

УДК 519.624.2:517.988

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.81-92

В. Г. Пархоменко,

М. В. Сидоров, д-р фіз.-мат. наук, професор

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

АНАЛІЗ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДОДАТНИХ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА З МОНОТОННОЮ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

У роботі проведено аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного диференціального рівняння з оператором Гельмгольца.

Область, у якій розглядається задача, є кругом, на межі якого поставлено однорідну першу крайову умову. Характер нелінійності є монотонним, описується степеневою залежністю від шуканої функції, де показник змінюється від 0 до 1. Переходячи до полярних координат і враховуючи, що розв'язок має аксіальну симетрію (тобто залежність від кута повороту відсутня, а наявна лише залежність від відстані до центру круга), отримаємо, крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння. Поліос полярної системи координат є особливою точкою цього рівняння, що приводить до необхідності накласти в цій точці на розв'язок умову обмеженості.

Для задачі будується функція Гріна і здійснюється перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, що розглядається як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі неперервних на відрізку функцій, напівопорядкованому конусом невід'ємних на цьому відрізку функцій. Досліджено властивості відповідного інтегрального оператора такі, як монотонність (ізотонність), додатність, обмеженість і увігнутість

На наступному етапі дослідження знаходяться кінці інваріантного конусного відрізка, що є початковими наближеннями для ітераційного процесу. Після цього будуються два паралельних ітераційних процеси. Перша ітераційна послідовність не спадає за конусом (нижні наближення), а друга – не зростає за конусом (верхні наближення). За поточне наближення на кожній ітерації обирається середнє арифметичне верхнього та нижнього наближень. Отже, на кожному своєму кроці ітераційний процес дає нам апостеріорну оцінку похибки. Зроблено висновок про існування та єдиність додатного аксіально-симетричного розв'язку розглядуваної задачі.

Теоретичні результати, отримані в роботі, було підтверджено шляхом проведення обчислювального експерименту. Проаналізовано залежність розв'язку і швидкість збіжності

ітераційного процесу від параметрів рівняння, що проілюстровано відповідними графіками.

Ключові слова: аксіально-симетричний додатний розв'язок, інваріантний конусний відрізок, інтегральне рівняння Гаммерштейна, крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння, метод двобічних наближень, монотонний оператор, оператор Гельмгольца, функція Гріна.

Вступ. Застосування методів математичного моделювання різноманітних механічних і природних процесів, зокрема, процесів нелінійної теплопровідності, приводить до необхідності знаходження додатних розв'язків крайових задач для напівлінійного еліптичного рівняння вигляду [1]

$$-\Delta u + \kappa^2 u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Якщо область Ω є кругом радіуса R в просторі $\mathbb{R}^2$, то можна поставити задачу знаходження аксіально-симетричного розв'язку рівняння, тобто розв'язку, що залежить лише від $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Тоді вихідна задача для рівняння з частинними похідними зведеться до крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння.

Клас задач для напівлінійних диференціальних рівнянь, у яких можливо знайти точний розв'язок, є дуже обмеженим, тому такі задачі розв'язують чисельно, використовуючи, наприклад, сіткові, варіаційні чи ітераційні методи. Найбільш зручними є ітераційні методи через зручність своєї обчислювальної реалізації, а також через властивість самовиправності. Серед ітераційних методів особливо виділяються методи двобічних наближень, оскільки вони є як універсальним інструментом дослідження існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і надають можливість фактичного їх знаходження. Окрім того, двобічні наближення дозволяють одержати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу, а отже, отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Теоретичним підґрунтям розробки двобічних ітераційних методів є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Ці методи були застосовані до нелінійних диференціальних рівнянь у роботах [3, 10, 11]. В тому числі знаходилися аксіально-симетричні розв'язки, але розглядався випадок напівлінійного рівняння лише з оператором Лапласа, а отже аналогічні задачі для двовимірного простору з оператором Гельмгольца потребують досліджень.

Таким чином, наукова задача вдосконалення існуючих методів двобічних наближень у застосування їх до задачі знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Гельмгольца та степеневою монотонною нелінійністю є актуальною.

Ця стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [2-6, 9-12], в частині їх перенесення на випадок двовимірного напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца і монотонної степеневої нелінійності.

