

УДК 517.927.4:517.988.8

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.93-106

А. В. Савченко,

М. І. Гвоздєв

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО АНАЛІЗУ СТАТИЧНОГО ПРОГИНУ ПРУЖНОЇ БАЛКИ З РІЗНИМИ ТИПАМИ ЗАКРІПЛЕННЯ КІНЦІВ В МОДЕЛІ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглядається крайова задача для напівлінійного диференціального рівняння четвертого порядку, що описує статичний прогин балки в мікроелектромеханічних системах (МЕМС) під дією електростатичних сил. Розглянуто різні типи закріплення кінців балки: жорстке закріплення (умови Діріхле) та шарнірне обпирання (умови Нав'є).

Для розв'язання відповідної крайової задачі запропоновано застосувати метод двобічних наближень, побудований на використанні відповідних функцій Гріна. Вибір методу обґрунтовано його здатністю не лише будувати наближений розв'язок, а й теоретично встановлювати умови існування розв'язку вихідної задачі разом із отриманням зручної апостеріорної оцінки похибки.

В основі дослідження лежить зведення крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна, аналіз якого проведено методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Побудовано ітераційний процес знаходження додатного розв'язку та визначено умови, за яких гарантується двобічна збіжність наближень. Для аналізу ефективності алгоритму проведено низку обчислювальних експериментів для різних значень параметрів системи. Виконано порівняльний аналіз отриманих результатів. Досліджено зміну максимального прогину балки та проаналізовано вплив крайових умов на стійкість системи.

Новизна роботи полягає у розробці та застосуванні схеми методу двобічних наближень до рівнянь четвертого порядку, що моделюють прогин балок у МЕМС з різними типами закріплення. Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні мікроперемикачів, газових датчиків, мікропінджетів та інших компонентів сучасної мікросистемної техніки для прогнозування їхньої статичної поведінки та оптимізації робочих параметрів. Також отримані у роботі результати можна розповсюдити на дво- та тривимірні задачі, а також (у комбінації з методом Рунге) розповсюдити на нестационарний випадок.

Ключові слова: балка, жорстке закріплення, задача Діріхле, задача Нав'є, ізотонний оператор, інваріантний конусний

відрізок, крайова задача, математичне моделювання, мікроелектромеханічна система, метод двобічних наближень, прогин, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна, чисельні методи, шарнірне обпирання.

Вступ. Мікроелектромеханічні системи (МЕМС) є класом пристроїв, що інтегрують механічні елементи, сенсори, актюатори та електроніку на спільній кремнієвій підкладці мікрометрового масштабу. За останні десятиліття технологія МЕМС здійснила революцію в споживчій електроніці, автомобільній промисловості, медицині та аерокосмічній галузі. Від перших акселерометрів для систем подушок безпеки до складних мікродзеркальних матриць для проєкційних систем – еволюція цих пристроїв нерозривно пов'язана з вдосконаленням математичних моделей, що описують їх поведінку.

Ключовим елементом багатьох МЕМС є балка – пружний елемент, підвішений над нерухомим електродом. Зокрема, балки використовуються у газових датчиках, актюаторах, електростатичних гребінчастих приводах, мікропінцетах, мікроклапанах та мікроперемикачах [1-8].

Прикладання електричної напруги до такої системи створює різницю потенціалів, що приводить до виникнення електростатичної сили притягання (сили Кулона). Ця сила деформує балку, зменшуючи зазор між електродами, що, в свою чергу, збільшує ємність системи та саму силу. Математичною моделлю даного процесу є диференціальне рівняння четвертого порядку з нелінійною правою частиною. Наявність нелінійності унеможливорює безпосереднє застосування аналітичних методів до розв'язання задачі, а тому виникає потреба у розробці відповідних чисельних методів, зокрема ітераційних методів з двобічним характером збіжності. Теоретичним підґрунтям цих методів є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [9, 10]. Зауважимо, що для дослідження математичних моделей МЕМС відомі застосування методу скінченних елементів [11, 12], методу Гальоркіна [13, 14] тощо, але всі вони не дають змогу отримати умови існування розв'язку вихідної задачі та не мають зручної апостеріорної оцінку похибки наближеного розв'язку. Двобічні ітераційні методи у аналізі МЕМС використовувались, наприклад, у роботах [15, 16], але в них як математична модель розглядалася крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння другого порядку. Отже, актуальною науковою задачею є розробка методів цього класу застосовно до крайових задач для диференціальних рівнянь четвертого порядку, що і визначає мету даної роботи.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння, що виникає при математичному моделюванні прогину балки у МЕМС, вигляду

$$u^{IV}(x) - \kappa^2 u''(x) = \frac{\lambda}{(1-u(x))^2}, \quad x \in (-1; 1), \quad (1)$$

