип. 53. С. 102-107.
4. Yeleyko Ya. I., Nishchenko I. I. On an asymptotic representation of the Perron root of a matrix-valued evolution. *Ukrain. Mat. Zh.* 1996. Vol. 48. № 1. P. 35-43.
5. Feller W. A simple proof for renewal theorems. *Communs Pure and Appl. Math.* 1961. № 14. P. 285-293.
6. Koroliuk V. S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. 348 p.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A MULTIDIMENSIONAL RENEWAL EQUATION IN MATRIX FORM

The paper investigates multidimensional renewal equations, which represent an important class of integral equations associated with stochastic processes possessing renewal moments. Such equations naturally arise in the theory of random evolutions, Markov and semi-Markov processes, as well as in the modeling of systems that periodically return to their initial state. Particular attention is given to the case where the equation is represented in matrix form, which makes it possible to generalize classical scalar relations to systems of equations suitable for describing multicomponent processes.

A renewal equation with a nonlinear normalizing factor is considered. This factor complicates analytical analysis but makes the model more flexible and closer to real-world applications. To obtain the solution, the Laplace transform method is applied, allowing the transition from the integral form of the renewal equation to an algebraic matrix representation suitable for further analysis. An explicit expression for the Laplace transform of the solution to the renewal equation is derived, which is a key step toward recovering the time-dependent behavior of the solution.

In addition to the theoretical analysis, the paper presents an example for a specific renewal function illustrating the effectiveness of the proposed approach. The main characteristics of the solution are calculated, and the influence of the renewal function parameters on the system's behavior is analyzed. The obtained results can be applied to the study of stochastic systems with a renewal structure, as well as in problems of applied probability, reliability theory, and modeling of complex processes with multidimensional dynamics.

Keywords: *renewal equation, normalizing factor, Laplace transform, random evolution, renewal function.*

Отримано: 24.10.2025