1. Постановка задачі. В одиничному крузі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

розглядатимемо напівлінійне стаціонарне рівняння

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \lambda u^p, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

з однорідною крайовою умовою першого роду (умова Діріхле)

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де $\kappa > 0$, $p > 0$, $\lambda > 0$.

Задача (1), (2) є математичною моделлю стаціонарного процесу теплопровідності за наявності як дисипації (поглинання тепла), так і нелінійного джерела тепла. Тут κ – коефіцієнт втрат тепла, а нелінійність у правій частині задає потужність джерел тепла. Оператор $Lu = \Delta u - \kappa^2 u$ є оператором Гельмгольца.

Поставимо задачу знаходження додатного аксіально-симетричного розв'язку крайової задачі (1), (2).

2. Основна частина. Розв'яжемо задачу (1), (2) за допомогою методу двобічних наближень, заснованого на використанні методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [7, 8].

У задачі (1), (2) перейдемо до полярної системи координат за формулами

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \rho \geq 0.$$

Оператор Гельмгольца у полярній системі координат має вигляд

$$Lu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \kappa^2 u.$$

Оскільки поставлено задачу відшукування аксіально-симетричного розв'язку $u = u(\rho)$ задачі (1), (2), то рівняння (1) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \kappa^2 u = \lambda u^p. \quad (3)$$

Крайова умови (2), задана на колі $|\mathbf{x}| = 1$, зводиться до вигляду

$$u(1) = 0.$$

Оскільки точка $\rho = 0$ є особливою точкою рівняння (3), то ще потрібно поставити умову обмеженості при $\rho = 0$:

$$|u(0)| < +\infty.$$

Таким чином, крайова задача (1), (2) зводиться до крайової задачі

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \kappa^2 u = \lambda u^p, \quad \rho \in (0,1), \quad (4)$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0. \quad (5)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \kappa^2 u = 0$ має вигляд $u = C_1 I_0(\kappa\rho) + C_2 K_0(\kappa\rho)$, де $I_0(z)$ та $K_0(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду відповідно. Умову обмеженості $|u(0)| < +\infty$ буде виконано, якщо обрати $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, тобто крайову умову при $\rho = 0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_1(\rho) = I_0(\kappa\rho)$. Крайову умову $u(1) = 0$ задовольнятиме частинний розв'язок

$$u_2(\rho) = I_0(\kappa)K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa)I_0(\kappa\rho).$$

Визначник Вронського цих функцій дорівнює

$$|W(\rho)| = \begin{vmatrix} u_1(\rho) & u_2(\rho) \\ u_1'(\rho) & u_2'(\rho) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_0(\kappa\rho) & I_0(\kappa)K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa)I_0(\kappa\rho) \\ \kappa I_1(\kappa\rho) & -\kappa(I_0(\kappa)K_1(\kappa\rho) + K_0(\kappa)I_1(\kappa\rho)) \end{vmatrix} = -\frac{I_0(\kappa)}{\rho}.$$

Отже, функція Гріна розглядуваної крайової задачі має вигляд

$$G(\rho, s) = - \begin{cases} \frac{u_1(\rho)u_2(s)}{s|W(s)|}, & 0 \leq \rho \leq s, \\ \frac{u_1(s)u_2(\rho)}{s|W(s)|}, & s < \rho \leq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{I_0(\kappa\rho)[I_0(\kappa)K_0(\kappa s) - K_0(\kappa)I_0(\kappa s)]}{I_0(\kappa)}, & 0 \leq \rho \leq s, \\ \frac{I_0(\kappa s)[I_0(\kappa)K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa)I_0(\kappa\rho)]}{I_0(\kappa)}, & s < \rho \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Функція Гріна (6) є додатною; її графік зображено на рис. 1.

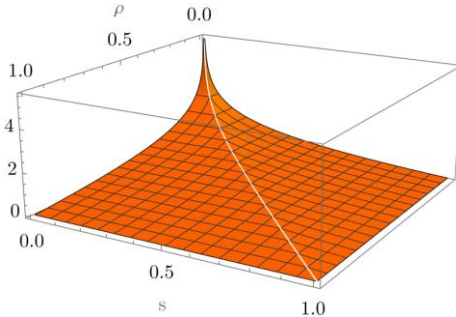


Рис. 1. Графік функції Гріна $G(\rho, s)$

Тоді задача (4), (5) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\rho) = \lambda \int_0^1 Q(\rho, s) u^p(s) ds, \quad (7)$$

де $Q(\rho, s) = sG(\rho, s)$.

