

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.107-120

В. А. Сорич, канд.фіз.-мат. наук,

Н. М. Сорич, канд. фіз.- мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ СКЛАДЕНИМИ ЯДРАМИ

Множина 2π -періодичних функцій, суттєвий супремум модуля r -тих похідних яких не перевищує одиниці, є класом згорток ядра Бернуллі порядку r із елементами одиничної кулі простору сумовних суттєво обмежених 2π -періодичних функцій із середнім значенням на періоді рівним нулю. В 1936 р. Ж. Фавар знайшов точні значення найкращих наближень таких класів тригонометричними многочленами порядку не вище за $n - 1$ в рівномірній метриці при кожному натуральному n . У подальших дослідженнях при відшукуванні верхніх меж найкращих наближень класів згорток тригонометричними поліномами заданого порядку як в рівномірній так і в інтегральній метриках розглядалися ядра Бернуллі дробового порядку, узагальнені ядра Вейля-Надя, ядра Пуассона. У 1938 р. угорський математик Б. Надь запропонував достатню умову для ядра згортки класу (це т. зв. умова Надя): існує тригонометричний многочлен порядку $n - 1$, який інтерполює ядро в 2π рівномірно розташованих на періоді точках і лише в них із почерезною зміною знаку різниці між ядром та цим многочленом. Виконання цієї умови дозволяє обчислити найкраще наближення ядра в інтегральній метриці, найкраще наближення класу згорток з цим ядром у рівномірній та інтегральній метриках. У 1946 р. С. Нікольський узагальнив умову Надя.

Завдяки результатам М. Крейна (1938 р.) в більшості випадків не складно побудувати тригонометричний многочлен, який інтерполює ядро в 2π рівномірно розташованих на періоді точках. Труднощі виникали при доведенні того факту, що більше точок інтерполяції немає. При дослідженні деяких ядер математики зіткнулися з тим фактом, що окрім «гарантованих» 2π точок інтерполяції можуть з'являтися «додаткові» точки інтерполяції. Це спонукало авторів розглянути випадки ядер, для яких «стандартна» умова Надя не виконується. Один із кроків в цьому напрямку робиться в цій роботі. Знайдено деякі достатні умови для лінійних комбінацій парних ядер а також непарних ядер, які тригонометричними многочленами порядку $n - 1$ інтерполюються лише в $2n + 2$ рівномірно розташованих на періоді точках для парного випадку та лише в $2n + 1$ рівномірно розташованій на періоді точці зі зміною зна-

ку різниці між лінійною комбінацією та многочленом в точках інтерполяції. Тобто для цих випадків многочлени порядку $n - 1$ забезпечують найкраще наближення так, якби це були многочлени порядку n . Також у роботі наведені приклади різниць непарних ядер (Бернуллі, Бернуллі та Пуассона), різниці парних ядер Бернуллі, які демонструють одержані в роботі теореми. Як наслідок, у роботі також знайдені величини найкращих наближень тригонометричними многочленами порядку n деяких класів згортки із такими лінійними комбінаціями непарних (парних) ядер, коли для них не виконується умова Надя порядку n , проте виконується ця умова на порядок вище.

Ключові слова: *найкраще наближення лінійних комбінацій ядер, класи Степанця, достатня умова Надя.*

Вступ. У рівномірній метриці задача отримання точних значень найкращих наближень на класах 2π -періодичних функцій, r -ті ($r \in N$) похідні яких знаходяться в одиничній сфері простору сумовних суттєво обмежених функцій тригонометричними многочленами порядку не вище за $n - 1$, була розв'язана в 1936 р. Ж. Фаваром [1]. Такі класи можна розглядати також як класи згортки, що породжені відомими в науковій літературі з теорії наближення ядрами Бернуллі. В основі ідеї розв'язку задачі лежить теорема Ролля про співвідношення між числом нулів функції та числом нулів її похідної. Остаточні результати по розв'язанню задачі знаходження точних значень величин найкращих наближень на класах W_{β}^r , $r > 0, \beta \in R$, що породжуються ядрами Вейля-Надя та які узагальнюють ядра Бернуллі, у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій, належать В. К. Дзядику [2]. При цьому В. К. Дзядик встановив виконання умови Надя N_n^* для широкого класу ядер $K(t)$, які записуються у вигляді лінійної комбінації періодичних інтегралів від абсолютно монотонних функцій та які, як частковий випадок, містять ядра Вейля-Надя при довільних значеннях параметрів $r > 0$ і довільних дійсних β . Такі ж дослідження на різних функціональних компактах успішно здійснили видатні математики Н. І. Ахієзер та М. Г. Крейн [3], Б. Надь [4], С. М. Нікольський [5], С. Б. Стечкін [6] та Сунь Юншен [7, 8]. Ідея дослідження складених ядер, що записуються у вигляді лінійної комбінації складових доданків належить О. І. Степанцю [9] і отримала відповідне втілення в задачах сумісного наближення функцій та їх похідних. У 80-90-х роках ХХ сторіччя О. І. Степанцем [10, глава III] був розроблений новий підхід до класифікації періодичних функцій, який дозволив здійснювати досить тонку класифікацію надзвичайно широких множин періодичних функцій. При цьому отримані результати для вказаних класів з одного боку мають за-