де $u(x)$ – величина прогину балки, $\kappa^2 \geq 0$ – коефіцієнт, що характеризує механічний натяг, λ – коефіцієнт, що прямо пропорційний квадрату прикладеної напружки. При цьому $0 \leq u(x) \leq 1$ для всіх $x \in [-1; 1]$.

Зауважимо, що вказана модель виникає при дослідженні стаціонарного процесу і є одновимірним випадком моделі, наведеної в [17].

Для отримання єдиного розв'язку рівняння (1) необхідно доповнити його крайовими умовами, які відображають спосіб закріплення кінців балки. Крайові умови виникають безпосередньо з фізичної постановки задачі. Вони формуються на основі геометричних обмежень, силових умов, особливостей технологічного виготовлення МЕМС тощо.

У роботі пропонується розглянути два типи крайових умов – умову Діріхле

$$u(-1) = u'(-1) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0; \quad (2)$$

та умову Нав'є

$$u(-1) = u''(-1) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 0. \quad (3)$$

Умови (2) означають, що обидва кінці балки жорстко закріплені (дорівнюють нулю прогин та кут повороту), а умови (3) означають, що балка шарнірно обпирається (дорівнюють нулю прогин та згинаючий момент або кривина) [7, 8].

Метод розв'язання. До розв'язання задачі (1), (2) та (1), (3) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Функція Гріна крайової задачі (1), (2) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{A_1(x)B_1(s) - C_1(s)D_1(x)}{2\kappa^3(\kappa \operatorname{ch} \kappa - \operatorname{sh} \kappa)}, & -1 \leq x \leq s, \\ \frac{A_1(s)B_1(x) - C_1(x)D_1(s)}{2\kappa^3(\kappa \operatorname{ch} \kappa - \operatorname{sh} \kappa)}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \operatorname{ch} \kappa(1+x) - 1, \\ B_1(x) &= (\kappa \cdot \operatorname{cth} \kappa - 1)(\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \kappa x - \kappa(1-x) \sin \kappa), \\ C_1(x) &= \kappa(x-1) \operatorname{ch} \kappa + \operatorname{sh} \kappa - \operatorname{sh} \kappa x, \\ D_1(x) &= \kappa(x + \operatorname{ch} \kappa(1+x)) - \operatorname{sh} \kappa(1+x). \end{aligned}$$

Функція Гріна крайової задачі (1), (3) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} A_2(x)B_2(s) - C_2(x)D_2(s), & -1 \leq x \leq s, \\ A_2(s)B_2(x) - C_2(s)D_2(x), & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

де

$$A_2(x) = \frac{1+x}{2\kappa^2}, \quad B_2(x) = 1-x, \quad C_2(x) = \frac{\operatorname{sh} \kappa(1+x)}{\kappa^3 \operatorname{sh} 2\kappa}, \quad D(x) = \operatorname{sh} \kappa(1-x).$$

Функції Гріна задачі (1), (2) та задачі (1), (3) є невід'ємними, що перевіряється безпосередньо.

Таким чином, задача (1), (2) та задача (1), (3) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x,s)}{(1-u(s))^2} ds. \quad (6)$$

Рівняння (6) розглядатимемо у банаховому просторі $C[-1; 1]$ функцій, неперервних на відрізку $[-1; 1]$. Норма у $C[-1; 1]$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{x \in [-1; 1]} |u(x)|$. У просторі $C[-1; 1]$ виділимо конус невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{u \in C[-1; 1] : u(x) \geq 0, x \in [-1; 1]\}$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) чи крайової задачі (1), (3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, що є розв'язком інтегрального рівняння (6).