Означення. Узагальненим розв'язком крайової задачі (4), (5) назвемо функцію $u^* \in C[0, 1]$, що є розв'язком інтегрального рівняння (7).

У сенсі даного означення розуміється еквівалентність крайової задачі (4), (5) і інтегрального рівняння (7).

Пов'яжемо з рівнянням (7) нелінійний інтегральний оператор, що діє у просторі $C[0, 1]$ за наступним правилом:

$$T(u)(\rho) = \int_0^1 Q(\rho, s) u^p(s) ds. \quad (8)$$

Тоді рівняння (7) можна подати у вигляді $u = \lambda T(u)$. Дане рівняння розглядатимемо в банаховому просторі $C[0, 1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $C[0, 1]$ функцій [7, 8, 11].

Властивості оператора T досліджуються аналогічно, як це було проведено в [2, 10], і має місце наступна лема.

Лема. Оператор T , що діє за правилом (8), має такі властивості:

- а) є додатним оператором;
- б) є монотонним оператором для $p > 0$;
- в) є увігнутим і навіть u_0 -увігнутим для $p \in (0, 1)$, де

$$u_0(\rho) = \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{I_0(\kappa \rho)}{I_0(\kappa)} \right).$$

Нехай $K(u_0)$ – множина тих елементів $u \in K_+$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$. Оскільки оператор T перетворює конус K_+ в $K(u_0)$, то кінці інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0, \quad w_0 = \beta u_0.$$

Тоді умови $\lambda T(v_0) \geq v_0$, $\lambda T(w_0) \leq w_0$, що визначають кінці інваріантного конусного відрізка, приводять до наступних нерівностей для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$):

$$\lambda \alpha^p \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^p(s) ds \geq \alpha u_0(\rho) \quad \text{для всіх } \rho \in [0, 1], \quad (9)$$

$$\lambda \beta^p \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^p(s) ds \leq \beta u_0(\rho) \text{ для всіх } \rho \in [0, 1]. \quad (10)$$

Нерівності (9) і (10) можуть бути зведені до вигляду

$$\alpha^{1-p} \leq \lambda m, \quad \beta^{1-p} \geq \lambda M, \quad (11)$$

$$\text{де } m = \min_{\rho \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^p(s) ds, \quad M = \max_{\rho \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^p(s) ds.$$

Знаходимо, що

$$m = \frac{\kappa^{1-2p}}{I_0^p(\kappa)} \int_0^1 s I_0(\kappa s) [I_0(\kappa) - I_0(\kappa s)]^p ds,$$

$$M = \frac{\kappa^{2-2p}}{(I_0(\kappa) - 1) I_0^p(\kappa)} \int_0^1 s [I_0(\kappa) K_0(\kappa s) - K_0(\kappa) I_0(\kappa s)] [I_0(\kappa) - I_0(\kappa s)]^p ds.$$

Тоді з нерівностей (11) знаходимо, що

$$\alpha \leq (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta \geq (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}}. \quad (12)$$

Кінці інваріантного конусного відрізка обиратимемо за початкові наближення при реалізації ітераційного процесу, а отже, для його швидшої збіжності слід обрати максимальне значення α і мінімальне значення β , що задовольняють нерівності (12). Таким чином, остаточно одержимо, що для кінців $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ інваріантного конусного відрізка оберемо значення

$$\alpha = (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \quad \beta = (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}},$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Для крайової задачі (4), (5) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(\rho) = \lambda \int_0^1 Q(\rho, s) [v^{(n-1)}(s)]^p ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$w^{(n)}(\rho) = \lambda \int_0^1 Q(\rho, s) [w^{(n-1)}(s)]^p ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$v^{(0)}(\rho) = \alpha u_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = \beta u_0(\rho). \quad (15)$$

З огляду на властивості оператора T можна зробити висновок, що ітераційний процес (13)-(15) з двох боків збігається до єдиного в

конусі K_+ додатного розв'язку крайової задачі (4), (5). А саме має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$ – одиничний круг в $\mathbb{R}^2$. *Крайова задача*

$$\begin{aligned} -\Delta u + \kappa^2 u &= \lambda u^p, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

при $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ має єдиний додатний аксіально-симетричний розв'язок

$$u^*(\rho) = u^*\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою (13)-(15).

