

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.32-53

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО
ЕЛЕМЕНТА ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ТОЧКИ ШТЕЙНЕРА
КІЛЬКОХ ЗАМКНЕНИХ КУЛЬ ДЕЯКОГО ПОЛІНОРМОВАНОГО
ПРОСТОРУ ВІДНОСНО МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ
ОСНОВАНІ НА ДВОЇСТОМУ ПОДАННІ ПОХІДНОЇ
ЗА НАПРЯМОМ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЇЙ ЗАДАЧІ
НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ**

Як відомо (див., наприклад, [1, с. 47]), класична задача Штейнера в лінійному нормованому просторі полягає у відшуванні в заданій множині цього простору такої точки (точки Штейнера), сума відстаней до якої від кожної з кількох фіксованих точок цього простору була б найменшою, тобто не перевищувала суми відстаней заданих точок до будь-якої іншої точки цієї множини.

На практиці доводиться мати справу з, так званими, «зваженими» задачами Штейнера, в яких відстаням, про які йшла мова вище, приписують різні «вагові» характеристики (див., наприклад, [1, с. 47]).

Якщо у «зважений» задачі Штейнера «зважені відстані» між фіксованими точками лінійного нормованого простору і точками його множини замінити на відстані між цими точками, породжені, взагалі кажучи, різними нормами, заданими на розглядуваному лінійному просторі, то отримаємо задачу Штейнера в поліномованому просторі, яка є узагальненням «зваженої» задачі Штейнера (див., наприклад, [2]).

У роботі [2] для випадку, коли множина поліномованого простору, відносно якої розглядається узагальнена задача Штейнера, є опуклою, встановлено співвідношення двоїстості та умови екстремальності допустимого розв'язку цієї задачі, основані на співвідношенні двоїстості, що узагальнюють відомі результати, отримані для задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору (див., наприклад, [3]).

Задача, що розглядається в роботі, отримується внаслідок заміни в узагальненій задачі Штейнера в поліномованому просторі фіксованих точок лінійного над полем дійсних чисел простору замкненими кулями, що визначаються відповідними нормами цього простору. В якості відстаней між отриманими кулями та точками фіксованої множини лінійного простору приймаються гаусдорфові відстані між ними, породжені відповідними нормами.

Ключові слова: *полінормований простір, замкнені кулі полінормованого простору, гаусдорфова відстань, узагальнена точка Штейнера, екстремальний елемент, умови екстремальності елемента.*

Вступ. У статті доведено еквівалентність задачі відшукування узагальної точки Штейнера кількох замкнених куль полінормованого простору відносно множини цього простору деякій задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору. З урахуванням цієї еквівалентності встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого розв'язку розглядуваної задачі відшукування узагальної точки Штейнера кількох замкнених куль полінормованого простору відносно множини цього простору, основані на двоїстому поданні похідної за напрямком її цільової функції.

Постановка задачі. Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i = \overline{1, m}$, – норми, задані на X , $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$ – відповідний полінормований простір; $B_{r_i}(a_i) = \{y \in X : \|y - a_i\|_i \leq r_i\}$, $i = \overline{1, m}$, – замкнені кулі лінійних нормованих просторів $(X, \|\cdot\|_i)$ з центрами у точках $a_i \in X$ та радіусами r_i ; $V \subset X$; для $B_{r_i}(a_i)$ та $x \in V$

$$H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) = \max \left\{ \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \inf_{x \in \{x\}} \|y - x\|_i, \sup_{x \in \{x\}} \inf_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|x - y\|_i \right\} -$$

гаусдорфів відстані між множинами $B_{r_i}(a_i)$ та $\{x\}$, де $x \in X$, лінійного нормованого простору $(X, \|\cdot\|_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Поставимо задачу відшукування величини

$$\alpha_V^*(B_{r_i}(a_i), i = \overline{1, m}) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}). \quad (1)$$

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, для якого

$$\sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x^*\}) = \alpha_V^*(B_{r_i}(a_i), i = \overline{1, m}) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}),$$

то його будемо називати узагальною точкою Штейнера замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i = \overline{1, m}$, полінормованого простору $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$ відносно множини V цього простору або просто екстремальним елементом для величини (1).

Ураховуючи виклад, задачу відшукування величини (1) будемо називати задачею відшукування узагальненої точки Штейнера замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i = \overline{1, m}$, поліномованого простору $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$ відносно множини V цього простору.

Теорема 1. *Справедлива рівність*

$$\alpha_V^*(B_{r_i}(a_i), i = \overline{1, m}) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) = \inf_{x \in V} \left(\sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i + \sum_{i=1}^m r_i \right). \quad (2)$$

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб цей елемент був екстремальним елементом (оптимальним розв'язком) задачі відшукування величини

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i. \quad (3)$$

Доведення. Переконаємося, перш за все, що для $B_{r_i}(a_i)$, $i = \overline{1, m}$, та $x \in X$

$$H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) = \|a_i - x\|_i + r_i. \quad (4)$$

Дійсно, маємо, що

$$\begin{aligned} H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) &= \max \left\{ \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i, \inf_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i \right\} = \\ &= \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо для $i \in \{1, \dots, m\}$ $a_i = x$, то згідно (5)

$$H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) = \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i = r_i = \|a_i - x\|_i + r_i.$$

У цьому випадку рівність (4) доведено.

Розглянемо випадок, коли для $i \in \{1, \dots, m\}$ $a_i \neq x$. Згідно (5)

$$\begin{aligned} H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) &= \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i \leq \\ &\leq \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - a_i\|_i + \|a_i - x\|_i = \|a_i - x\|_i + r_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко переконатися, що точка

$$y_i = x + \left(1 + \frac{r_i}{\|a_i - x\|_i} \right) (a_i - x) \in B_{r_i}(a_i).$$

Тому (див. (5), (6))

$$\|y_i - x\|_i = \|a_i - x\|_i + r_i \leq \sup_{y \in B_{r_i}(a_i)} \|y - x\|_i = H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) \leq \|a_i - x\|_i + r_i.$$

Звідси впливає справедливність рівності (4) у цьому випадку.