гальний характер, а з іншого – дають цілу низку нових, невідомих до цього часу, результатів, які на відомих раніше класах отримати було неможливо. Притримуючись підходів до вимог класифікації функцій, ми можемо розглядати лінійну комбінацію класів функцій як деякий один клас – більш складнішого характеру. І тоді задача знаходження точних значень верхніх граней найкращих наближень лінійних комбінацій класів зводиться до задачі найкращого наближення одного класу, що відповідає згорткам з твірним складеним ядром, яке є відповідною лінійною комбінацією породжуючих ці класи ядер.

У статті розглядається питання відшукування достатніх умов на лінійні комбінації парних та непарних ядер, виконання яких дозволить обчислити точні значення величин найкращих наближень функцій із класів, що подаються згортками з цими комбінаціями парних або непарних функцій.

Результати даної статті стосуються запроваджених О. І. Степанцем класів $L_{\beta}^{\nu} \mathfrak{R} (C_{\beta}^{\nu} \mathfrak{R})$ та їх лінійних комбінацій. Зазначимо, що усі відомі до цього часу точні значення величин найкращих наближень на класах $L_{\beta}^{\nu} \mathfrak{R} (C_{\beta}^{\nu} \mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} \equiv U_1^0 = \{\varphi \in L : \|\varphi\|_1 \leq 1, \varphi \perp 1\}$, ($\mathfrak{R} \equiv U_{\infty}^0 = \{\varphi \in L : \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \varphi \perp 1\}$) були одержані для класів, породжених ядрами, що задовольняють умову Нікольського A_n^* , або навіть більш жорстку ніж A_n^* , умову Надя N_n^* Умови A_n^* , та N_n^* (див., напр. [5]) можна означити так.

Означення 1. Сумовна 2π -періодична функція $K(t)$, яка то-
можливо не дорівнює нулю, задовольняє умову A_n^* , $n \in N$, ($K \in A_n^*$),
якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і до-
датне число $\lambda \leq \frac{\pi}{n}$ такі, що для функції $\varphi_*(t) = \text{sign}(K(t) - T_{n-1}^*(t))$
майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t + \lambda) = -\varphi_*(t)$.

Означення 2. Сумовна 2π -періодична функція $K(t)$, яка то-
можливо не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^* , $n \in N$ ($K \in N_n^*$),
якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і то-
чка $\xi = \xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right)$ такі, що різниця $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на
 $[0, 2\pi)$ у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, і тільки в них.

Зауважимо, що із виконання умови Надя випливає виконання умови Нікольського.

Зокрема, для класичних класів, породжених ядрами Вейля-Надя, виконання умови Надя N_n^* і, як наслідок, знаходження точного значення величини найкращого наближення в рівномірній та інтегральній метриках, встановлено В. К. Дзядиком [2]. Знаходження точного значення величин найкращих наближень окремих лінійних комбінацій функцій із класів Вейля-Надя в рівномірній та інтегральній метриках також детально досліджено в роботах авторів (див., зокрема, [11, 12]) з найкращого наближення функцій із класів, що задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами. Величини найкращого наближення обчислено також і в деяких інших важливих випадках (див., зокрема, [13-16]).