Двобічна збіжність послідовних наближень (13)-(15) розуміється у сенсі виконання ланцюга нерівностей

$$\begin{aligned} \alpha u_0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \\ &\leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} \leq \beta u_0. \end{aligned}$$

З огляду на двобічний характер процесу (13)-(15) ітерації слід проводити до виконання умови

$$\frac{1}{2} \max_{\rho \in [0, 1]} (w^{(k)}(\rho) - v^{(k)}(\rho)) < \varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\rho) \approx u^{(k)}(\rho) = \frac{w^{(k)}(\rho) + v^{(k)}(\rho)}{2}.$$

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4), (5) при $p = 0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9$ та $\lambda = 1, 2, 3$, $\kappa = 1$.

При $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $\kappa = 1$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій. При цьому $\|u^{(7)}\| = 0,03136$.

На рис. 2 зображено графіки верхніх $w^{(k)}(\rho)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\rho)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 3 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\rho)$, на рис. 4 – графік функції $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, а на рис. 5 – лінії рівня (з кроком 0,005) функції

$u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. В таблиці 1 наведено як зменшується апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку при $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $\kappa = 1$.

На рис. 6 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $p \in (0,1)$ для значень $\lambda = 1, 2, 3$ при фіксованому значенні параметра $\kappa = 1$. Як бачимо, зі збільшенням λ збільшується і норма розв'язку крайової задачі, але з наближенням p до 1 норма прямує до нуля. При фіксованому ж значенні параметра $\lambda = 1$ зі збільшенням параметра κ , норми наближених розв'язків зменшуються (рис. 7).

