

УДК 519.1

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.54-66

О. В. Зеленський*, канд. фіз.-мат. наук,**А. Ю. Динич****,**В. С. Брігідіна***,**К. Р. Онищенко*****

*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

** ТОВ «Фаховий передвищий коледж «Оптіма», м Київ,

*** Кам'янець-Подільський ліцей №14, м. Кам'янець-Подільський

РАМСЕЇВСЬКІ ЧИСЛА ДЛЯ ПРЯМОКУТНИКІВ У БАГАТОКОЛЬОРОВИХ РОЗФАРБУВАННЯХ

У статті розглянуто рамсеївський підхід до аналізу дискретних двовимірних структур, у яких за зростання розмірів неминуче виникають регулярні підконфігурації. Вихідною є ідея теорії Рамсея про те, що в достатньо великій системі «повний хаос» неможливий: незалежно від способу побудови обов'язково з'являється впорядкована підструктура. Досліджується багатокольорове заповнення прямокутної ґратки $a \times b$ із заборонаю однотонного осьово-орієнтованого прямокутника, який розглядається як базовий локальний шаблон упорядкування.

Уведено порогові характеристики, що описують межі існування допустимих конфігурацій: встановлюються області параметрів, де заборонений шаблон ще можна уникати (існують контрприкладні), та області, де його поява стає гарантованою для будь-якого розфарбування. Для дво- та трикольорових випадків отримано оцінки, пов'язані з площею максимальних нетривіальних контрприкладів, а також визначено мінімальні за площею прямокутники, які вже не можуть бути контрприкладом. Таким чином, результати задають критичні масштаби, після яких локальна регулярність проявляється неминуче.

Одержані оцінки мають прикладний сенс у задачах, де важливо контролювати появу повторюваних локальних конфігурацій у матричних даних. Зокрема, вони можуть бути використані для математичного моделювання та побудови матриць призначень у схемах розподілу «час-канал» (рядки відповідають часовим слотам, стовпці – каналам або ресурсам, колір – класу/стану), щоб зменшувати небажані повторення та штучні кореляції. Крім того, запропонований підхід придатний для формування контрольованих тестових масивів у задачах виявлення шаблонів у двовимірних даних (матрицях подій, картах спостережень, зображеннях), де потрібна гарантована відсутність заданого типу регулярності до певного порога розмірів.

Ключові слова: *теорія Рамсея, рамсеївські числа, багатокольорові розфарбування.*

Вступ. Досліджується задача рамсеївського типу для двовимірних дискретних структур. Розглядається прямокутна таблиця розміру $a \times b$, клітини якої розфарбовуються у n кольорів, і ставиться питання: за яких параметрів можна уникнути появи чотирьох клітин одного кольору, центри яких утворюють осьово-орієнтований прямокутник. Такий прямокутник інтерпретується як впорядкована підструктура, а конфігурації, де її немає, – як контрприклад, що існують лише до певного «порога» розмірів. Для опису цього порогового явища вводяться характеристики, які фіксують максимальні площі нетривіальних контрприкладів і мінімальні розміри прямокутників, для яких контрприкладів вже неможливі. Далі виконано окремий аналіз двокольорового та трикольорового випадків: наведено конструкції розфарбувань, встановлено відповідні межі та сформульовано наслідки для подальших оцінок при більшій кількості кольорів.

1. Основні означення та результати теорії Рамсея. Розглянемо простий неорієнтований граф без петель і кратних ребер.

Означення 1.1. Нехай $R(a, b)$ – найменше натуральне число n таке, що в будь-якому графі на n вершинах обов'язково знайдеться або повний підграф K_a (тобто a вершин, попарно з'єднаних ребрами), або незалежна множина з b вершин (тобто b вершин без ребер між собою) [2].

Еквівалентно, $R(a, b)$ – найменше n , для якого при будь-якому двокольоровому розфарбуванні ребер повного графа K_n обов'язково існує однотонний підграф K_a першого кольору або однотонний підграф K_b другого кольору [2].

Теорема 1.1. $R(3, 3) = 6$. У будь-якій компанії з шести людей знайдеться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих [4].

Твердження 1.2. Для всіх натуральних a : $R(a, 1) = 1$, $R(a, 2) = a$ [2].

Твердження 1.3. $R(a, b) \leq R(a - 1, b) + R(a, b - 1)$ [2].