Внаслідок рівності (4) виконується рівність (2).

Нехай x^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1). Тоді $x^* \in V$ і для кожного $x \in V$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|a_i - x^*\|_i + \sum_{i=1}^m r_i &= \sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x^*\}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m H_i(B_{r_i}(a_i), \{x\}) = \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i + \sum_{i=1}^m r_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^m \|a_i - x^*\|_i \leq \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i, \quad x \in V. \quad (8)$$

Це означає, що x^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (3).

Навпаки, якщо x^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (3), то $x^* \in V$ і для всіх $x \in V$ має місце нерівність (8). З (8) випливає, що для всіх $x \in V$ справедливі співвідношення (7). Тому x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Позначимо далі через X^m – m -арний декартів (прямий) добуток простору X , тобто $X^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X, i = \overline{1, m}\}$. Покладемо для $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in X^m$, $\alpha \in R$:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m).$$

Легко переконатися, що означені вище операції додавання елементів X^m та множення дійсних чисел на ці елементи задовольняють всім аксіомам лінійного над полем дійсних чисел простору. Отже, X^m є лінійним над полем дійсних чисел простором. Для кожного

$(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ покладемо $\|(x_1, \dots, x_m)\|_{X^m} = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_i$. Легко переконатися, що $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ є лінійним нормованим простором.

Будемо позначати далі: $X_i = (X, \|\cdot\|_i)$, $i = \overline{1, m}$; $X^m = (X^m, \|\cdot\|_{X^m})$;

X_i^* – простір, спряжений з X_i , $i = \overline{1, m}$; $(X^m)^*$ – простір, спряжений з X^m .

Теорема 2 (див., наприклад, [2]). Для того щоб елемент φ належав простору $(X^m)^*$, необхідно і достатньо, щоб існували єдиним способом визначені функціонали $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, такі, що
$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i), \quad (x_1, \dots, x_m) \in X^m, \quad \text{причому справедлива рів-$$

$$\|\varphi\|_{(X^m)^*} = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i\|_{X_i^*}, \quad \text{де} \quad \|\varphi\|_{(X^m)^*} = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \in X^m, \\ (x_1, \dots, x_m) \neq 0}} \frac{\varphi(x_1, \dots, x_m)}{\|(x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}},$$

$$\|f_i\|_{X_i^*} = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{f_i(x)}{\|x\|_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Поряд із задачами відшукування величин (1), (3) будемо розглядати задачу відшукування величини

$$\inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}, \quad (9)$$

де $D = \{(x, \dots, x) \in X^m : x \in V\}$ – діагональ множини $V^m = V \times \dots \times V$.

Зрозуміло, що задача відшукування величини (9) є задачею найкращого наближення елементи $(a_1, \dots, a_m) \in X^m$ множиною $D \subset X^m$ в лінійному нормованому просторі $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$.

Теорема 3. Справедлива рівність

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i = \inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}. \quad (10)$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $(x^*, \dots, x^*) \in D$ був екстремальним елементом для величини (9).

Доведення. Нехай $x \in V$. Тоді $(x, \dots, x) \in D$ та

$$\sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i = \|(a_1, \dots, a_m) - (x, \dots, x)\|_{X^m} \geq \inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}.$$

Тому

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i \geq \inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}. \quad (11)$$

Нехай тепер $(x_1, \dots, x_m) \in D$. Тоді $(x_1, \dots, x_m) = (x, \dots, x)$, де $x \in V$. Внаслідок цього одержуємо, що

$$\begin{aligned} & \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m) \right\|_{X^m} = \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x, \dots, x) \right\|_{X^m} = \\ & = \left\| (a_1 - x, \dots, a_m - x) \right\|_{X^m} = \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i \geq \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i. \end{aligned}$$

Звідси маємо, що

$$\inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m) \right\|_{X^m} \geq \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i. \quad (12)$$

Зі співвідношень (11), (12) випливає справедливність рівності (10).

Нехай тепер $x^* \in V$ та x^* є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 1 x^* є екстремальним елементом для величини (3). З урахуванням цього та (10) одержимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|a_i - x^*\|_i &= \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x^*, \dots, x^*) \right\|_{X^m} = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i = \\ &= \inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m) \right\|_{X^m}, \end{aligned}$$

причому $(x^*, \dots, x^*) \in D$, оскільки $x^* \in V$.

Звідси випливає, що $(x^*, \dots, x^*)$ є екстремальним елементом для величини (9).

Нехай тепер $(x_1^*, \dots, x_m^*) = (x^*, \dots, x^*) \in D$, де $x^* \in V$, є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з (10) одержимо, що

$$\begin{aligned} \inf_{(x_1, \dots, x_m) \in D} \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m) \right\|_{X^m} &= \left\| (a_1, \dots, a_m) - (x^*, \dots, x^*) \right\|_{X^m} = \\ &= \sum_{i=1}^m \|a_i - x^*\|_i = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^m \|a_i - x\|_i. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (3). Відповідно до теореми 1 x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

З теорем 1, 3 випливає, що умови екстремальності елемента $x^* \in V$ для задач (1), (3) та умови екстремальності елемента $(x^*, \dots, x^*) \in D$ для величини (9) співпадають.

Актуальність теми. Актуальність задачі відшукування величини (1) та її екстремального елемента (узагальненої точки Штейнера) випливає зі змісту поняття узагальненої точки Штейнера, оскільки сума гаусдор-

фових відстаней від замкнених куль $B_{r_i}(a_i)$, $i = \overline{1, m}$, поліномованого простору $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$ до цієї точки $x^* \in V$ не перевищує сум гаусдорфових відстаней від цих куль до інших точок множини V .

Задача Штейнера знаходить своє застосування при вирішенні питань оптимального розташування центрів обслуговування, деяких проблем механіки тощо.

Вище встановлено, що задача відшукування величини (1) еквівалентна задачі (3) відшукування точки Штейнера точок a_i , $i = \overline{1, m}$, поліномованого простору $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$, частковими випадками якої є класична задача Штейнера, «зважена» задача Штейнера та ін. Тому актуальність задачі відшукування величини (1) підвищується ще й тим, що отримані при її дослідженні результати можна використати для встановлення відповідних результатів для тих задач, які вкладаються у схему її постановки, зокрема для задачі (3), а також для побудови збіжних чисельних методів розв'язування цих задач.