З рівнянням (6) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[-1; 1]$ за правилом

$$T(u)(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x,s)}{(1-u(s))^2} ds. \quad (7)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (6) матиме вигляд $u = T(u)$. Очевидно, що оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$.

Функція $f(x, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2}$ є неперервною і додатною для $x \in [-1; 1]$, $0 < u < 1$, монотонно зростає за u , а отже, інтегральний оператор (7) буде ізотонним.

Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, який є апіорною оцінкою невідомого розв'язку u^* . Оскільки $f(0) = \lambda > 0$, то шукатимемо його у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де $0 < \beta < 1$. Тоді умови, що виділяють інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\begin{aligned} \lambda \int_{-1}^1 G(x,s) ds &\geq 0 \quad \text{для всіх } x \in [-1; 1], \\ \frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{-1}^1 G(x,s) ds &\leq \beta \quad \text{для всіх } x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Оскільки функція Гріна $G(x, s)$ вигляду (4) або (5) є невід'ємною, то перша нерівність завжди виконуватиметься, а другу можемо записати у вигляді

$$\frac{\lambda M}{(1-\beta)^2} \leq \beta, \quad (8)$$

$$\text{де } M = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) ds.$$

Для функції Гріна вигляду (4) знаходимо, що

$$M = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) ds = \frac{\kappa - 2 \operatorname{cth} \kappa + 2 \operatorname{csch} \kappa}{2\kappa^3}.$$

На рисунку 1 наведено множини розв'язків нерівності (8) для різних значень κ для функції Гріна (4) в залежності від λ .

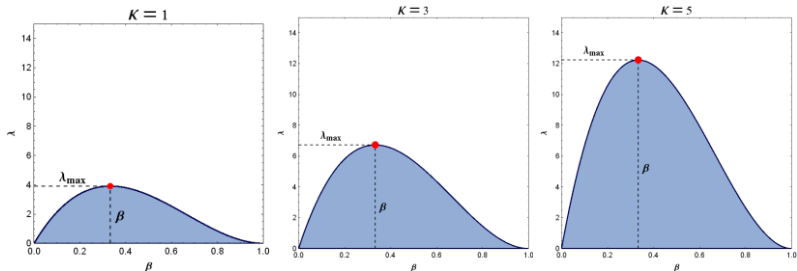


Рис. 1. Множина розв'язків нерівності (8) для різних значень κ та функції Гріна (4)

Для функції Гріна вигляду (5) знаходимо, що

$$M = \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) ds = \frac{(1-x^2)\kappa^2 + 2 \operatorname{ch} \kappa x \operatorname{sch} \kappa - 2}{2\kappa^4}.$$

На рисунку 2 наведено множини розв'язків нерівності (8) для різних значень κ для функції Гріна (5) в залежності від λ .

Як бачимо з рисунку 1 та рисунку 2, розглядувана нерівність має розв'язки лише при $\lambda \leq \lambda_{\max} = \frac{4}{27M}$. При цьому значенню

$\lambda_{\max} = \frac{4}{27M}$ відповідає єдине значення $\beta = \frac{1}{3}$, а при $\lambda < \frac{4}{27M}$ множина розв'язків для β утворює інтервал $(\underline{\beta}, \bar{\beta})$, де $\underline{\beta}$ і $\bar{\beta}$ – відповідно найменший та найбільший з коренів рівняння

$$\lambda M = \beta(1-\beta)^2 \quad (9)$$

на інтервалі $(0; 1)$, причому $\underline{\beta} < \frac{1}{3}$. Оскільки для швидшої збіжності ітерацій треба брати якомога менше значення β , то слід обрати $\beta = \underline{\beta}$.