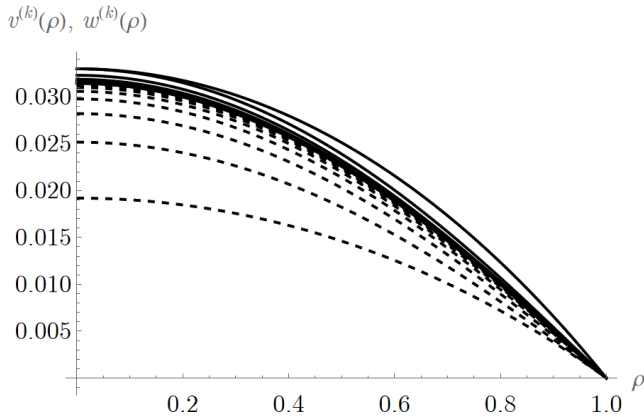


Рис. 2. Графіки верхніх і нижніх наближень

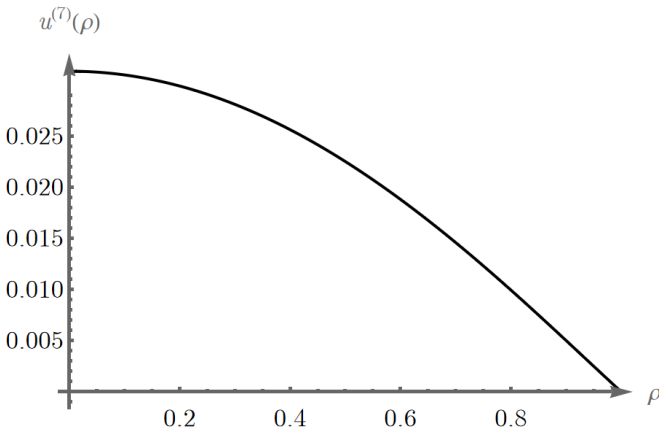


Рис. 3. Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\rho)$

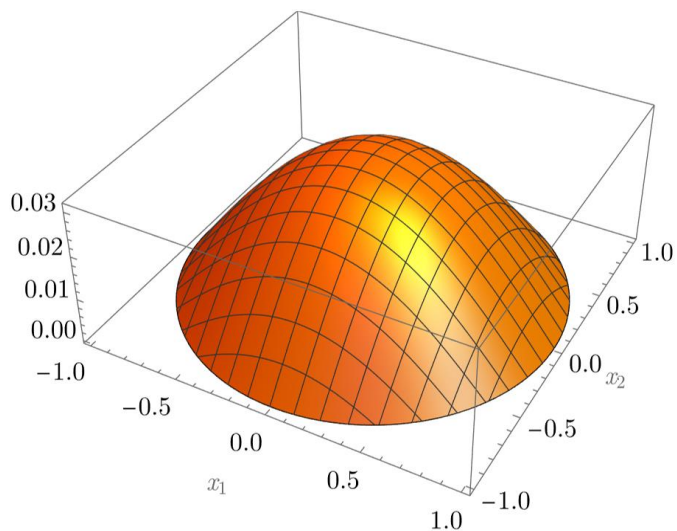


Рис. 4. Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

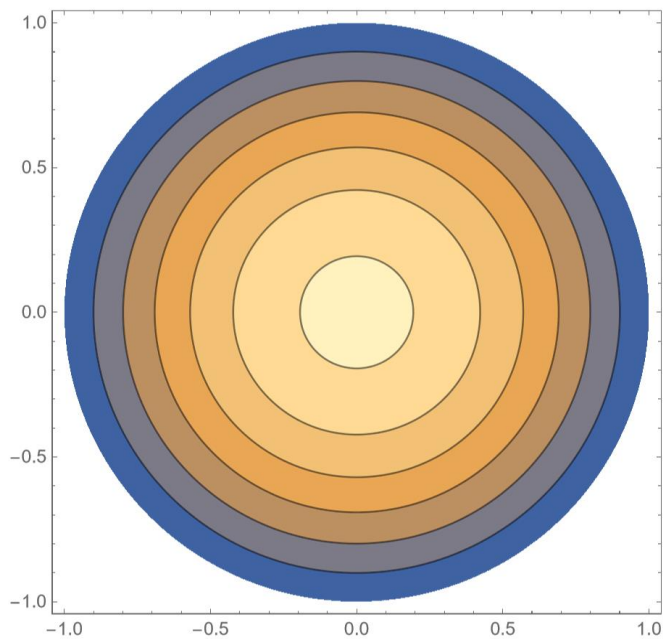


Рис. 5. Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

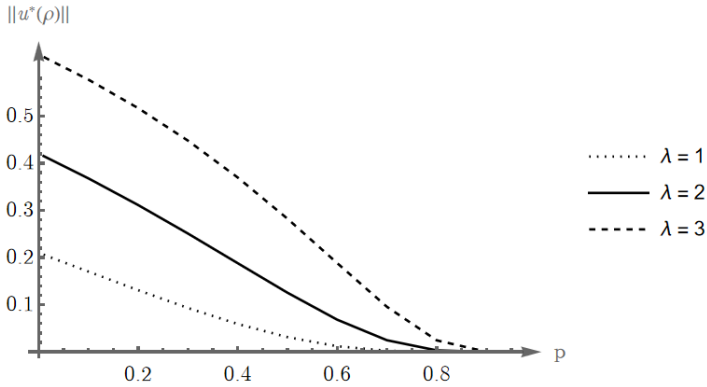


Рис. 6. Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра ρ , $\lambda = 1, 2, 3$, $\kappa = 1$

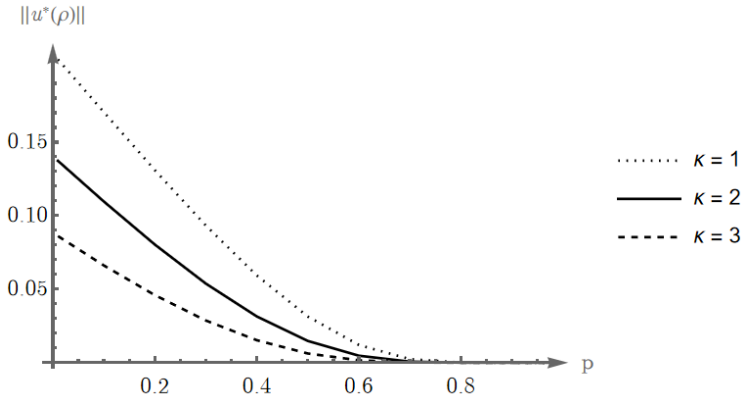


Рис. 7. Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра ρ , $\kappa = 1, 2, 3$, $\lambda = 1$