Допоміжні твердження.

Твердження 1. Нехай $X = (X, \|\cdot\|)$ є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором, X^* – простір, спряжений з $X = (X, \|\cdot\|)$; $a, x^* \in X$; $p(x) = \|a - x\|$, $x \in X$; $\partial p(x^*)$ – субдиференціал функції p в точці x^* (див., наприклад, [4, с. 74]).

Тоді p є опуклою і неперервною на X функцією та:

- 1) $\partial p(x^*) = \left\{ f \in X^* : \|f\| = 1, \max_{\|f\| \leq 1} f(x^* - a) = f(x^* - a) = \|x^* - a\| \right\}^{def} = B_{X^*}^*(x^* - a)$, якщо $x^* \neq a$;
- 2) $\partial p(x^*) = \left\{ f \in X^* : \|f\| \leq 1 \right\}^{def} = B_{X^*}^*$, якщо $x^* = a$.

Доведення. Використовуючи властивості норми, легко переконатися, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in [0; 1]$ має місце співвідношення

$$p((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)p(x_1) + \alpha p(x_2).$$

Тому p є опуклою на X функцією (див., наприклад, [4, с. 56]). Її неперервність на X випливає з нерівності:

$$|p(x_1) - p(x_2)| = \left| \|a - x_1\| - \|a - x_2\| \right| \leq \|a - x_1 - (a - x_2)\| = \|x_1 - x_2\|,$$

яка має місце для всіх $x_1, x_2 \in X$.

Переконаємося у справедливості співвідношень 1), 2) цього твердження.

Припустимо, що $f \in \partial p(x^*)$. Тоді для всіх $x \in X$

$$\begin{aligned} \|x - x^*\| &= \|(x - a) - (x^* - a)\| \geq \|x - a\| - \|x^* - a\| = \\ &= p(x) - p(x^*) \geq f(x - x^*), \end{aligned} \quad (13)$$

$$f(x - x^*) \leq \|x - x^*\|. \quad (14)$$

Покладемо в нерівності (14) $x = x^* + z$, $z \in X$ та $z \neq 0$. Тоді одержимо, що $f(z) \leq \|z\|$, $z \neq 0$. Звідки

$$\|f\| = \sup_{z \neq 0} \frac{f(z)}{\|z\|} \leq 1. \quad (15)$$

Припустимо, що $x^* \neq a$. З нерівності (13) при $x = a$ одержимо, що

$$-\|x^* - a\| \geq f(a - x^*), \quad \|x^* - a\| \leq f(x^* - a), \quad \frac{f(x^* - a)}{\|x^* - a\|} \geq 1. \quad (16)$$

Зі співвідношень (15) та (16) випливає, що $\|f\| = 1 = \frac{f(x^* - a)}{\|x^* - a\|}$,

$f(x^* - a) = \|x^* - a\|$. Тому при $x^* \neq a$ для $f \in \partial p(x^*)$ одержимо, що $\|f\| = 1$, $\|x^* - a\| = \sup_{\|f\| \leq 1} f(x^* - a) = f(x^* - a)$.

Звідси випливає, що $f \in B_{X^*}^*(x^* - a)$. Тому

$$\partial p(x^*) \subset B_{X^*}^*(x^* - a), \text{ якщо } x^* \neq a. \quad (17)$$

Припустимо тепер, що $f \in B_{X^*}^*(x^* - a)$, тобто, що $\|f\| = 1$, $\|x^* - a\| = \max_{\|f\| \leq 1} f(x^* - a) = f(x^* - a)$. Тоді для всіх $x \in X$

$$\begin{aligned} p(x) - p(x^*) &= \|a - x\| - \|a - x^*\| = \|x - a\| - \|x^* - a\| = \\ &= \max_{\|f\| \leq 1} f(x - a) - f(x^* - a) \geq f(x - a) - f(x^* - a) = f(x - x^*). \end{aligned}$$

Тому $f \in \partial p(x^*)$. Отже,

$$B_{X^*}^*(x^* - a) \subset \partial p(x^*), \text{ якщо } x^* \neq a. \quad (18)$$

Зі співвідношень (17) та (18) робимо висновок про справедливості рівності 1) твердження.

Переконаємося у справедливості рівності 2). Нехай $x^* = a$. Тоді для всіх $x \in X$

$$p(x) - p(x^*) = \|a - x\| - \|a - x^*\| = \|x - x^*\| = \max_{\|f\| \leq 1} f(x - x^*) \geq f(x - x^*)$$

для всіх $f \in B_{X^*}^*$.

Тому

$$B_{X^*}^* \subset \partial p(x^*). \quad (19)$$

Нехай $f \in \partial p(x^*)$. Тоді для всіх $x \in X$

$$p(x) - p(x^*) = \|a - x\| - \|a - x^*\| = \|x - x^*\| \geq f(x - x^*).$$

Звідси випливає, що $\|f\| \leq 1$. Тому $f \in B_{X^*}^*$. Отже, встановлено, що

$$\partial p(x^*) \subset B_{X^*}^*. \quad (20)$$

Зі співвідношень (19), (20) випливає справедливості рівності 2) твердження.

Твердження доведено.

Позначимо далі

$$p(x_1, \dots, x_m) = \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m}, \quad (x_1, \dots, x_m) \in X^m;$$

$$p_i(x) = \|a_i - x\|_i, \quad x \in X, \quad i = \overline{1, m}; \quad B_{X_i^*}^* = \left\{ f \in X_i^* : \|f\|_{X_i^*} \leq 1 \right\}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$B_{X_i^*}^*(x^* - a_i) = \left\{ f \in X_i^* : \|f\|_{X_i^*} = 1, \|x^* - a_i\|_i = \max_{f \in B_{X_i^*}^*} f(x^* - a_i) = f(x^* - a_i) \right\},$$

якщо $x^* \in X$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $x^* \neq a_i$.