Твердження 1.4. $R(a, b) \leq C_{a+b-2}^{a-1}$ [2].

Теорема Рамсея. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує таке натуральне число $R(a, b)$, що при будь-якому розфарбуванні ребер повного графа $K_{R(a, b)}$ у два кольори обов'язково знайдеться або однотонний повний підграф K_a першого кольору, або однотонний повний підграф K_b другого кольору [2].

2. Рамсеївські числа для прямокутників у багатокольорових розфарбуваннях. Розглянемо відому задачу рамсеївського типу.

Задача 2.1. Кожна клітинка нескінченного зошита пофарбована в один із n кольорів. Доведіть, що знайдуться чотири клітинки одного кольору, центри яких утворюють прямокутник зі сторонами, паралельними лініям зошита.

Надалі вважатимемо розмір клітин 1×1 , а прямокутники – осьово-орієнтованими (сторони паралельні до ліній зошита).

Означення 2.1. Позначимо через S_n площу (тобто кількість клітинок) найменшого прямокутника, в якому при довільному n -кольоровому розфарбуванні завжди знайдеться чотири клітинки одного кольору, центри яких утворюють осьово-орієнтований прямокутник.

Означення 2.2. Назвемо контрприкладом прямокутник із n -кольоровим розфарбуванням клітин, у якому немає чотирьох клітинок одного кольору у вершинах осьово-орієнтованого прямокутника.

Лема 2.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді виконується оцінка:
 $S_n \leq (n + 1) \cdot (n^{n+1} + 1)$.

Доведення. Розглянемо прямокутник розміру $(n + 1) \times (n^{n+1} + 1)$. У ньому є $n^{n+1} + 1$ стовпців, кожний висотою $n + 1$ клітинка. Зафіксуємо набір із $n + 1$ горизонтальних рядків. Для кожного стовпця подивимося на «візерунок» кольорів у цих рядках – вектор довжини $n + 1$ над множиною з n кольорів. Таких візерунків не більше, ніж n^{n+1} . Отже, за принципом Діріхле, серед наших $n^{n+1} + 1$ стовпців знайдуться два з однаковим візерунком. У спільному візерунку є $n + 1$ позиція та лише n кольорів, тож знову за принципом Діріхле деякий колір зустрічається принаймні двічі. Це означає, що існують дві різні горизонтальні лінії, на перетинах з кожним із двох вибраних стовпців стоять клітинки одного й того самого кольору. Отже, ми отримали чотири клітинки одного кольору у вершинах осьово-орієнтованого прямокутника. **Лему 2.1 доведено.**

Наслідок (існування числа S_n). Для кожного натурального n число S_n існує, є визначеним і скінченним.

Доведення. За лемою 2.1 існує конкретний прямокутник R_0 розміру $(n + 1) \times (n^{n+1} + 1)$, у якому будь-яке n -кольорове розфарбування вже містить монохроматичний осьово-орієнтований прямокутник.

Позначимо $S = (n + 1) \cdot (n^{n+1} + 1)$. Розглянемо множину M усіх прямокутників з натуральними довжинами сторін, площа яких не перевищує S , та для яких кожне n -розфарбування містить шуканий монохроматичний осьово-орієнтований прямокутник. Оскільки $R_0 \in M$, то множина M не порожня.

Прямокутники з множини M мають натуральні площі, які не перевищують S . Відомо, що з будь-якої непорожньої підмножини натуральних чисел можна вибрати найменший елемент. Позначимо через S_n площу найменшого прямокутника з множини M . Таким чином, S_n існує і є скінченним. **Наслідок доведено.**

Означення 2.3. Позначимо через W_n максимальну площу прямокутника-контрприкладу обидві його сторони строго більші за n , тобто $\min\{a, b\} > n$ для розмірів $a \times b$.

Теорема 2.1. Для кожного $n \geq 2$ виконується $W_n \geq \frac{(n(n+1))^2}{2}$.