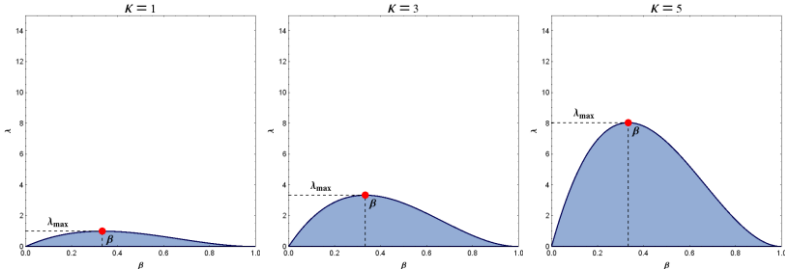


Рис. 2. Множина розв'язків нерівності (8) для різних значень κ та функції Гріна (5)

Також зауважимо, що з рисунку 1 та рисунку 2 бачимо, що при однакових значеннях κ для збіжності ітераційного процесу для задачі Діріхле можемо обирати більші, порівняно з задачею Нав'є, значення коефіцієнта $\lambda_{\max}$, що відповідає за прикладену напругу.

Ітераційний процес сформулюємо за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{(1 - v^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{G(x, s)}{(1 - w^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = w_0(x) = \beta. \quad (12)$$

Перевіримо, за яких умов ітераційний процес (10)-(12) двобічно збігається до єдиного на $< 0, \beta >$ додатного розв'язку задачі (1), (2) чи задачі (1), (3).

При $0 < v, w < \beta$ справедлива нерівність

$$|f(x, w) - f(x, v)| = \left| \frac{\lambda}{(1 - v)^2} - \frac{\lambda}{(1 - w)^2} \right| \leq L |w - v|,$$

$$\text{де } L = \frac{2\lambda}{(1 - \underline{\beta})^3}.$$

Тоді

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = \|T(w^{(k)}) - T(v^{(k)})\| = \max_{x \in [-1; 1]} [T(w^{(k)})(x) - T(v^{(k)})(x)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{x \in [-1; 1]} \int_{-1}^1 G(x, s) [f(s, w^{(k)}(s)) - f(s, v^{(k)}(s))] ds \leq \\
&\leq LM \max_{x \in [-1; 1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді рівність $v^* = w^*$ виконується, якщо $\gamma = LM < 1$. Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо рівняння (9) має розв'язок $\beta \in (0; 1)$ і $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} < 1$, то крайова задача (1), (2) чи крайова задача (1), (3) має єдиний на $< 0, \beta >$ додатний розв'язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (10)-(12).*

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено для параметрів $\kappa = 3$, $\lambda = 3$.

Для задачі (1), (2)

$$M = \frac{e^6 + 4e^3 - 5}{54(e^6 - 1)} \approx 0,022032.$$

Зауважимо, що при виборі параметра $\kappa = 3$ отримуємо

$$\lambda_{\max} = \frac{8(e^6 - 1)}{e^6 + 4e^3 - 5} \approx 6,724365.$$

Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $< 0, \beta >$, де β визначається з рівності (9). Обчисливши, отримуємо, що $\beta = 0,257909$.

Тоді $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0,1685... < 1$, а отже, виконана умова збіжності

ітераційного процесу відповідно до теореми 1.

Задаємо точність $\varepsilon = 10^{-4}$. Проводимо ітераційний процес (10)-(12). Процес зійшовся із заданою точністю за три ітерації. На рисунку 3 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень, $k = 0, 1, 2, 3$. На рисунку 4 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(3)}(x)$.

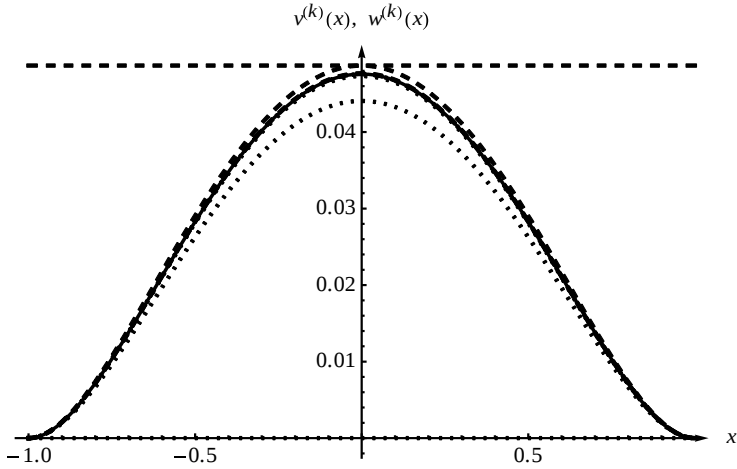


Рис. 3. Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (пунктирна лінія) наближень для $k = 0, 1, 2, 3$