Наслідок 1. Цільова функція $p(x_1, \dots, x_m)$, $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, задачі відшукування величини (9) є опуклою та неперервною на лінійному нормованому просторі $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$; функції $p_i(x)$ $x \in X$, $i = \overline{1, m}$, є опуклими та неперервними на лінійних нормованих просторах $(X, \|\cdot\|_i)$ відповідно.

Для $x^* \in X$ справедливі співвідношення:

$$1) \text{ якщо для } i \in \{1, \dots, m\} \quad x^* \neq a_i, \text{ то } \partial p_i(x^*) = B_{X_i^*}^*(x^* - a_i);$$

$$2) \text{ якщо для } i \in \{1, \dots, m\} \quad x^* = a_i, \text{ то } \partial p_i(x^*) = B_{X_i^*}^*.$$

Справедливість наслідку випливає з твердження 1.

Похідна за напрямком цільової функції задачі відшукування величини (9). Цільову функцію $p(x_1, \dots, x_m)$, $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, задачі відшукування величини (9), можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_m) &= \|(a_1, \dots, a_m) - (x_1, \dots, x_m)\|_{X^m} = \\ &= \|(a_1 - x_1, \dots, a_m - x_m)\|_{X^m} = \sum_{i=1}^m \|a_i - x_i\|_i = \sum_{i=1}^m p_i(x_i), \quad (x_1, \dots, x_m) \in X^m, \end{aligned} \quad (21)$$

де, як і вище, $p_i(x) = \|a_i - x\|_i$, $x \in X$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 4. Нехай $x^* \in V$, $I_1(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i \neq x^*\}$, $I_2(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i = x^*\}$. Тоді для $(x^*, \dots, x^*) \in D$ та будь-якого $(y_1, \dots, y_m) \in X^m$ справедлива рівність

$$\begin{aligned} p'((x^*, \dots, x^*), (y_1, \dots, y_m)) &= \\ &= \sum_{i \in I_1(x^*)} \max_{f \in B_{x_i^*}^+(x^* - a_i)} f(y_i) + \sum_{i \in I_2(x^*)} \max_{f \in B_{x_i^*}^+} f(y_i) = \\ &= \sum_{i \in I_1(x^*)} \max_{f \in B_{x_i^*}^+(x^* - a_i)} f(y_i) + \sum_{i \in I_2(x^*)} \|y_i\|_i. \end{aligned} \quad (22)$$

Доведення. Згідно з наслідком 1 функція $p(x_1, \dots, x_m)$, $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, є опуклою та неперервною на лінійному нормованому просторі $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$, а функції $p_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{1, m}$, є опуклими та неперервними на лінійних нормованих просторах $(X, \|\cdot\|_i)$.

Тому існують їх скінченні похідні в будь-яких точках лінійних нормованих просторів, на яких ці функції розглядаються, та за будь-якими напрямками цих просторів (див., наприклад, [5, с. 353]).

Нехай $x^* \in V$ і, отже, $(x^*, \dots, x^*) \in D$, а $(y_1, \dots, y_m) \in D$ довільним напрямком простору X^m . Відповідно до зазначеного вище та рівності (21) справедливі такі співвідношення:

$$\begin{aligned} p'((x^*, \dots, x^*), (y_1, \dots, y_m)) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} \frac{p((x^*, \dots, x^*) + t(y_1, \dots, y_m)) - p(x^*, \dots, x^*)}{t} = \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} \frac{p(x^* + ty_1, \dots, x^* + ty_m) - p(x^*, \dots, x^*)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} \frac{\sum_{i=1}^m p_i(x^* + ty_i) - \sum_{i=1}^m p_i(x^*)}{t} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} \frac{p_i(x^* + ty_i) - p_i(x^*)}{t} = \sum_{i=1}^m p_i'(x^*, y_i), \quad (23)$$

де $p'((x^*, \dots, x^*), (y_1, \dots, y_m))$ – похідна функції p в точці $(x^*, \dots, x^*)$ за напрямком $(y_1, \dots, y_m)$, а $p_i'(x^*, y_i)$ – похідна функції p_i в точці x^* за напрямком y_i , $i = \overline{1, m}$.

Відомо (див., наприклад, [5, с. 354]), що

$$p_i'(x^*, y_i) = \max_{f \in \partial p_i(x^*)} f(y_i). \quad (24)$$

Згідно з наслідком 1 $\partial p_i(x^*) = B_{X_i^*}(x^* - a_i)$, якщо $i \in I_1(x^*)$, та $\partial p_i(x^*) = B_{X_i^*}$, якщо $i \in I_2(x^*)$.

З урахуванням цього та рівностей (23), (24) отримаємо співвідношення (22).

Теорему доведено.

Двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукування величини (9). Нехай $x^* \in V$ і, отже, $(x^*, \dots, x^*) \in D$. Позначимо через $Q(x^*, \dots, x^*)$ таку лебегову множину цільової функції p задачі відшукування величини (6) (див. (21)):

$$Q(x^*, \dots, x^*) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m : p(x_1, \dots, x_m) < p(x^*, \dots, x^*)\}.$$

Будемо позначати через $\Gamma(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*))$ – конус внутрішніх напрямків для множини $Q(x^*, \dots, x^*)$ з точки $(x^*, \dots, x^*)$. При цьому точка $(y_1, \dots, y_m) \in X^m$ належить $\Gamma(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*))$, якщо існує окіл $O(y_1, \dots, y_m)$ точки $(y_1, \dots, y_m)$ простору $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ та число $\varepsilon > 0$ такі, що $(x^*, \dots, x^*) + t(z_1, \dots, z_m) \in Q(x^*, \dots, x^*)$ для всіх $t \in (0, \varepsilon)$ та $(z_1, \dots, z_m) \in O(y_1, \dots, y_m)$ (див., наприклад, [5, с.2]).