Завдяки функції Крейна досить просто вдається побудувати тригонометричний многочлен, який інтерполює ядро $K(t)$ в $2n$ рівномірно розташованих на періоді точках. Труднощі виникають при доведенні того факту, що більше точок співпадання ядра та многочлена $T_{n-1}^*(t)$ не існує. Власне, всі роботи в даному напрямі присвячені подоланню цієї проблеми. Проте є такі ядра, для яких многочлен $T_{n-1}^*(t)$ співпадає із ядром більше ніж в $2n$ точках на періоді. Тому аналогічно до виконання умови N_n^* запропонуємо таке означення.

Означення 3. Сумовна 2π -періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову $N_{n,p}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 0, 1, \dots$, ($K \in N_{n,p}^*$), якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ і точка $\xi = \xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{n+p}\right)$ такі, що різниця $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0; 2\pi)$ у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n+p}$, $k = 0, 1, \dots, 2n+2p-1$, і лише в них.

Зрозуміло, що ядро, яке задовольняє умову $N_{n,p}^*$, буде задовольняти умову Надя N_{n+p}^* при тригонометричному многочлені степеня $n-1$.

Узагальнена умова Надя та нові достатні умови, які отримали в статті для складених ядер, дають можливість: будувати оптимальні тригонометричні апроксимації для складних класів функцій; точно оцінювати похибку в задачах спектрального моделювання; покращувати ефективність чисельних методів, що базуються на періодичних розвиненнях; розробляти нові фільтри, згортки та інтерполяційні схеми у прикладних алгоритмах.

Постановка задачі. Нехай $K(t)$ – сумовна 2π -періодична функція, а $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{M}_L)$ – клас згорток елементів φ одиничної кулі $U_\infty^0(U_1^0)$ з ядром $K(t)$.

Відомо, що відшукування величини найкращого наближення класу $\mathfrak{M}_c$ тригонометричними многочленами $T_{n-1}(\cdot)$ порядку $n-1$ в рівномірній метриці в силу результатів роботи С. М. Нікольського [5, §6] зводиться до відшукування найкращого наближення ядра $K(t)$ в інтегральній метриці тригонометричними многочленами $T_{n-1}(\cdot)$ порядку $n-1$. А саме, у випадку виконання умови A_n^* для ядра згортки $K(t)$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} E_n(\mathfrak{M}_c)_C &= \sup_{f \in \mathfrak{M}_c} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_C = \\ &= \sup_{\varphi \in U_\infty^0} \inf_{T_{n-1}} \|\varphi * K(\cdot) - T_{n-1}\|_C = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \sup_{f \in \mathfrak{M}_L} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_1 = \sup_{\varphi \in U_1^0} \inf_{T_{n-1}} \|\varphi * K(\cdot) - T_{n-1}\|_1 = \frac{1}{\pi} E_n(K)_1.$$

Б. Надем у 1938 році [4], були знайдені достатні умови того, що многочлен $T_{n-1}^*(t)$ забезпечує найкраще наближення ядра $K(t)$ в метриці L . А саме:

1) якщо коефіцієнти парного ядра $L^c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$ додатні числа і

утворюють спадну до нуля послідовність, яка є тричі монотонною, тобто

$$a_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \Delta a_k \doteq a_k - a_{k+1} \geq 0, \Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) \geq 0, \Delta^3 a_k \geq 0, k \in \mathbb{N},$$

то функція $L^c(t)$ задовольняє умову N_n^* , і тоді

$$E_n(L^c)_1 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{(2k+1)n}}{2k+1};$$

2) якщо коефіцієнти непарного ядра $L^s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$ додатні числа і

утворюють спадну до нуля послідовність, яка є двічі монотонною:

$$b_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0, \Delta b_k \geq 0, \Delta^2 b_k \geq 0, k \in \mathbb{N}, \text{ і } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty, \text{ то функція}$$

$$L^s(t) \text{ задовольняє умову } N_n^*, \text{ і тоді } E_n(L^s)_1 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)n}}{2k+1}.$$

Зрозуміло, що сума ядер, які задовольняють умови 1) або 2), буде ядром, що задовольняє умову Надя N_n^* . Цікавою є задача відшукування величини найкращого наближення в метриці L лінійної комбінації таких ядер, або ж принаймні різниці двох непарних (парних) ядер.