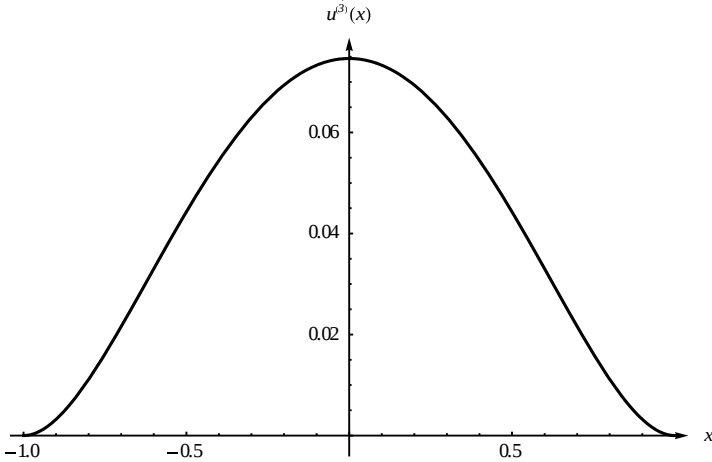


Рис. 4. Графік наближеного розв'язку $u^{(3)}(x)$

Дослідимо залежність прогину балки від значення параметра λ при $\kappa = 3$. У таблиці 1 наведено значення параметра λ , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки ε та значення максимального відхилення балки $u_{\max}$ для задачі (1), (2).

На рисунку 5 наведено графіки наближених розв'язків $u(x)$ для різних значень параметра λ при $\kappa = 3$.

Таблиця 1

Значення параметра λ , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки ε та значення максимального відхилення балки $u_{\max}$ для задачі (1), (2)

λ	N	ε	$u_{\max}$
1	2	$0,19 \cdot 10^{-4}$	0,02284
2	3	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,04758
3	3	$0,92 \cdot 10^{-4}$	0,07465
4	4	$0,71 \cdot 10^{-4}$	0,10489
5	5	$0,86 \cdot 10^{-4}$	0,13948
6	7	$0,64 \cdot 10^{-4}$	0,18076

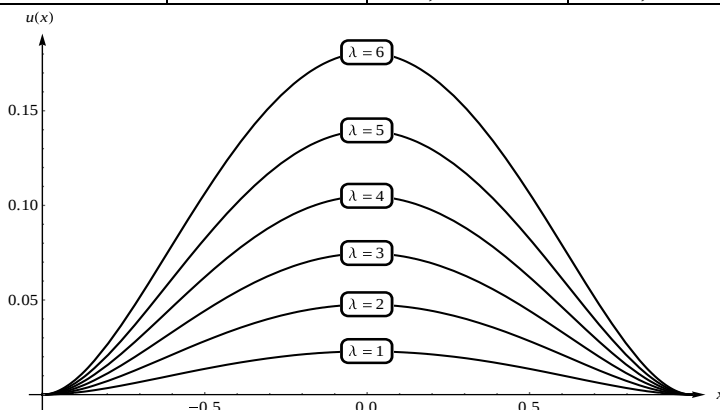


Рис. 5. Графіки наближених розв'язків $u(x)$ для різних значень параметра λ

З таблиці 1 та рисунку 5 бачимо, що при збільшенні значення параметра λ , що відповідає за прикладену напругу, відхилення балки збільшується, що узгоджується з фізикою перебігу розглядуваного процесу.

Для задачі (1), (3)

$$M = \frac{1}{162} \left(7 + \frac{4e^3}{1+e^6} \right) \approx 0,044436.$$

Зауважимо, що при виборі параметра $\kappa = 3$ отримуємо

$$\lambda_{\max} = \frac{24(e^6 + 1)}{7e^6 + 4e^3 + 7} \approx 3,333956.$$

Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $\langle 0, \beta \rangle$, де β визначається з рівності (9). Обчисливши, отримуємо, що $\beta = 0,217986$.

Тоді $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0,5575... < 1$, а отже, виконана умова збіжності

ітераційного процесу відповідно до теореми 1.