Теорема 5. Нехай $x^* \in V$ і, отже,

$$\begin{aligned} (x^*, \dots, x^*) \in D, \quad I_1(x^*) &= \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i \neq x^*\}, \\ I_2(x^*) &= \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i = x^*\}, \quad Q(x^*, \dots, x^*) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Справедлива рівність

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(Q\left(x^*, \dots, x^*\right),\left(x^*, \dots, x^*\right)\right)= \\ & =\left\{\left(y_1, \dots, y_m\right) \in X^m: \sum_{i \in I_1\left(x^*\right)} \max _{f \in B_{x_i^*}^*\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right)+\right. \\ & \left.+\sum_{i \in I_2\left(x^*\right)} \max _{f \in B_{x_i^*}^*} f\left(y_i\right)=\sum_{i \in I_1\left(x^*\right)} \max _{f \in B_{x_i^*}^*\left(x^*-a_i\right)} f\left(y_i\right)+\sum_{i \in I_2\left(x^*\right)}\left\|y_i\right\|<0\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Доведення. Оскільки функція $p\left(x_1, \dots, x_m\right),\left(x_1, \dots, x_m\right) \in X^m$, є опуклою та неперервною на лінійному нормованому просторі $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ (див. наслідок 1), то згідно з твердженням 6.9.1 [5, с. 383]

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(Q\left(x^*, \dots, x^*\right),\left(x^*, \dots, x^*\right)\right)= \\ & =\left\{\left(y_1, \dots, y_m\right) \in X^m: \varphi\left(y_1, \dots, y_m\right)<0, \varphi \in \partial p\left(x^*, \dots, x^*\right)\right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Відповідно до теореми 6.4.8 [5, с. 354]

$$p'\left(\left(x^*, \dots, x^*\right),\left(y_1, \dots, y_m\right)\right)=\max _{\varphi \in \partial p\left(x^*, \dots, x^*\right)} \varphi\left(y_1, \dots, y_m\right),\left(y_1, \dots, y_m\right) \in X^m. \quad (27)$$

Зі співвідношень (26), (27) випливає, що

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(Q\left(x^*, \dots, x^*\right),\left(x^*, \dots, x^*\right)\right)= \\ & =\left\{\left(y_1, \dots, y_m\right) \in X^m: p'\left(\left(x^*, \dots, x^*\right),\left(y_1, \dots, y_m\right)\right)<0\right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

З рівностей (22) і (28) одержуємо співвідношення (25).

Теорему доведено.

Конус граничних напрямків для множини D з точки $\left(x^*, \dots, x^*\right) \in D$. В подальшому будемо використовувати також поняття конуса $\Gamma^*\left(D,\left(x^*, \dots, x^*\right)\right)$ граничних напрямків для множини D з точки $\left(x^*, \dots, x^*\right) \in D$. При цьому точка $\left(y_1, \dots, y_m\right) \in\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ належить $\Gamma^*\left(D,\left(x^*, \dots, x^*\right)\right)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого околу $O\left(y_1, \dots, y_m\right)$ точки $\left(y_1, \dots, y_m\right)$ простору $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ та будь-якого числа $\varepsilon>0$ існують точка $\left(z_1, \dots, z_m\right) \in O\left(y_1, \dots, y_m\right)$ та число $\alpha \in(0, \varepsilon)$ такі, що

$$\left(x^*, \dots, x^*\right) + \alpha\left(z_1, \dots, z_m\right) = \left(x^* + \alpha z_1, \dots, x^* + \alpha z_m\right) \in D$$

(див., наприклад, [5, с. 3]).

Справедливе таке твердження.

Твердження 2. Для того щоб точка $(y_1, \dots, y_m)$ належала $\Gamma^*\left(D, \left(x^*, \dots, x^*\right)\right)$, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність точок $x_n \in V$, $n=1, 2, \dots$, та додатна нескінченно мала числова послідовність α_n ($\alpha_n > 0$, $n=1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$) такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} - y_i \right\|_i = 0$, тобто $\frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i$ у розумінні норми $\|\cdot\|_i$, $i = \overline{1, m}$.

Доведення. Необхідність. Нехай точка $(y_1, \dots, y_m)$ із X^m належать $\Gamma^*\left(D, \left(x^*, \dots, x^*\right)\right)$. Візьмемо $\varepsilon_n > 0$, $n=1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Тоді для околу

$$O_n(y_1, \dots, y_m) = \left\{ (z_1, \dots, z_m) : \|(z_1, \dots, z_m) - (y_1, \dots, y_m)\|_{X^m} = \sum_{i=1}^m \|z_i - y_i\|_i < \varepsilon_n \right\}$$

та $\varepsilon_n > 0$ існують $(z_1^n, \dots, z_m^n) \in O_n(y_1, \dots, y_m)$ ($\sum_{i=1}^m \|z_i^n - y_i\|_i < \varepsilon_n$) та

$0 < \alpha_n < \varepsilon_n$ такі, що

$$\left(x^*, \dots, x^*\right) + \alpha_n \left(z_1^n, \dots, z_m^n\right) = \left(x^* + \alpha_n z_1^n, \dots, x^* + \alpha_n z_m^n\right) \in D,$$

тобто існує таке $x_n \in V$, що $x^* + \alpha_n z_1^n = \dots = x^* + \alpha_n z_m^n = x_n$.

Звідси випливає, що $z_i^n = \frac{x_n - x^*}{\alpha_n}$, $i = \overline{1, m}$, причому

$$\sum_{i=1}^m \|z_i^n - y_i\|_i = \sum_{i=1}^m \left\| \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} - y_i \right\|_i < \varepsilon_n, \quad n=1, 2, \dots$$

З урахуванням того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, з останньої нерівності одержуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} = y_i$ у розумінні норми $\|\cdot\|_i$.

Отже, доведено, що коли $(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*\left(D, \left(x^*, \dots, x^*\right)\right)$, то існують такі послідовності $x_n \in V$, $n=1, 2, \dots$, $\alpha_n > 0$, $n=1, 2, \dots$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} - y_i \right\|_i = 0$, тобто, що $\frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i$ у розумінні норми $\|\cdot\|_i$, $i = \overline{1, m}$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для деякої послідовності $x_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$, та додатної нескінченно малої послідовності α_n , $n = 1, 2, \dots$, маємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} - y_i \right\|_i = 0, i = \overline{1, m}, \quad (29)$$

тобто $\frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i$ у розумінні норми $\|\cdot\|_i$. Доведемо, що $(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$.