Доведення. Побудуємо явний контрприклад розміру $(n+1) \times n C_{n+1}^2$. Розглянемо стовпці висоти $n+1$. Зафіксуємо колір c і неупорядковану пару рядків $\{i, j\}$ ($1 \leq i < j \leq n+1$). Побудуємо стовпець, у якому клітинки на рядках i та j мають колір c , а решта $n-1$ рядків пофарбовані в усі інші $n-1$ кольорів попарно різні. Кількість різних пар $\{i, j\}$ дорівнює C_{n+1}^2 , а різних кольорів – n , отже маємо $n C_{n+1}^2$ стовпців. За цією конструкцією для кожного кольору c і кожної пари рядків $\{i, j\}$ існує рівно один стовпець, де c повторюється на $\{i, j\}$. Зауважимо, що клітинки інших кольорів в стовпці не важливі для нашої конструкції. Тому не існує двох різних стовпців із тією самою парою $\{i, j\}$, пофарбованою в один і той самий колір c . Але саме така ситуація є необхідною і достатньою для появи монохромного прямокутника кольору c (дві однакові позиції в парі рядків на двох стовпцях). Отже, побудований $(n+1) \times (n C_{n+1}^2)$ прямокутник – контрприклад. Його площа дорівнює

$$(n+1) \cdot n C_{n+1}^2 = (n+1) \cdot n \cdot ((n+1)n / 2) = \frac{(n(n+1))^2}{2}.$$

Теорему 2.1 доведено.

Теорема 2.2. Для кожного $n \geq 2$ виконується $S_n \leq (n+1) \times (n \cdot C_{n+1}^2 + 1)$.

Доведення. Розглянемо прямокутник розміру $(n+1) \times (n \cdot C_{n+1}^2 + 1)$. Кожен стовпець довжини $n+1$ містить принаймні одну пару клітин одного кольору (за принципом Діріхле, бо $n+1$ клітин і лише n кольорів). За теоремою 2.1 різних «типів» таких пар – не більше ніж $n \cdot C_{n+1}^2$: тип визначається вибором кольору c та неупорядкованої пари рядків $\{i, j\}$. Оскільки стовпців на один більше, ніж можливих типів, за принципом Діріхле знайдуться два стовпці, що мають однаковий тип (той самий колір на тій самій парі рядків). Тоді чотири відповідні клітинки утворюють монохромний осово-орієнтований прямокутник. **Теорему 2.2 доведено.**

Розфарбування у два кольори.

Лема 2.2. Якщо у прямокутнику 3×5 існує однокольоровий стовпець, то в цьому прямокутнику знайдуться чотири клітинки одного кольору у вершинах осово-орієнтованого прямокутника.

Доведення. Нехай у деякому стовпці всі три клітинки чорні. Якщо в іншому стовпці є щонайменше дві чорні клітинки на тих са-

мих двох рядках, то разом ці два стовпці утворюють чорний прямокутник. Інакше в кожному з решти чотирьох стовпців не більш як одна чорна клітинка, отже принаймні дві білі. Для кожного такого стовпця зафіксуємо пару рядків, у яких стоять білі клітинки. Можливих пар з трьох рядків рівно $C_3^2 = 3$, а стовпців – 4; за принципом Діріхле двом стовпцям відповідає та сама пара, і на цих двох рядках одержуємо білий прямокутник. **Лему 2.2 доведено.**

Лема 2.3. $S_2 \leq 25$.

Доведення. Доведемо, що в квадраті 5×5 будь-якого двокольорового розфарбування завжди є монохроматичний осьово-орієнтований прямокутник. Розглянемо перший рядок; у ньому принаймні три клітинки одного кольору (за принципом Діріхле). Нехай це стовпці c_1, c_2, c_3 і колір – чорний. Розглянемо решту чотири рядки, але лише в стовпцях c_1, c_2, c_3 . Якщо в якомусь із цих рядків у двох із c_1, c_2, c_3 стоять чорні клітинки, то разом із першим рядком маємо чорний прямокутник. Інакше в кожному з чотирьох рядків у c_1, c_2, c_3 не більше однієї чорної, отже принаймні дві білі клітинки. Є лише три пари з $\{c_1, c_2, c_3\}$; тому два рядки збігаються за парою білих, і на цих двох рядках та двох стовпцях маємо білий прямокутник. **Лему 2.3 доведено.**

Теорема 2.3. $S_2 = 21$.

Доведення. Верхня межа $S_2 \leq 21$. З теореми 2.2 маємо загальну оцінку

$$S_n \leq (n+1) \times (n \cdot C_{n+1}^2 + 1),$$

Підставивши $n = 2$, дістаємо:

$$S_2 \leq (2+1) \times (2 \cdot C_{2+1}^2 + 1) = 21.$$

Отже, в 3×7 завжди існує шуканий прямокутник, і $S_2 \leq 21$.