Задаємо точність $\varepsilon = 10^{-4}$. Проводимо ітераційний процес (10)-(12). Процес зійшовся із заданою точністю за сім ітерацій. На рисунку 6 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень, $k = 0, 1, \dots, 7$. На рисунку 7 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(x)$.

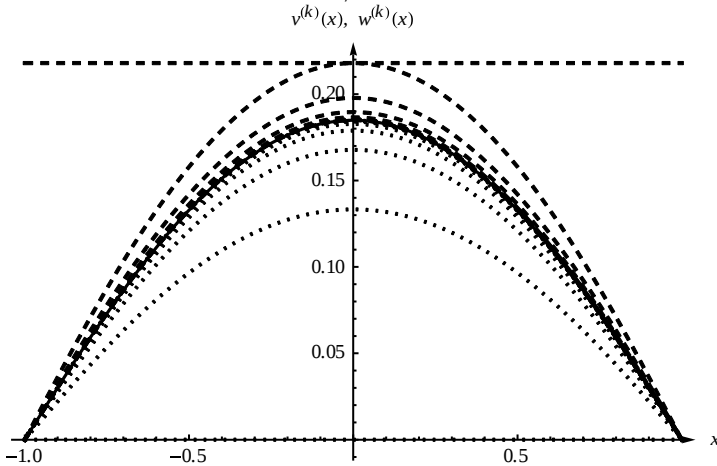


Рис. 6. Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (пунктирна лінія) наближень для $k = 0, 1, \dots, 7$

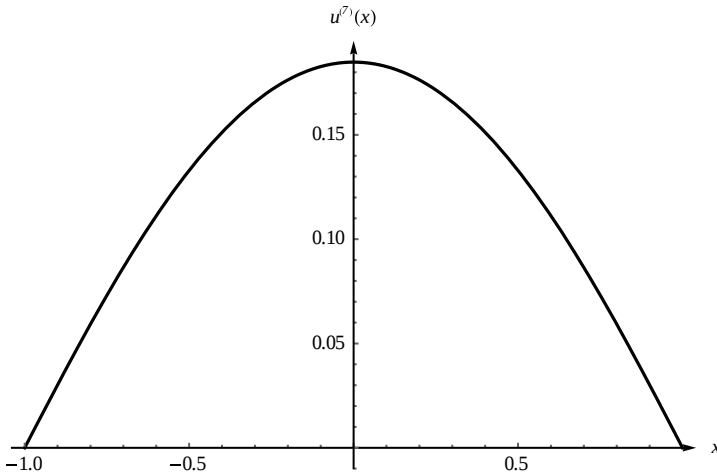


Рис. 7. Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(x)$

Дослідимо залежність прогину балки від значення параметра λ при $\kappa = 3$. У таблиці 2 наведено значення параметра λ , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки ε та значення максимального відхилення балки $u_{\max}$ для задачі (1), (3).

Таблиця 2

Значення параметра λ , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки ε та значення максимального відхилення балки $u_{\max}$ для задачі (1), (3)

λ	N	ε	$u_{\max}$
1	3	$0,15 \cdot 10^{-4}$	0,04809
2	4	$0,81 \cdot 10^{-4}$	0,10643
3	7	$0,88 \cdot 10^{-4}$	0,18487

На рисунку 8 наведено графіки наближених розв'язків $u(x)$ для різних значень параметра λ при $\kappa = 3$.

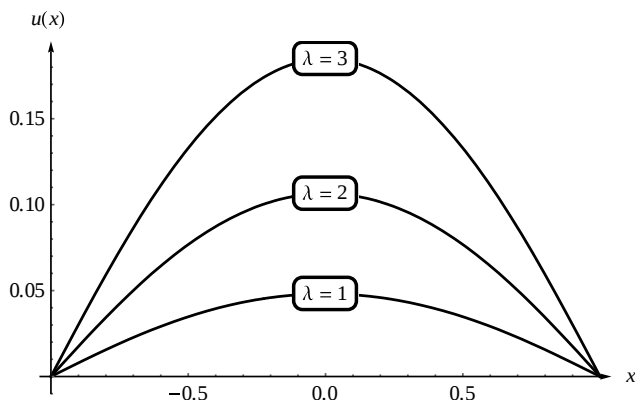


Рис. 8. Графіки наближених розв'язків $u(x)$ для різних значень параметра λ

З таблиці 2 та рисунку 8 бачимо, що при збільшенні значення параметра λ , що відповідає за прикладену напругу, відхилення балки збільшується, що також узгоджується з фізикою перебігу розглянутого процесу.