Таблиця 1

Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку на k -й ітерації

Номер ітерації k	1	2	3	4
$\varepsilon^{(k)}$	$0,39 \cdot 10^{-2}$	$0,20 \cdot 10^{-2}$	$0,10 \cdot 10^{-2}$	$0,53 \cdot 10^{-3}$
Номер ітерації k	5	6	7	
$\varepsilon^{(k)}$	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$	

Висновки. У статті вперше досліджено застосовність методу двобічних наближень до знаходження аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного

рівняння з оператором Гельмгольца. Результати, що було одержано в роботі, можна поширити на рівняння з іншими видами нелінійностей, іншим характером монотонності та крайовими умовами інших типів. Окрім того, отримані результати застосовні для розв'язування прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фізико-механічних полів в нелінійних середовищах. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Список використаних джерел:

1. Chang X., Liu M., Yan D. Normalized Ground State Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations Involving Exponential Critical Growth. *The Journal of Geometric Analysis*. 2023. Vol. 33, Article № 83. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12220-022-01130-8>.
2. Пархоменко В. Г. Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. № 25. С. 121-133. DOI: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.121-133>.
3. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіoeлектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
4. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107-120.
5. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35-42.
6. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радіoeлектроніка та інформатика*. 2013. № 3 (62). С. 28-31.
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
8. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
9. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Матеріали XXVIII Міжнародного молодіжного форуму «Радіoeлектроніка і молодь у XXI столітті»* (Харків, ХНУРЕ, 16-18 квітня 2024). Т. 7. С. 259-261.
10. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радіoeлектроніка та інформатика*. 2019. № 3 (86). С. 16-23.
11. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіoeлектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-6>.

12. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. 2018. № 3 (99). С. 78-91. DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS-2018-3-460>.

**ANALYSIS BY THE METHOD OF TWO-SIDED
APPROXIMATIONS OF POSITIVE AXIALLY SYMMETRIC
SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE HELMHOLTZ EQUATION
WITH A MONOTONE POWER NONLINEARITY**

The paper presents an analysis, using the method of two-sided approximations, of positive axially symmetric solutions to the first boundary value problem for a semilinear elliptic differential equation with the Helmholtz operator.

The domain in which the problem is considered is a disk, on the boundary of which a homogeneous first boundary condition is imposed. The nonlinearity is monotone and is described by a power dependence on the unknown function, where the exponent varies from 0 to 1. By passing to polar coordinates and taking into account that the solution is axially symmetric (that is, it does not depend on the angular variable and depends only on the distance from the center of the disk), we obtain a boundary value problem for a semilinear ordinary differential equation. The pole of the polar coordinate system is a singular point of this equation, which necessitates imposing a boundedness condition on the solution at this point.

For the boundary value problem, a Green's function is constructed and a transition is made to an equivalent Hammerstein integral equation, which is considered as a nonlinear operator equation in a Banach space of functions continuous on an interval, semi-ordered by the cone of nonnegative functions on this interval. The properties of the corresponding integral operator, such as monotonicity (isotonicity), positivity, boundedness, and concavity are investigated.

At the next stage of the study, the endpoints of an invariant conical segment are determined, which serve as initial approximations for the iterative process. After that, two parallel iterative processes are constructed. The first iterative sequence is nondecreasing with respect to the cone (lower approximations), while the second is nonincreasing with respect to the cone (upper approximations). At each iteration, the current approximation is chosen as the arithmetic mean of the upper and lower approximations. Thus, at each step, the iterative process provides an a posteriori error estimate. As a result, the existence and uniqueness of a positive axially symmetric solution to the considered problem are established.

The theoretical results obtained in the paper were confirmed by conducting a computational experiment. The dependence of the solution and the convergence rate of the iterative process on the parameters of the equation were analyzed and illustrated by the corresponding graphs.

Key words: *axially symmetric positive solution, boundary value problem for a semilinear elliptic equation, Green's function, Hammerstein integral equation, Helmholtz operator, invariant conical segment, method of two-sided approximations, monotone operator.*

Отримано: 14.12.2025