Доведемо, що $S_2 \geq 21$. Для цього покажемо, що всі прямокутники, які складаються менше ніж з 21 клітини, можна розфарбувати так, щоб вони не містили шуканого монохромного прямокутника. Для цього розглянемо декілька варіантів меншої сторони цього прямокутника.

Випадок прямокутник $2 \times n$ (зокрема 2×10): шахівниця

Побудова: рядок 1 – 0101..., рядок 2 – 1010.... Для будь-якого стовпця клітини різного кольору, тож монохромний прямокутник не утворюється.

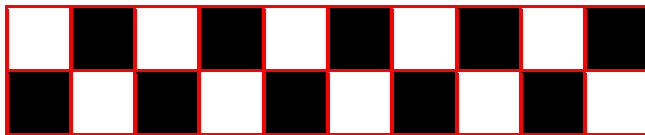


Рис. 1. 2×10 (шахове розфарбування)

Побудуємо контрприклад: 4×6 (усі 4-бітові стовпці ваги 2)

Візьмемо 6 стовпців, кожен із яких має рівно дві одиниці ($C_4^2 = 6$): 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011 (згори вниз читання). Для будь-якої пари рядків існує рівно один стовпець з «11» і рівно один зі «00», отже не буває двох різних стовпців із однаковою парою «11» чи «00», і монохроматичного прямокутника немає.

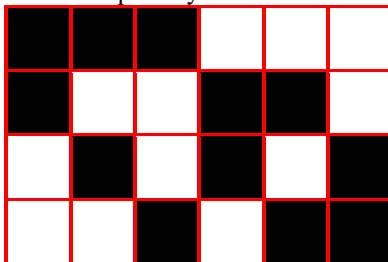


Рис. 2. 4×6 (0 = білий, 1 = чорний, усі стовпці ваги 2)

Побудуємо контрприклад: 3×6 . Якщо з попередньої конструкції вилучити 4-й рядок, дістаємо 3×6 зі стовпцями 110, 101, 100, 011, 010, 001. Для кожної пари рядків «11» і «00» трапляються не більш ніж по одному разу – монохромного прямокутника немає.

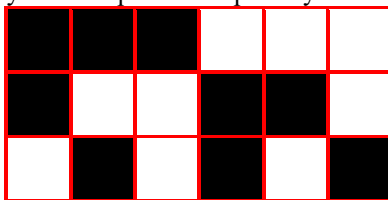


Рис. 3. 3×6 (отримано з 4×6 вилученням рядка)

Побудуємо контрприклад 4×5 як підпрямокутник 4×6 (вилучаємо один стовпець) Вилучивши будь-який один стовпець із 4×6 (наприклад, 1100), отримуємо 4×5 . Для кожної пари рядків тепер щонайбільше один стовпець має «11» і щонайбільше один – «00», отже дублювань, що створюють монохромний прямокутник, не виникає.

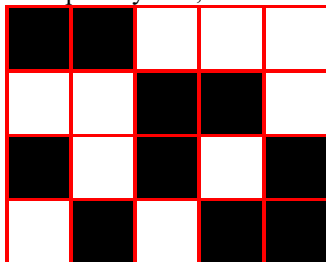


Рис. 4. 4×5 (отримано з 4×6 вилученням стовпця)

Розфарбування прямокутників з площею меншою 21:

- $1 \times n$ – тривіально (немає двох рядків і двох стовпців).
- $2 \times n$ (зокрема 2×10) – шахівниця (рис. 1).
- $3 \times n$ ($n \leq 6$) – підпрямки 3×6 (рис. 3).
- $4 \times n$ ($n \leq 5$) – підпрямки 4×5 (Рис. 4).
- За симетрією $m \times n \leftrightarrow n \times m$ це охоплює всю множину площ $mn \leq 20$.

Кожен прямокутник площею. менше 21 можна розфарбувати так, що він не містить чотири клітинки одного кольору у вершинах осовово-орієнтованого прямокутника.

Отже, поєднавши верхню та нижню межі, маємо $S_2 = 21$. **Теорему 2.3 доведено.**

Теорема 2.4. $W_2 = 24$.