Враховуючі дані у таблиці 1 та таблиці 2 можемо зробити порівняльний аналіз чисельних розв'язків математичної моделі прогину балки в МЕМС для двох типів крайових умов. Бачимо, що за ідентичних геометричних параметрів та прикладеної напруги максимальне значення прогину для задачі Нав'є становить 0,18487, що суттєво перевищує аналогічний показник для задачі Діріхле 0,07465. На рисунку 9 наведено графіки наближених розв'язків задачі Діріхле та задачі Нав'є.

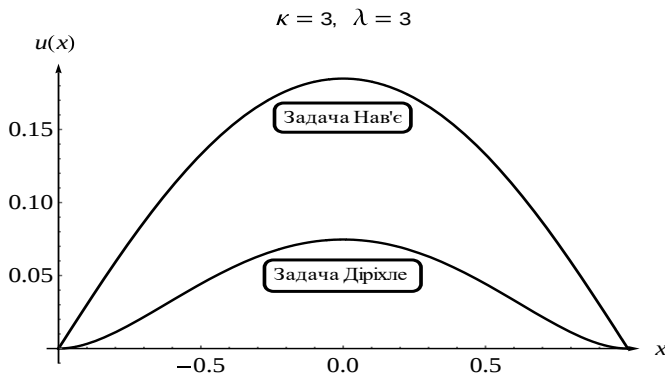


Рис. 9. Графіки наближених розв'язків $u(x)$ при $\kappa = 3$ та $\lambda = 3$ для різних типів закріплення кінців балки

Така різниця пояснюється наявністю додаткових зв'язків у задачі Діріхле, що обмежують кутові переміщення на кінцях відрізка, призводячи до зростання еквівалентної жорсткості балки. З точки зору проектування MEMC, це вказує на те, що використання шарнірно опертих балок дозволяє досягти більших робочих амплітуд при менших енерговитратах, тоді як жорстке закріплення є ефективнішим для забезпечення стабільності конструкції, що дає змогу більш якісно контролювати досягнення критичної напруги.

Висновки. У роботі проведено математичне моделювання та аналіз статичного прогину балки MEMC під дією електростатичних сил. Вперше застосовано метод двобічних наближень на основі функцій Гріна для розв'язання нелінійних крайових задач для рівнянь четвертого порядку, що описують прогин балок у мікросистемах. Використано апарат теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах, що дозволило звести диференціальне рівняння до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна та встановити теоретичні умови існування і єдиності додатного розв'язку.

Сформований ітераційний процес забезпечив побудову послідовностей верхніх та нижніх наближень. Обчислювальні експерименти підтвердили швидку збіжність методу та його стійкість при різних параметрах.

Проведено порівняльний аналіз механічної поведінки балки для двох типів закріплення: жорсткого закріплення (умови Діріхле) та шарнірного обпирання (умови Нав'є). Встановлено, що тип закріплення суттєво впливає на величину максимального прогину, і, як наслідок, на критичне значення напруги. Зокрема, шарнірно оперта балка демонструє більшу чутливість до електростатичного навантаження порівняно із закріпленою балкою за аналогічних параметрів.

Отримані результати та розроблений алгоритм можуть бути використані при проектуванні широкого спектра MEMC, зокрема мік-

роактуаторів, перемикачів та сенсорів тиску, для прогнозування їхніх експлуатаційних характеристик та запобігання передчасному виходу з ладу внаслідок втрати стійкості. Також отримані у роботі результати можна розповсюдити на дво- та тривимірні задачі, а також (у комбінації з методом Роте) розповсюдити на нестационарний випадок.