Вибираємо довільний окіл $O(y_1, \dots, y_m)$ точки $(y_1, \dots, y_m)$ лінійного нормованого простору $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ та число $\varepsilon > 0$. Оскільки внаслідок (29)

$$\left\| \left(\frac{x_n - x^*}{\alpha_n}, \dots, \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \right) - (y_1, \dots, y_m) \right\|_{X^m} = \sum_{i=1}^m \left\| \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} - y_i \right\|_i \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то існує $n_0^1 \in N$, що

$$\left(\frac{x_n - x^*}{\alpha_n}, \dots, \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \right) \in O(y_1, \dots, y_m), \quad n > n_0^1. \quad (30)$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, то існує $n_0^2 \in N$, що

$$0 < \alpha_n < \varepsilon, \quad n > n_0^2. \quad (31)$$

Покладемо $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$. Тоді для $n > n_0$ виконується співвідношення (30), (31). Візьмемо будь-яке $n > n_0$. Згідно з (30), (31)

$$(z_1^n, \dots, z_m^n) = \left(\frac{x_n - x^*}{\alpha_n}, \dots, \frac{x_n - x^*}{\alpha_n} \right) \in O(y_1, \dots, y_m), \quad \alpha_n \in (0, \varepsilon)$$

та

$$\begin{aligned} & (x^*, \dots, x^*) + \alpha_n (z_1^n, \dots, z_m^n) = \\ & = (x^* + \alpha_n z_1^n, \dots, x^* + \alpha_n z_m^n) = (x_n, \dots, x_n) \in D. \end{aligned}$$

Це й означає, що $(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Необхідна умова екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукування величини (1).

Теорема 6. Нехай $x^* \in V$, $I_1(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i \neq x^*\}$, $I_2(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i = x^*\}$. Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом (узагальненою точкою Штейнера) для задачі відшукування величини (1), необхідно, щоб для кожного $y = (y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$ існували функціонали $f_i^y \in B_{x_i}^*$, $i = \overline{1, m}$, такі, що

$$\|x^* - a_i\|_i = \max_{f \in B_{x_i}^*} f(x^* - a_i) = f_i^y(x^* - a_i), \quad i \in I_1(x^*), \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^m f_i^y(y_i) \geq 0. \quad (33)$$

Доведення. Нехай

$$Q(x^*, \dots, x^*) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m : p(x_1, \dots, x_m) < p(x^*, \dots, x^*)\},$$

де, як і вище, p є цільовою функцією задачі відшукування величини (9).

Розглянемо випадок, коли $Q(x^*, \dots, x^*) \neq \emptyset$.

Оскільки функція $p(x_1, \dots, x_m)$, $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$, є опуклою на X^m та неперервною на лінійному нормованому просторі $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ (див. наслідок 1), то згідно з теоремою 1.3.4 [5, с. 10] $\Gamma(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*)) \neq \emptyset$. Внаслідок того, що за умовою теорему x^* є екстремальним елементом для величини (1), $(x^*, \dots, x^*) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$ є екстремальним елементом для величини (9) (див. теорему 3). Звідси випливає, що

$$\Gamma(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*)) \cap \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*)) = \emptyset. \quad (34)$$

Дійсно припустимо, що співвідношення (34) не виконується. Тоді існує $(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$, що

$$(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma\left(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*)\right).$$

Згідно з означенням $\Gamma\left(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*)\right)$ існує окіл $O(y_1, \dots, y_m)$ точки $(y_1, \dots, y_m)$ лінійного нормованого простору $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ та число $\varepsilon > 0$ такі, що

$$\begin{aligned} (x^*, \dots, x^*) + \alpha(z_1, \dots, z_m) &\in Q(x^*, \dots, x^*), \quad \alpha \in (0, \varepsilon), \\ (z_1, \dots, z_m) &\in O(y_1, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (35)$$

Згідно з означенням конуса граничних напрямків $\Gamma^*\left(D, (x^*, \dots, x^*)\right)$ існують $(z'_1, \dots, z'_m) \in O(y_1, \dots, y_m)$ та $\alpha' \in (0, \varepsilon)$ такі, що

$$\begin{aligned} (x', \dots, x') &= (x^*, \dots, x^*) + \alpha'(z'_1, \dots, z'_m) = \\ &= (x^* + \alpha'z'_1, \dots, x^* + \alpha'z'_m) \in D, \text{ де } x' \in V. \end{aligned} \quad (36)$$

З (35) і (36) випливає, що $(x', \dots, x') \in D \cap Q(x^*, \dots, x^*)$.

Тоді

$$\begin{aligned} p(x', \dots, x') &= \|(a_1, \dots, a_m) - (x', \dots, x')\|_{X^m} < \\ &< \|(a_1, \dots, a_m) - (x^*, \dots, x^*)\|_{X^m} = p(x^*, \dots, x^*), \end{aligned}$$

що суперечить екстремальності точки $(x^*, \dots, x^*)$ для величини (9).

Одержана суперечність доводить, що має місце рівність (34). Тому для кожного $y = (y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*\left(D, (x^*, \dots, x^*)\right)$ справедливе співвідношення

$y = (y_1, \dots, y_m) \notin \Gamma\left(Q(x^*, \dots, x^*), (x^*, \dots, x^*)\right)$. Згідно з теоремою 5 тоді

для кожного $y = (y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*\left(D, (x^*, \dots, x^*)\right)$ виконується нерівність:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I_1(x^*)} \max_{f \in B_{X_i^*}^+(x^* - a_i)} f(y_i) + \sum_{i \in I_2(x^*)} \max_{f \in B_{X_i^*}^-(x^*)} f(y_i) = \\ &= \sum_{i \in I_1(x^*)} f_i^y(y_i) + \sum_{i \in I_2(x^*)} f_i^y(y_i) = \sum_{i=1}^m f_i^y(y_i) \geq 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{де } f_i^y \in B_{X_i^*}^+(x^* - a_i), i \in I_1(x^*); f_i^y \in B_{X_i^*}^-(x^*), i \in I_2(x^*). \quad (38)$$

З співвідношення (38) випливає, що функціонали $f_i^y \in B_{X_i^*}^*$, $i = \overline{1, m}$, і для них виконується співвідношення (32), а зі співвідношень (37) випливає, що для цих функціоналів справедлива нерівність (33).