Доведення. За означенням W_2 – це найбільша площа прямокутника-контрприкладу для двох кольорів за умови, що обидві сторони строго більші за 2 (тобто не менші за 3).

1. Існування (нижня межа). У теоремі 2.3 побудовано контрприклад розміру 4×6 (а також симетричний 6×4), тож $W_2 \geq 4 \cdot 6 = 24$.
2. Оптимальність (верхня межа). Покажемо, що контрприкладів площі більше або рівних 25 не існує. Нехай $a \times b$ – прямокутник із $a \leq b$ та $a \geq 3$ і $ab \geq 25$. Розглянемо два підвипадки.

Якщо $a \geq 5$, то прямокутник містить підпрямокутник 5×5 , який не є контрприкладом (за лемою 2.3). Тому $a \times b$ також не є контрприкладом (монотонність за включенням).

Якщо $a \in \{3, 4\}$, то з умови $ab \geq 25$ випливає $b \geq 7$. Такий прямокутник містить підпрямокутник 3×7 , який не є контрприкладом за теоремою 2.3. За монотонністю, $a \times b$ не є контрприкладом.

Отже, жоден прямокутник із мінімальною стороною щонайменше 3 та площею не меншою 25 не є контрприкладом. Звідси $W_2 \leq 24$. Разом з пунктом (1) маємо рівність $W_2 = 24$. **Теорему 2.4 доведено.**

Розфарбування в три кольори.

Теорема 2.5. $S_3 = 76$.

Доведення. Верхня межа $S_3 \leq 76$. З теореми 3 маємо загальну оцінку

$$S_n \leq (n+1) \times (n \cdot C_{n+1}^2 + 1).$$

Підставивши $n = 3$, дістаємо:

$$S_3 \leq (3+1) \times (3 \cdot C_{3+1}^2 + 1) = 76.$$

Отже, в 4×19 завжди існує шуканий прямокутник, і $S_3 \leq 76$.

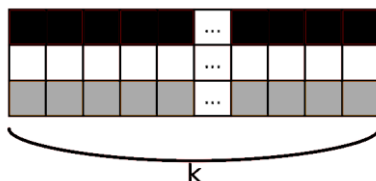
Покажемо, що кожен прямокутник площа якого не перевищує 75 можна розфарбувати в три кольори так, щоб монохроматичного прямокутника не було. Нехай $a \leq b$ та $ab \leq 75$. Якщо $a \geq 9$, то

$ab \geq 9 \cdot 9 = 81$ – неможливо; отже $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Достатньо навести явні контрприкладі для максимальних при фіксованому a розмірів $a \times \lceil 75/a \rceil$; тоді всі менші за b випадки покриваються спадковістю (підпрямокутники контрприкладу теж контрприкладі).

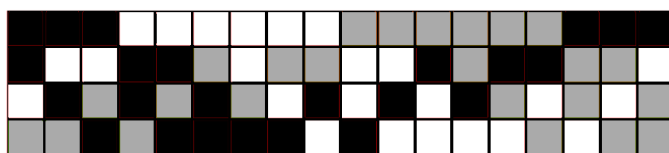
Максимальні розміри при площі не більше ніж 75: Розглянемо декілька варіантів для найменшої сторони прямокутника.

$$a = 3 \rightarrow 3 \times 25; a = 4 \rightarrow 4 \times 18; a = 5 \rightarrow 5 \times 15;$$

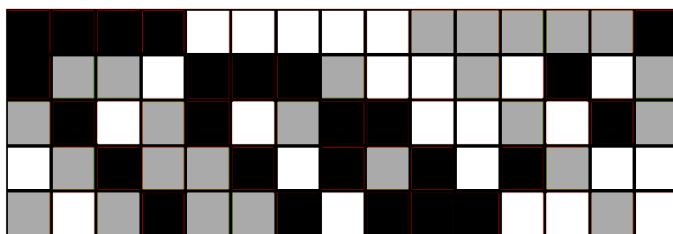
$$a = 6 \rightarrow 6 \times 12; a = 7 \rightarrow 7 \times 10; a = 8 \rightarrow 8 \times 9.$$