Список використаних джерел:

1. Najar F., Ghommam M., Abdel-Rahman E. Arch microbeam bifurcation gas sensors. *Nonlinear Dynamics*. 2021. № 104. P. 923-940.
2. Alneamy A. M., Heppler G. R., Abdel-Rahman E. M., Khater M. E. On Design and Analysis of Electrostatic Arch Micro-Tweezers. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2020. № 143. P. 1-23.
3. Cao T., Hu T., Zhao Y. Research Status and Development Trend of MEMS Switches: A Review. *Micromachines*. 2020. № 11. P. 694.
4. Derakhshani M., Berfield T. A. Snap-Through and Mechanical Strain Analysis of a MEMS Bistable Vibration Energy Harvester. *Shock and Vibration*. 2019. № 2019. P. 1-10.
5. Guan C., Zhu Y. An electrothermal microactuator with Z-shaped beams. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2010. P. 1-9.
6. Karthick R., Babu S. P. K., Balaji B. Material selection and performance analysis of RF-MEMS switch for MM-WAVE applications. *International Journal of Computational and Experimental Science and Engineering*. 2025. № 11 (1). P. 440-448.
7. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics : Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
8. Pelesko J. A., Bernstein D. H. Modeling MEMS and NEMS. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. 364 p.
9. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
10. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
11. Rezazadeh G., Sadeghian H., Abbaspour E. A comprehensive model to study nonlinear behavior of multilayered micro beam switches. *Microsystem Technologies*. 2008. № 14. P. 143-151.
12. Sadeghian H., Rezazadeh G., Abbaspour Sani E. Some Design Considerations on the Electrostatically Actuated Fixed-Fixed End Type MEMS Switches. *Journal of Physics: Conference Series*. 2006. № 34. P. 174-179.
13. Younis M., Abdel-Rahman E., Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2003. № 12 (5). P. 672-680.
14. Lakshmi S., Dinesh P. A., Pratheeksha C. S. Electromechanical modelling of electrostatically actuated beams. *Microsystem Technologies*. 2019. № 25. P. 2805-2812.
15. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14. № 3-4. P. 17-26.
16. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких

- електромеханічних систем. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2022. № 55. С. 19-31.
17. Guo Y. Dynamical Solutions of Singular Wave Equations Modeling Electrostatic MEMS. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2010. № 9 (4). P. 1135-1163.

APPLICATION OF THE TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD TO THE STATIC DEFLECTION ANALYSIS OF AN ELASTIC BEAM UNDER VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS IN A MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM MODEL

The article addresses a boundary value problem for a fourth-order semilinear differential equation that describes the static deflection of a beam in microelectromechanical systems (MEMS) under the action of electrostatic forces. Various types of beam end conditions are considered: fixed-fixed (clamped), which generates Dirichlet boundary conditions, and simply supported, which generates Navier boundary conditions.

The corresponding boundary value problem is solved using the method of two-sided approximations based on the use of appropriate Green's functions. This approach is chosen because it allows not only for the construction of an approximate solution but also for establishing theoretical conditions for the existence of a solution to the original problem, while providing a convenient a posteriori error estimation.

The research is grounded in reducing the boundary value problem to a nonlinear Hammerstein integral equation, which is analyzed using the theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces. An iterative process for finding a positive solution has been constructed, and conditions guaranteeing its two-sided convergence have been established. To analyze the algorithm's effectiveness, a series of computational experiments for various system parameter values were conducted. A comparative analysis of the obtained results was performed. The study investigates the variation in the maximum beam deflection and analyzes the impact of boundary conditions on the system's stability.

The novelty of this work lies in the development and application of the two-sided approximations method scheme to fourth-order equations modeling beam deflection in MEMS under different types of end conditions. The results of the study can be utilized in the design of micro-switches, gas sensors, micro-tweezers, and other components of modern microsystem technology to predict their static behavior and optimize operational parameters. Also, the results obtained in this work can be extended to two- and three-dimensional problems, as well as (in combination with the Rothe method) to unsteady-state processes.

Key words: *beam, fixed-fixed (clamped) support, Dirichlet problem, Navier problem, isotonic operator, invariant cone segment, boundary value problem, mathematical modeling, microelectromechanical system, method of two-sided approximations, deflection, Hammerstein's equation, Green's function, numerical methods, simply supported.*

Отримано: 21.12.2025