Основні результати. Нехай $\psi_i(k), i = \overline{1, m}$, – деякі послідовності дійсних чисел. У роботі авторів [16] для лінійної комбінації $K(t, \bar{\alpha})$ парних (непарних) ядер Бернуллі знайдені обмеження, при яких ядро $K(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову N_n^* . Застосувавши схему дослідження цієї статті до ядер вигляду

$$\begin{aligned} K^c(t, \bar{\alpha}) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \cos kt = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_i^c(t) \\ \left(K^s(t, \bar{\alpha}) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \sin kt = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_i^s(t) \right), \end{aligned}$$

одержимо твердження.

Теорема 1. Нехай сумовні 2π -періодичні функції $\Psi_i^c(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом порядку не вище $n - 1$ на періоді не більше як в $2n + 2$ точках, многочлен $T_{n-1}^*(t)$ – інтерполює функцію $K^c(t, \bar{\alpha})$ в нулях $\cos nt$,

$\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K^c(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$, $\text{sign } \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign } \Delta_n^*(\pi; \bar{\alpha}) = (-1)^n$, то ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову Надя N_n^* .

Доведення. Якщо різниця $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ перетворюється в нуль не більше як у $2n$ точках на періоді, то, враховуючи нулі функції $\cos nt$ в яких відбувається інтерполяція ядра $K^c(t, \bar{\alpha})$ тригонометричним многочленом $T_{n-1}^*(t)$, приходимо до висновку, що в умовах теореми кількість нулів різниці рівно $2n$. І оскільки це різні точки, то дані нулі є простими, тоді в них відбувається зміна знаку функції $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K^c(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$, тому умова Надя N_n^* , очевидно, виконується, в якій число $\xi_n = \frac{\pi}{2n}$.

Нехай число нулів різниці $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K^c(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$ більше $2n$, тобто згідно умов теореми, неперервності та парності цієї функції (серед многочленів найкращого наближення парної функції доцільно розглядати парні многочлени) рівне $2n + 2$, з них на проміжку $(0; \pi)$

буде $n+1$, зокрема серед цих точок будуть точки $t_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{2n}$, $k = \overline{0; n-1}$. Якщо нуль t_{n+1} відмінний від попередніх, то всі ці нулі на проміжку $(0; \pi)$ будуть простими, тому функція $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ матиме на цьому проміжку число зміни знаку $n+1$, що суперечить умові $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi; \bar{\alpha}) = (-1)^n$. Якщо ж нуль t_{n+1} збігатиметься із якимось із нулів $\cos nt$, то для функції $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ він буде нулем кратності 2, а число зміни знаку функції $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ буде рівне $n-1$, що знову суперечить умові $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi; \bar{\alpha}) = (-1)^n$. Отже, число нулів у $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ не може бути більшим за $2n$ і всі ці нулі є простими, тому, як і в попередньому випадку, умова Надя виконується. **Теорему доведено.**

Аналогічно можна довести таке твердження.

Теорема 2. Нехай сумовні 2π -періодичні функції $\Psi_i^s(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо непарне ядро $K^s(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом порядку не вище $n-1$ на періоді не більше як в $2n+1$ точці, многочлен $T_{n-1}^*(t)$ – інтерполює функцію $K^s(t, \bar{\alpha})$ в нулях $\sin nt$, $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K^s(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$, $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi-0; \bar{\alpha}) = (-1)^{n-1}$, то ядро $K^s(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову Надя N_n^* .

Отже, до ядер із T_1 та T_2 можемо застосувати рівності (1).

Наслідок 1. Якщо ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умови теореми 1, то

$$\begin{aligned} E_n(\mathfrak{M}_c)_c &= \sup_{f \in \mathfrak{M}_c} \inf_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_c = \\ &= E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} \inf_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} E_n(K^c(t, \bar{\alpha}))_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_i[(2k+1)n]}{2k+1} \right|. \end{aligned}$$

Якщо ж ядро $K^s(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умови теореми 2, то

$$E_n(\mathfrak{M}_c)_c = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{1}{\pi} E_n(K^s(t, \bar{\alpha}))_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_i[(2k+1)n]}{2k+1} \right|.$$