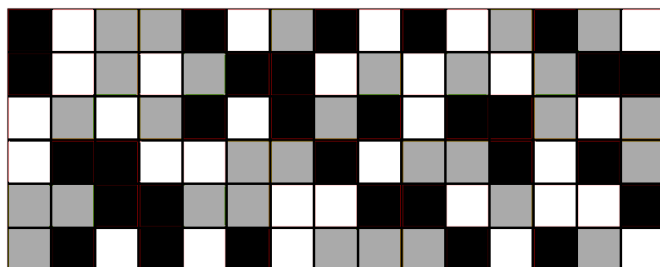
Прямокутник $3 \times k$



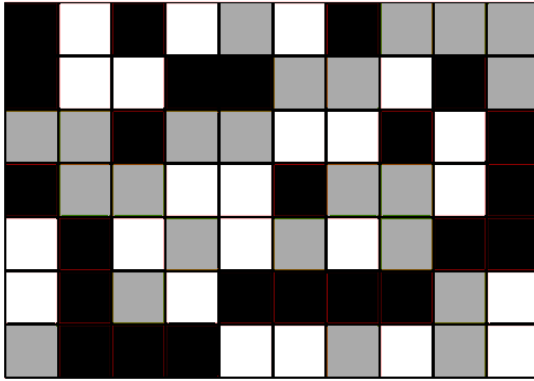
Прямокутник 4×18



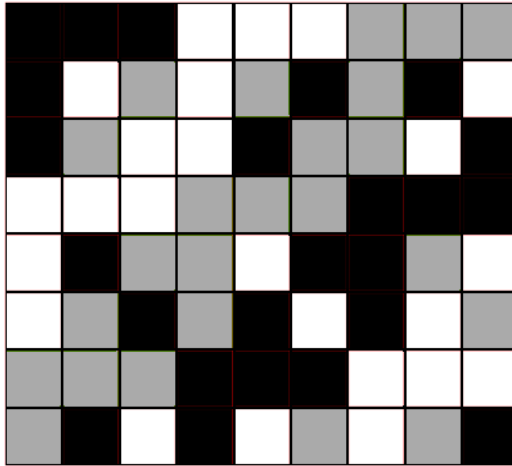
Прямокутник 5×15



Прямокутник 6×15



Прямокутник 7×10



Прямокутник 8×9

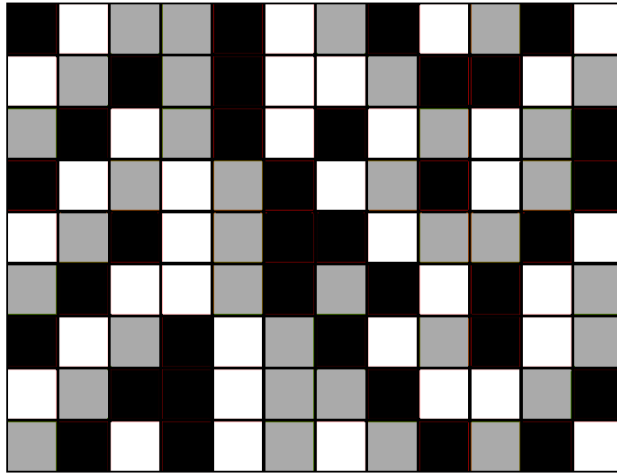
Звідси випливає, що всі прямокутники площі ≤ 75 є 3-розфарбовними без монохромного прямокутника, тобто $S_3 \geq 76$. Поєднавши верхню та нижню межі, отримуємо $S_3 = 76$. **Теорему 2.5. доведено.**

Теорема 2.6. $W_3 = 108$.

Доведення. За означенням, W_3 – це найбільша площа прямокутника-контрприкладу для трьох кольорів за умови, що обидві сторони строго більші за 3

Неважко переконатися, що цей прямокутник є контрприклад (не містить монохроматичний осьово-орієнтований прямокутник) отже $W_3 \geq 9 \cdot 12 = 108$.

Оптимальність (верхня межа). Покажемо, що контрприкладів площі більшою 108 з мінімальною стороною щонайменше 4 не існує.



Контрприклад 9×12

Спершу, з теореми 2.5 випливає, що прямокутник 4×19 гарантовано містить монохроматичний прямокутник; отже 4×19 не є контрприкладом. Тому жоден прямокутник $a \times b$ з $a \geq 4$ та $b \geq 19$ не може бути контрприкладом (оскільки містить підпрямокутник 4×19).

Далі розглянемо наступний граничний формат: 5×16 . Покажемо, що і він не є контрприкладом (а відтак не є ним жоден $a \times b$ з $a \geq 5$, $b \geq 16$).