У розглядуваному випадку теорему доведено.

Переконаємося, що теорема справедлива і у випадку, коли $Q(x^*, \dots, x^*) = \emptyset$. У цьому випадку для кожного $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ $p(x_1, \dots, x_m) \geq p(x^*, \dots, x^*)$. Тому для будь-якого $(y_1, \dots, y_m) \in X^m$ та $t > 0$ має місце нерівність $p((x^*, \dots, x^*) + t(y_1, \dots, y_m)) \geq p(x^*, \dots, x^*)$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} p'((x^*, \dots, x^*), (y_1, \dots, y_m)) &= \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ t > 0}} \frac{p((x^*, \dots, x^*) + t(y_1, \dots, y_m)) - p(x^*, \dots, x^*)}{t} \geq 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$(y_1, \dots, y_m) \in X^m.$$

З урахуванням нерівності (39) та теореми 4 робимо висновок, що співвідношення (37), (38) справедливі для всіх $(y_1, \dots, y_m) \in X^m$.

Звідси випливає справедливості співвідношень (32), (33) для всіх $(y_1, \dots, y_m) \in X^m$, зокрема для $(y_1, \dots, y_m) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$.

Теорему доведено.

Достатня умова екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукування величини (1).

Теорема 7. Нехай в задачі відшукування величини (1) $x^* \in V$, $I_1(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i \neq x^*\}$, $I_2(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i = x^*\}$. Якщо для будь-якого $x \in V$ існують функціонали $f_i^x \in B_{X_i^*}^*$, $i = \overline{1, m}$, такі, що

$$\|x^* - a_i\|_i = \max_{f \in B_{X_i^*}^*} f(x^* - a_i) = f_i^x(x^* - a_i), \quad i \in I_1(x^*), \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^m f_i^x(x - x^*) \geq 0, \quad (41)$$

то x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Доведення. Оскільки для будь-якого $x \in V$ функціонали $f_i^x \in B_{X_i^*}^*$, $i = \overline{1, m}$, а для $i \in I_1(x^*)$, крім того, виконуються співвідношення (40), то $f_i^x \in B_{X_i^*}^*(x^* - a_i)$, $i \in I_1(x^*)$.

З урахуванням цього, співвідношення (41) та рівності (22) одержимо, що для всіх $x \in V$

$$\begin{aligned} & p'((x^*, \dots, x^*), (x - x^*, \dots, x - x^*)) = \\ &= \sum_{i \in I_1(x^*)} \max_{f \in B_{x_i^*}^*(x^* - a_i)} f(x - x^*) + \sum_{i \in I_2(x^*)} \max_{f \in B_{x_i^*}^*} f(x - x^*) \geq \\ &\geq \sum_{i \in I_1(x^*)} f_i^x(x - x^*) + \sum_{i \in I_2(x^*)} f_i^x(x - x^*) = \sum_{i=1}^m f_i^x(x - x^*) \geq 0, \end{aligned}$$

тобто для будь-якого $x \in V$

$$p'((x^*, \dots, x^*), (x - x^*, \dots, x - x^*)) = p'((x^*, \dots, x^*), (x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)) \geq 0.$$

Отже, для всіх $x \in V$

$$\begin{aligned} 0 &\leq p'((x^*, \dots, x^*), (x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)) = \\ &= \inf_{t>0} \frac{p((x^*, \dots, x^*) + t((x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*))) - p(x^*, \dots, x^*)}{t} \leq \\ &\leq \frac{p((x^*, \dots, x^*) + 1((x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*))) - p(x^*, \dots, x^*)}{1} = \\ &= p(x, \dots, x) - p(x^*, \dots, x^*). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для всіх $x \in V$ $p(x, \dots, x) \geq p(x^*, \dots, x^*)$. Це означає, що $(x^*, \dots, x^*)$ є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з теоремою 3 x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Критерій екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукування величини (1).

Теорема 8. Нехай в задачі відшукування величини (1) $x^* \in V$ та $D \in \Gamma^*$ -множиною відносно $(x^*, \dots, x^*)$, тобто

$$(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*) = (x - x^*, \dots, x - x^*) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$$

для всіх $(x, \dots, x) \in D$ (для всіх $x \in V$) (див., наприклад, [6]).

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом (узагальненою точкою Штейнера) для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in B_{x_i^*}^*$ $i = \overline{1, m}$, для яких виконуються співвідношення (40), (41) теореми 7.

Доведення. Необхідність. Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1) і $D \in \Gamma^*$ -множиною відносно $(x^*, \dots, x^*)$, тобто для всіх $(x, \dots, x) \in D (x \in V)$

$$(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*) = (x - x^*, \dots, x - x^*) \in \Gamma^* \left(D, (x^*, \dots, x^*) \right).$$

Згідно з теоремою 6 для $y = (x - x^*, \dots, x - x^*) \in \Gamma^* \left(D, (x^*, \dots, x^*) \right)$ існують функціонали $f_i^y = f_i^{(x-x^*, \dots, x-x^*)} = f_i^x \in B_{X_i^*}^*$, $i = \overline{1, m}$, такі, що

$$\|x^* - a_i\|_i = \max_{f \in B_{X_i^*}^*} f(x^* - a_i) = f_i^x(x^* - a_i), \quad i \in I_1(x^*),$$

$$\sum_{i=1}^m f_i^x(x - x^*) \geq 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. В достатності дано, що для будь-якого $x \in V$ існують функціонали $f_i^x \in B_{X_i^*}^*$, $i = \overline{1, m}$, для яких виконуються співвідношення (40), (41) теореми 7. Згідно з цією теоремою x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Як відомо, множину V лінійного над полем дійсних чисел простору X називають:

- 1) Γ -множиною відносно $x^* \in V$, якщо

$$(\forall x \in V)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in (0, \varepsilon)) \quad x^* + \alpha(x - x^*) \in V$$

(див., наприклад, [7]);

- 2) зірковою відносно $x^* \in V$, якщо

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha \in [0, 1])(1 - \alpha)x^* + \alpha x \in V$$

(див., наприклад, [7]);

- 3) опуклою множиною, якщо

$$(\forall x_1, x_2 \in V)(\forall \alpha \in [0, 1])(1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in V$$

(див., наприклад, [4, с. 31]).