Цікавими є випадки лінійних комбінацій $K(t, \bar{\alpha})$, при яких різниця $\Delta_m^*(t, \bar{\alpha})$ перетворюється в нуль у $2n + 2$ точках на періоді при $K^c(t, \bar{\alpha})$ парній функції, та у $2n + 1$ точці на проміжку $(0; 2\pi)$, якщо $K^S(t, \bar{\alpha})$ – непарна функція і при цьому інтерполюючий многочлен має порядок не вище за $n - 1$. Так, зокрема, у випадку виконання протилежної умови до твердження T_1 , а саме, $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi; \bar{\alpha}) = (-1)^{n+1}$, відповідно, до твердження T_2 – $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi-0; \bar{\alpha}) = (-1)^n$, умова Надя N_n^* для ядра $K(t; \bar{\alpha})$ виконуватися не буде, проте матиме місце умова $N_{n,1}^*$. Переконаємося в цьому.

Теорема 3. Нехай сумовні 2π -періодичні функції $\Psi_i^c(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ на періоді не більше як в $(2n + 2) - x$ точках, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ існують числа $\alpha_i^* = \alpha_i^*(n)$, $i = \overline{1; m}$, такі, що ядро $K^c(t, \bar{\alpha}^*)$ задовольняє умову $N_{n,1}^*$, при цьому $\text{sign} \Delta_n^*(0+0; \bar{\alpha}^*) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi; \bar{\alpha}^*) = (-1)^{n+1}$.

Доведення. Проінтерполюємо парне ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ парним тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ степеня $n - 1$ в точках $t_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, тобто в нулях функції $\cos(n+1)t$. Таку процедуру завжди можна здійснити, див., напр., [17, ч. III, г. 1, §5]. Для кожного натурального n знайдеться така лінійна комбінація $K^c(t, \bar{\alpha}^*)$, для якої будуть рівними значення функції $K^c(t, \bar{\alpha}^*)$ та тригонометричного многочлена $T_{n-1}(t)$ в точці $t_{n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}$. А тоді, в силу парності справедливі рівності

$$\Delta_n^*\left(\frac{\pi}{2(n+1)}, \bar{\alpha}^*\right) = \Delta_n^*\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right) = \dots = \Delta_n^*\left(\frac{(4n+3)\pi}{2(n+1)}\right) = 0.$$

Оскільки ядро $K^c(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ на періоді не більше, як в $(2n + 2) - x$ точках, то для неперервної функції $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$

$$\operatorname{sign} \Delta_n^* \left(t, \overline{\alpha^*} \right) = \operatorname{sign} \left[K \left(t, \overline{\alpha^*} \right) - T_{n-1}^*(t) \right] = \pm \operatorname{sign} \cos(n+1)t.$$

Тому ядро $K^c(t, \overline{\alpha^*})$ задовольняє умову $N_{n,1}^*$. Крім того $\operatorname{sign} \Delta_n^*(0+0; \overline{\alpha^*}) \cdot \operatorname{sign} \Delta_n^*(\pi; \overline{\alpha^*}) = (-1)^{n+1}$. Отже, **теорема доведена**.

Аналогічно можемо перекоонатися в справедливості наступного твердження.

Теорема 4. Нехай сумовні 2π -періодичні функції $\Psi_i^s(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо ядро $K^s(t, \overline{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ на проміжку $(0; 2\pi)$ не більше як в $2n+1$ точці, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ існують числа $\alpha_i^* = \alpha_i^*(n)$, $i = \overline{1; m}$, такі, що ядро $K^s(t, \overline{\alpha^*})$ задовольняє умову $N_{n,1}^*$, при цьому $\operatorname{sign} \Delta_n^*(0+0; \overline{\alpha^*}) \cdot \operatorname{sign} \Delta_n^*(\pi-0; \overline{\alpha^*}) = (-1)^n$.

Доведення аналогічне доведенню Т 3: робимо інтерполяцію в точках $\frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, і відповідним підбором коефіцієнтів $\overline{\alpha}$ забезпечуємо інтерполяцію в точці $\frac{n\pi}{n+1}$. Із теорем 3 та 4 і рівності (1) одержимо такий висновок.