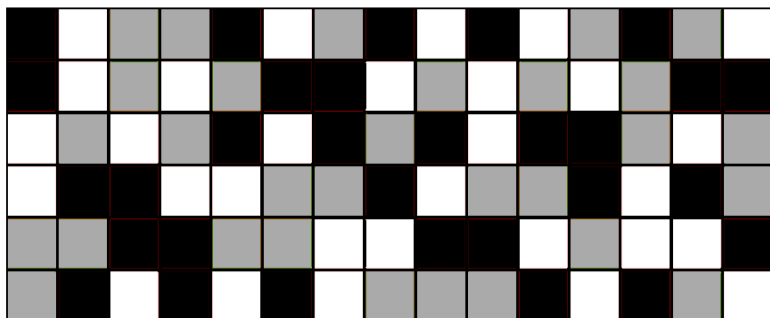
Лема 2.4. *(про пари в одному стовпці висоти 5). У будь-якому стовпці висоти 5, пофарбованому у три кольори, існує принаймні дві монохроматичні пари клітин (тобто сумарно по кольорах не менше двох пар на п'ятьох рядках).*

Доведення. Справді, найменше число пар досягається при розподілі $2 + 2 + 1$ за кольорами; тоді кількість пар дорівнює $C_2^2 + C_2^2 + C_1^2 = 1 + 1 + 0 = 2$. У випадках $3 + 1 + 1$ або $4 + 1 + 0$ або $5 + 0 + 0$ пар тільки більше. **Лему 2.4 доведено.**

У прямокутнику 5×16 маємо 16 стовпців, отже загалом принаймні $16 \cdot 2 = 32$ монохроматичні пари. Кожна пара однозначно задається кольором $c \in \{1, 2, 3\}$ та неупорядкованою парою рядків $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Можливих типів пар рівно $3 \times C_5^2 = 30$. За принципом Діріхле серед наших щонайменше 32 пар знайдуться дві однакові за типом (той самий колір на тій самій парі рядків). Оскільки в

межах одного стовпця для фіксованої пари рядків $\{i, j\}$ і кольору є можливе щонайбільше одне співпадіння, ці дві однакові пари лежать у різних стовпцях і разом утворюють монохроматичний прямокутник. Отже, 5×16 не є контрприкладом.

Аналогічно доведемо, що 6×16 не є контрприкладом. Кожен стовпчик містить мінімум три пари. Тому загальна кількість пар в прямокутнику $3 \times 16 = 48$. Можливих типів пар рівно $3 \times C_6^2 = 45$. За принципом Діріхле серед наших щонайменше 48 пар знайдуться дві однакові за типом, які утворять монохроматичний прямокутник. Зауважимо, що контрприкладом є прямокутник 6×15 . Тобто число 16 в доведенні зменшити не можна.



Доведемо, що 7×13 не є контрприкладом. Кожен стовпчик містить мінімум 5 пар. (A A A B B C C). Тому загальна кількість пар в прямокутнику $5 \times 13 = 65$. Можливих типів пар рівно $3 \times C_7^2 = 63$. За принципом Діріхле серед наших щонайменше 65 пар знайдуться дві однакові за типом, які утворять монохроматичний прямокутник.

Доведемо, що прямокутники 8×13 та 9×13 не є контрприкладами. Прямокутники 8×13 та 9×13 містять прямокутник 7×13 , який не є контрприкладом. Тому прямокутники 8×13 та 9×13 не є контрприкладами.

Лема 2.5. *Прямокутник 10 на 11 не є контрприкладом.*

Доведення. Є 110 клітинок та 3 кольори тому за принципом Діріхле одного кольору не менше 37 клітинок. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що клітинок чорного кольору 37. В прямокутнику 11 стовпців по 10 клітинок в кожному. Розподіляємо клітинки по 11 стовпцям, щоб мінімізувати кількість пар чорних клітинок. Тобто в 4 стовпцям по 4 клітинки та в 7 стовпцям по три клітинки ($4 \times 4 + 3 \times 7 = 37$). Тобто пар чорних клітинок всього $4 \times C_4^2 + 7 \times C_3^2 = 45$.