Відомо (див., наприклад, [7]), що зіркова відносно $x^* \in V$ множина $V \in \Gamma$ -множиною відносно x^* , а опукла множина $V \in$ зірковою відносно кожного свого елемента.

Наслідок 2. Нехай в задачі відшукування величини (1) $x^* \in V$ та $V \in \Gamma$ -множиною відносно $x^* \in V$ (зірковою відносно x^* , опуклою множиною). Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом (узагальненою точкою Штейнера) для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in B_{X_i}^*$ $i = \overline{1, m}$, для яких виконуються співвідношення (40), (41) теореми 7.

Доведення. Нехай $V \in \Gamma$ -множиною відносно $x^* \in V$. Переконаємося, що $D \in \Gamma^*$ -множиною відносно $(x^*, \dots, x^*)$. Нехай $(x, \dots, x)$ – довільна точка множини D . Розглянемо довільний окіл $O((x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*))$ точки $(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)$ простору $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ та довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $x \in V$ та $V \in \Gamma$ -множиною відносно $x^* \in V$, то існує $\alpha \in (0, \varepsilon)$ таке, що $x^* + \alpha(x - x^*) \in V$. Тому $(x^* + \alpha(x - x^*), \dots, x^* + \alpha(x - x^*)) \in D$. Крім того,

$$\begin{aligned} & (x^* + \alpha(x - x^*), \dots, x^* + \alpha(x - x^*)) = \\ & = (x^*, \dots, x^*) + \alpha((x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)). \end{aligned}$$

Отже, для довільного околу $O((x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*))$ точки $(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)$ простору $(X^m, \|\cdot\|_{X^m})$ та довільного $\varepsilon > 0$, існує точка $(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*)$ цього околу та $\alpha \in (0, \varepsilon)$ такі, що $(x^* + \alpha(x - x^*), \dots, x^* + \alpha(x - x^*)) \in D$.

Це означає, що $(x, \dots, x) - (x^*, \dots, x^*) \in \Gamma^*(D, (x^*, \dots, x^*))$ для всіх $(x, \dots, x) \in D$. Тому $D \in \Gamma^*$ -множиною відносно $(x^*, \dots, x^*)$. За цих умов згідно з теоремою 8 елемент $x^* \in V$ буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in V$ існують функціонали $f_i^x \in B_{X_i}^*$ $i = \overline{1, m}$, для яких виконуються співвідношення (40), (41) теореми 7.

Для цього випадку наслідок доведено.

Справедливість наслідку для зіркової відносно $x^* \in V$ множини V та опуклої множини V випливає з того, що ці множини є Γ -множинами відносно $x^* \in V$.

Наслідок доведено.

Зауважимо, що оскільки відповідно до теореми 1 екстремальні елементи для величин (1) та (3) співпадають, то встановлені вище умови екстремальності елемента $x^* \in V$ для задачі відшукування величини (1) є також умовами екстремальності цього елемента для задачі відшукування величини (3).

Висновки. Для задачі відшукування узагальненої точки Штейнера кількох замкнених куль поліномованого простору відносно множини цього простору встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента цієї задачі.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента узагальної задачі Штейнера в поліномованому просторі, в якій відхилення між елементами визначається з допомогою сублінійних функціоналів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 24. С. 45-63.
2. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальної задачі Штейнера в деякому поліномованому просторі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 29-43.
3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двійності та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 65-77.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112с.
5. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Paris: Herman, 1972. 531 p.
6. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактно-значного відображення множинами неперервних однозначних відображень. *Український математичний журнал*. 2005. Вип. 57. № 12. С. 1601-1619.
7. Гнатюк Ю. В., Гудима У. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень. *Доповіді НАНУ*. 2005. № 6. С. 19-23.

**THE CONDITIONS OF EXTREMALITY OF AN ADMISSIBLE
ELEMENT IN THE PROBLEM OF FINDING A STEINER
POINT OF SEVERAL CLOSED BALLS OF A CERTAIN
POLYNORMED SPACE WITH RESPECT TO A SET
OF THIS SPACE BASED ON THE DUAL REPRESENTATION
OF THE DIRECTIONAL DERIVATIVE OF THE EQUIVALENT
BEST-APPROXIMATION PROBLEM**

As is well known (see, for example, [1, p. 47]), the classical Steiner problem in a linear normed space consists in finding, within a given set of this space, a point (the Steiner point) for which the sum of distances to several fixed points of the space is minimal, that is, does not exceed the sum of distances from the given points to any other point of this set.

In practice, one often encounters the so-called «weighted» Steiner problems, in which the distances mentioned above are assigned various «weight» characteristics (see, for example, [1, p. 47]).

If, in a «weighted» Steiner problem, the «weighted distances» between the fixed points of a linear normed space and the points of its set are replaced by distances generated, generally speaking, by different norms defined on the considered linear space, then we obtain a Steiner problem in a polynormed space, which is a generalization of the «weighted» Steiner problem (see, for example, [2]).

In paper [2], for the case when the set of a polynormed space with respect to which the generalized Steiner problem is considered is convex, duality relations and extremality conditions for an admissible solution of this problem are established. These conditions are based on a duality relation that generalizes the known results obtained for the problem of best approximation of an element of a linear normed space by a convex set of this space (see, for example, [3]).

The problem considered in the present work is obtained by replacing, in the generalized Steiner problem in a polynormed space, the fixed points of a linear space over the field of real numbers with closed balls determined by the corresponding norms of this space. As distances between the resulting balls and the points of a fixed set of the linear space, we take the Hausdorff distances between them generated by the corresponding norms.

Key words: *the polynormed space, the closed balls of a polynormed space, the Hausdorff distance, the generalized Steiner point, the extremal element, the extremality conditions of an element.*

Отримано: 8.12.2025