Наслідок 2. Якщо ядро $K^c(t, \overline{\alpha^*})$ із теореми 3 задовольняє умову $N_{n,1}^*$, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ для класу $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{M}_L)$ – згортки із цим ядром справедлива рівність

$$E_n(\mathfrak{M}_c)_c = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_i[(2k+1)(n+1)]}{2k+1} \right|.$$

Якщо ядро $K^s(t, \overline{\alpha^*})$ із теореми 4 задовольняє умову $N_{n,1}^*$, то при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(\mathfrak{M}_c)_c = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_i[(2k+1)(n+1)]}{2k+1} \right|.$$

Якщо лінійна комбінація $K^c(t, \overline{\alpha}) \left(K^s(t, \overline{\alpha}) \right)$ містить два доданки, а коефіцієнти вектора $\overline{\alpha}$ вибрати у вигляді $\overline{\alpha} = (1, \alpha)$, то значення α^* , при якому ядро задовольняє умову $N_{n,1}^*$ єдине. Якщо число доданків m більше двох, вказана властивість може місця не мати.

Проілюструємо випадки виконання умов теорем 3 та 4.

- Нехай $K^s(t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^3}$, $n = 2$. У роботі [18] цей приклад розглянуто як частковий випадок (теорема 3, $m = 2$) і показано, що $K^s(t, \alpha^*) \in N_{2,1}^*$. Крім того, із [18] випливає, що маємо п'ять точок інтерполяції $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, можна обчислити, що $\alpha^* = \frac{27}{\pi^2}$, $T_1^*(t) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sin t$. Отже, $\text{sign} \Delta_2^*\left(t, \frac{27}{\pi^2}\right) = \pm \text{sign} \sin 3t$. Між іншим, $\text{sign} \Delta_2^*\left(0+0; \frac{27}{\pi^2}\right) = 1$; оскільки

$$\Delta_n^{*'}\left(\pi; \frac{27}{\pi^2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 0, \text{ то } \text{sign} \Delta_2^*\left(\pi-0; \frac{27}{\pi^2}\right) = 1,$$

тому

$$\text{sign} \Delta_2^*\left(0+0; \frac{27}{\pi^2}\right) \cdot \text{sign} \Delta_2^*\left(\pi-0; \frac{27}{\pi^2}\right) = 1 = (-1)^2.$$

- Нехай

$$K^s(t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \sin kt = \frac{\pi-t}{2} - \alpha \frac{3 \sin t}{10-6 \cos t}$$

$$(0 < \rho < 1), t \in (0, 2\pi), n = 2.$$

Проінтерполювавши многочленом $T_1(t) = b \sin t$ в точці $t = \frac{\pi}{3}$, із рівнянь $\Delta_2^*\left(\frac{\pi}{3}, \alpha\right) = \Delta_2^*\left(\frac{2\pi}{3}, \alpha\right) = 0$ отримуємо $\alpha^* = \frac{91\pi}{54\sqrt{3}}$, $b = -\frac{\pi}{18\sqrt{3}}$.

Аналогічно отримали ті ж самі п'ять точок $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, в

яких різниця $\Delta_2^*(t, \alpha^*)$ перетворюється в нуль. Для того, щоб показати, що різниця $\Delta_2^*(t, \alpha^*)$ не має інших нулів, подамо її у вигляді двох доданків $\Delta_2^*(t, \alpha^*) = \Delta_{2,1}(t) - \alpha^* \Delta_{2,2}(t)$, де $\Delta_{2,1}(t) = \frac{\pi-t}{2} - b_1 \sin t$,

$$\Delta_{2,2}(t) = \frac{3 \sin t}{10-6 \cos t} - b_2 \sin t, \text{ а числа } b_1, b_2 \text{ визначаються із умов рівності нулю відповідних складових в точці } \frac{\pi}{3}: b_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, b_2 = \frac{3}{7}.$$

Кож-

на із вказаних різниць в точці $\pi - 0$ приймає значення $0 - 0$ (оскільки $\Delta_{2,1}(\pi) = \Delta_{2,2}(\pi) = 0$, $\Delta'_{2,1}(\pi) > 0$, $\Delta'_{2,2}(\pi) > 0$). Застосовуючи правило Лопіталя, обчислимо наступну границю

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\Delta_{2,1}(t)}{\alpha^* \Delta_{2,2}(t)} &= \frac{1}{\alpha^*} \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{-\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cos t}{\frac{30 \cos t - 18}{(10 - 6 \cos t)^2} - \frac{3}{7} \cos t} = \frac{1}{\alpha^*} \cdot \frac{112}{27} \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha^*} \cdot \frac{112}{27} \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{32\sqrt{3}}{13\pi} \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \approx 0,9 < 1. \end{aligned}$$