Усіх можливих пар також $C_{10}^2 = 45$. Тобто, якщо контрприклад існує то він містить всеможливі пари. Отже, кожна пара рядків мусить з'явитись рівно один раз. Оскільки в прямокутнику 10 рядків та 37 чорних клітинок, то існує рядок в якому не більше 3 чорних клітинок. (Бо $4 \times 10 = 40 > 37$). Нехай в першому рядку 4 чорних клітинки. Оскільки всі пари (1, 2), (1, 3), ... (1, 10) мають бути накріті у стовпчиках в яких в першому рядку чорні клітинки знаходиться по 4 клітинки. Наприклад в стовпчиках (1, 2, 3, 4), (1, 5, 6, 7) (1, 8, 9, 10) чорні клітинки. Но є ще один стовпчик, який містить 4 чорних клітинки. Він точно не містить чорну клітинку в першому рядку. Бо одразу утвориться співпадіння пар. Тому за принципом Діріхле принаймні дві чорні клітинки потраплять в одну з множин {2, 3, 4}, {5, 6, 7} {8, 9, 10} та ми одержимо однакові пари, тобто шуканий прямокутник. Отже, Прямокутник 10 на 11 не є контрприкладом. **Лему 2.5. доведено.**

Отже ми довели, що прямокутники 4×19 , 5×16 , 6×16 , 7×13 , 8×13 , 9×13 , 10×11 не є контрприкладами. Будь-який прямокутник з натуральними сторонами більшими за три, та площею більшою за 108 буде містити один з вище перерахованих прямокутників. Тому контрприкладу площею більшою за 108 не існує. Отже, $W_3 = 108$. **Теорему 2.6 доведено.**

Висновки. В роботі досліджено задачу багатокольорових розфарбувань прямокутних таблиць із заборонаю однотонного осьово-орієнтованого прямокутника як прояву локальної регулярності. Для дво та трикольорових випадків визначено межі існування контрприкладів: знайдено максимальні нетривіальні контрприклади за площею та мінімальні прямокутники, які вже не можуть бути контрприкладами. Практичне значення полягає в можливості застосування отриманих конструкцій і оцінок у математичному моделюванні, аналізі та проектуванні двовимірних дискретних структур із контрольованими забороненими шаблонами.

Список використаних джерел:

1. Ramsey F. P. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1930.
2. Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. Ramsey Theory 2nd ed. Wiley, 1990.
3. Radziszowski S. P. Small Ramsey Numbers. Dynamic Survey DS1. *The Electronic Journal of Combinatorics*, revision. 2021. № 16.
4. Diestel R. Graph Theory. 5th ed. Springer, 2017.
5. Suk A. On the Erdős-Szekeres convex polygon problem. *J. Amer. Math. Soc.* 2017. № 30. P. 1041-1068.

RAMSEY NUMBERS FOR RECTANGLES IN MULTICOLOUR COLOURINGS

The article considers a Ramsey-theoretic approach to the analysis of discrete two-dimensional structures in which regular subconfigurations inevitably emerge as the size grows. The starting point is the central idea of Ramsey theory that in a sufficiently large system «complete chaos» is impossible: regardless of how the structure is constructed, an ordered substructure must appear. We study multicolour fillings of a rectangular grid $a \times b$ under the prohibition of a monochromatic axis-aligned rectangle, which is treated as a basic local pattern of order.

Threshold characteristics are introduced to describe the boundaries of existence of admissible configurations: parameter regions are identified where the forbidden pattern can still be avoided (i.e., counterexamples exist), and regions where its appearance is guaranteed for any colouring. For the two- and three-colour cases, we obtain estimates related to the area of the largest nontrivial counterexamples and determine the smallest rectangles (by area) that can no longer be counterexamples. Thus, the results specify critical scales beyond which local regularity becomes unavoidable.

The obtained estimates have practical relevance in problems where it is important to control the emergence of repeating local configurations in matrix data. In particular, they can be used for mathematical modelling and for designing assignment matrices in «time-channel» allocation schemes (rows correspond to time slots, columns to channels or resources, and colours to classes/states) in order to reduce unwanted repetitions and artificial correlations. Moreover, the proposed approach is suitable for generating controlled test arrays in pattern-detection tasks for two-dimensional data (event matrices, observation maps, images), where one needs a guaranteed absence of a specified type of regularity up to a given size threshold.

Key words: *Ramsey theory, Ramsey numbers, multicolour colourings.*

Отримано: 11.12.2025