Отже, при $t \rightarrow \pi^-$ $\Delta_2^*(t, \alpha^*) = \Delta_{2,1}(t) - \alpha^* \Delta_{2,2}(t) \rightarrow 0^+$, тому на проміжку $(0, \pi)$ вираз $\Delta_2^*(t, \alpha^*)$ має парну кількість нулів. Якщо припустити, що їх більше двох, то матимемо хоча б чотири, а тоді рівняння $\Delta_2^*(t, \alpha^*) = 0$ на проміжку $(0, 2\pi)$ в силу теореми Ролля матиме не менше 8 коренів. Але в такому випадку рівняння $\frac{1}{2} + b_1 \cos t + \alpha^* \left(\frac{30 \cos t - 18}{(10 - 6 \cos t)^2} - b_2 \cos t \right) = 0$ має хоча б 8 коренів, що неможливо. Максимальне число нулів на періоді тригонометричного многочлена третього порядку – шість. Отже,

$$\text{sign} \Delta_2^* \left(t, \frac{91\pi}{54\sqrt{3}} \right) = \pm \text{sign} \sin 3t.$$

Крім того, як впливає із наведених раніше міркувань

$$\text{sign} \Delta_2^* \left(0 + 0; \frac{91\pi}{54\sqrt{3}} \right) \cdot \text{sign} \Delta_2^* \left(\pi - 0; \frac{91\pi}{54\sqrt{3}} \right) = 1 = (-1)^2.$$

3. А тепер розглянемо різницю парних ядер Бернуллі:

$$K^c(t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^4}, \quad n = 2.$$

Аналогічно до непарного випадку (п.1) можемо довести, застосовуючи теорему Ролля, що ядра такого вигляду парним тригонометричним многочленом можуть інтерполюватися не більше як в $2n + 2$ точках, тобто в нашому випадку в шести на періоді.

Відомо, що (див. [19, с. 726, 776])

$$K^c(t, \alpha) = \frac{1}{12} (3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2) - \alpha \left(-\frac{t^4}{48} + \frac{\pi t^3}{12} - \frac{\pi^2 t^2}{12} + \frac{\pi^4}{90} \right).$$

Нехай інтерполяційний многочлен має вигляд $T_1(t) = b_0 + b_1 \cos t$, а

$$\Delta_2(t, \alpha) = K^c(t, \alpha) - T_1(t). \text{ Система із трьох рівнянь } \Delta_2 \left(\frac{\pi}{6}, \alpha^* \right) = 0,$$

$$\Delta_2\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^*\right) = 0, \quad \Delta_2\left(\frac{5\pi}{6}, \alpha^*\right) = 0 \quad \text{має розв'язком числа } \alpha^* = \frac{1080}{413\pi^2},$$

$$b_0 = \frac{6615}{535248}, \quad b_1 = -\frac{149\pi^2}{1239\sqrt{3}}. \quad \text{Більше нулів інтерполяції не може бути,}$$

$$\text{отже, } \operatorname{sign} \Delta_2\left(t, \frac{1080}{413\pi^2}\right) = \pm \operatorname{sign} \cos 3t.$$

Можемо перекоонатися, що $\Delta_2(0, \alpha^*) > 0$, а $\Delta_2(\pi) < 0$, тому $\operatorname{sign} \Delta_2^*(0; \alpha^*) \cdot \operatorname{sign} \Delta_2^*(\pi; \alpha^*) = (-1)^3$.

Висновки. Одержано достатні умови для лінійних комбінацій парних, а також непарних ядер, для яких виконується «узагальнена» умова Нада $N_{n,1}^*$. При виконанні цих умов обчислено точне значення найкращих наближень класів періодичних функцій, що задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами, що є такими лінійними комбінаціями, в метриках просторів неперервних та інтегровних функцій.

Список використаних джерел:

1. Favard J. Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. 1936. Vol. 203. P. 1122-1124.
2. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Мат. заметки*. 1974. Вып. 16. № 5. С. 691-701.
3. Ахизер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. *Докл. АН СССР*. 1937. Вып. 15. № 3. С. 107-112.
4. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall. *Berichte der math.-phys. Kl. Akad. der Wiss. zu Leipzig*. 1938. Vol. 90. P. 103-134.
5. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1946. Вып. 10. С. 207-256.
6. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1956. Вып. 20. С. 643-648.
7. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1959. Вып. 23. С. 67-92.
8. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами (второе сообщение) *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1961. Вып. 25. С. 143-152.
9. Степанец А. И. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье. *Докл. АН СССР*. 1980. Вып. 254. № 3. С. 543-544.

10. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. 1.
11. Сорич В. А., Сорич Н. М., Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук.-метод. конф. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т, 2004. С. 60-69.
12. Сорич В. А., Сорич Н. М., Нові апроксимаційні ефекти ядер Вейля-Надя, *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. С. 97-109.
13. Бушанский А. В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций. Исследования по теории приближения функций и их приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 29-37.
14. Сердюк А. С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості. *Укр. мат. журн.* 2005. Вип. 57. № 7. С. 946-971.
15. Сердюк А. С. О наилучшем приближении классов сверток периодических функций тригонометрическими полиномами. *Укр. мат. журн.* 1995. Вип. 47. № 9. С. 1261-1265.
16. Сердюк А. С. Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій. *Укр. мат. журн.* 1999. Вип. 51. № 5. С. 674-687.
17. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Москва; Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949.
18. Сердюк А., Сорич В., Сорич Н. Найкраще наближення тригонометричними поліномами класів згорток породжених деякими лінійними комбінаціями періодичних ядер. *Укр. мат. журн.* 2025. Вип. 77. № 5. С. 349-363.
19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды. Москва: Наука, 1981.

THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTION CLASSES GENERATED BY COMPOSITE KERNELS

The set of periodic functions whose essential supremum of the modulus of their r -th derivatives does not exceed one constitutes a class of convolutions of the Bernoulli kernel of order r with elements of the unit ball in the space of summable, essentially bounded periodic functions with zero mean over a period. In 1936, J. Favard obtained exact values for the best approximations of such classes by trigonometric polynomials of order not exceeding $n - 1$ in the uniform metric for every natural n . In further studies, when finding upper bounds of the best approximations of classes of convolutions with fractional Bernoulli kernels, generalized Weyl-Nagy kernels, and Poisson kernels by trigonometric polynomials of a given order, both in uniform and integral metrics were considered. In 1938, the Hungarian mathematician B. Nagy proposed a sufficient condition for a kernel of class of convolutions (the so-called Nagy condition): there exists a trigonometric polynomial of order $n - 1$ that interpolates the kernel at $2n$ uniformly distributed points on the period, and only at those points, with

alternating signs of the difference between the kernel and the polynomial. Satisfying this condition makes it possible to compute the best approximation of the kernel in the integral metric, as well as the best approximation of the corresponding convolution class in both uniform and integral metrics. In 1946, S. Nikolsky generalized Nagy's condition.

Thanks to the results of M. Krein (1938), in most cases it is not difficult to construct a trigonometric polynomial that interpolates a given kernel at $2n$ uniformly spaced points of the period. The main difficulty lies in proving that no additional interpolation points exist. When studying certain kernels, mathematicians encountered the phenomenon that, besides the «guaranteed» $2n$ interpolation points, «extra» interpolation points may appear. This motivated researchers to investigate kernels for which the «standard» Nagy condition fails. The present work takes a step in this direction. We establish several sufficient conditions for linear combinations of even kernels and, likewise, for odd kernels, ensuring that they are interpolated by trigonometric polynomials of order $n - 1$ only at $2n + 2$ uniformly distributed points of the period in the even case, and only at a single uniformly distributed set of $2n + 1$ points in the odd case, with alternating signs of the difference between the linear combination and the polynomial at the interpolation points. Thus, for these cases, polynomials of order $n - 1$ provide the best approximation as if they were polynomials of order n . The paper also presents examples of differences of odd kernels (Bernoulli, Bernoulli and Poisson), as well as differences of even Bernoulli kernels, which illustrate the theorems obtained here. As a consequence, the work also determines the values of the best approximations by trigonometric polynomials of order n for certain classes of convolutions with such linear combinations of odd (even) kernels for which the Nagy condition of order n fails, but the corresponding condition of one order higher holds.

Key words: *best approximation of linear combinations of kernels; Stepanets classes; sufficient Nagy condition.*

Отримано: 30.10.2025