УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОД СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ЛІПШІЦЕВИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті на основі ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування побудовано збіжний метод розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій апроксимація, скінченновимірний підпростір, вагова функція.*

Вступ. Проблеми відновлення функціональних залежностей, які неточно визначені, за встановленими діапазонами їх можливих значень приводять до задач найкращої у деякому розумінні апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень.

У статті для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень побудовано метод, який базується на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування, запропонованого у праці [1], доведено його збіжність, отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю, обґрунтовано, що побудований метод може успішно використовуватися при розв'язуванні задачі найкращої зваженої рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір всіх неперервних однозначних відображень g компакта S в X з нормою $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ —

множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$, V — скінченновимірний підпростір простору $C(S, X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1, n}$, $\{p_s\}_{s \in S}$ — сім'я заданих на X опуклих ліпшіцевих з константою l функцій p_s, $s \in S$, таких, що відображення $s \in S \to p_s(x)$ неперервне на S при кожному $x \in X$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ рівномірної апроксимації компактнозначного відображення $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ підпростором V неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)) =$$
$$= \inf_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\right). \tag{1}$$

Якщо існує відображення $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$, $\alpha_i^* \in R^n$, $i = \overline{1, n}$, таке, що

$$\alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i(s)\right),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Теорія багатозначних відображень, яка інтенсивно розвивається в останні десятиріччя, знаходить багаточисельні застосування в теорії оптимального керування, теорії оптимізації, опуклому аналізі, теорії ігор, математичній економіці та інших галузях сучасної математики.

Важливий розділ цієї теорії утворюють задачі найкращого наближення складних багатозначних відображень відображеннями простішої структури (див., наприклад, [2–6]), у тому числі задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [7–9]).

Актуальність дослідження і розв'язування задач найкращої рівномірної апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень мотивується ще й тим, що з цими задачами тісно пов'язані задачі оптимального відновлення функціоналів за інформацією про діапазони їх можливих значень (див., наприклад [10], [11]).

Чимало задач найкращого зваженого рівномірного відновлення функціональних залежностей, які не означені точно, вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (1).

Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає розробки чисельних методів їх відшукання.

Мета роботи. Побудувати метод відшукання величини (1) та її екстремального елемента, оснований на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування.

Деякі означення та допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, F — дійснозначна функція, задана на X.

Полярою F^* функції F, або функцією, спряженою з F, називається функція, задана на X^*, означена рівністю $F^*(f) = \sup\limits_{x \in X}\left(f(x) - F(x)\right)$, $f \in X^*$, (див., наприклад, [12, с. 306]).

Множина $domF^* = \left\{ f : f \in X^*, F^*(f) < +\infty \right\}$ називається ефективною множиною функції F^* (див., наприклад, [12, с. 306]).

Елемент $f \in X^*$ називається субградієнтом функції F в точці $x_0 \in X$, якщо

$$F(x) - F(x_0) \geq f(x) - f(x_0),\ x \in X,$$

(див., наприклад, [12, с. 324]).

Множину субградієнтів функції F в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial F(x_0)$ (див., наприклад, [12, с. 324]).

Якщо F є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial F(x_0)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X^* (див., наприклад, [12, с. 327]).

Твердження 1. Для кожного $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ функція

$$\Phi_a(h) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - h(s)\right),\ h \in C(S, X),$$

є опуклою та ліпшіцевою з константою l на $C(S, X)$.

Доведення. Опуклість функції $\Phi_a(h),\ h \in C(S, X)$, випливає з опуклості функцій p_s на X, $s \in S$, та властивостей верхньої межі довільної сім'ї опуклих функцій (див., наприклад, [13, с.180]).

Переконаємося, що $\Phi_a(h),\ h \in C(S, X)$, є ліпшіцевою на $C(S, X)$ з константою l.

Нехай $h_1, h_2 \in C(S, X)$ та

$$\Phi_a(h_1) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - h_1(s)\right) =$$
$$= \max_{y\in a(s_1)} p_{s_1}\left(y - h_1(s_1)\right) = p_{s_1}\left(y_1 - h_1(s_1)\right),$$

де $s_1 \in S$, $y_1 \in a(s_1)$.

Тоді

$$\Phi_a(h_1) - \Phi_a(h_2) = p_{s_1}\left(y_1 - h_1(s_1)\right) - \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - h_2(s)\right) \le$$
$$\le p_{s_1}\left(y_1 - h_1(s_1)\right) - \max_{y\in a(s_1)} p_{s_1}\left(y - h_2(s_1)\right) \le$$
$$\le p_{s_1}\left(y_1 - h_1(s_1)\right) - p_{s_1}\left(y_1 - h_2(s_1)\right) \le \tag{2}$$
$$\le l\left\| y_1 - h_1(s_1) - \left(y_1 - h_2(s_1)\right)\right\| = l\left\|h_1(s_1) - h_2(s_1)\right\| =$$
$$= l\left\|\left(h_1 - h_2\right)(s_1)\right\| \le l \max_{s\in S}\left\|\left(h_1 - h_2\right)(s)\right\| = l\left\|h_1 - h_2\right\|.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\Phi_a(h_2) - \Phi_a(h_1) \le l\left\|h_1 - h_2\right\|. \tag{3}$$

З (2), (3) випливає, що

$$\left|\Phi_a(h_1) - \Phi_a(h_2)\right| \le l\left\|h_1 - h_2\right\|, \ h_1, h_2 \in C(S, X).$$

Твердження доведено.

Наслідок 1. Для кожного $a \in \tilde{C}\left(S, K(X)\right)$ функція

$$\psi_a(\alpha_1,...,\alpha_n) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, g_i(s)\right), (\alpha_1,...,\alpha_n) \in R^n,$$

є неперервною на R^n.

Доведення. Згідно з твердженням 1 для точок $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $(\alpha_1^0,...,\alpha_n^0)$ простору R^n одержимо, що

$$\left|\psi_a(\alpha_1,...,\alpha_n) - \psi_a(\alpha_1^0,...,\alpha_n^0)\right| = \left|\Phi_a\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, g_i\right) - \Phi_a\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 g_i\right)\right| \le$$
$$\le l\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i - \alpha_i^0\right) g_i\right\| \le l\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i - \alpha_i^0\right|\left\|g_i\right\|.$$

Звідси й випливає неперервність функцій $\psi_a(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in R^n$, в точці $(\alpha_1^0,...,\alpha_n^0)$. Оскільки точку $(\alpha_1^0,...,\alpha_n^0)$ вибрано довільно з R^n, то $\psi_a(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in R^n$, є неперервною на R^n.

Наслідок доведено.

Основні результати. Будемо припускати, що існують точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in domp_{s_j}{}^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, що

$$\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)>0, \alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\neq 0=\left(0,...,0\right). \tag{4}$$

Зрозуміло, що умова (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}}\ \max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)=\bar{\mu}>0, \tag{5}$$

де $S_{R^n}=\left\{\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\in R^n : \sum_{i=1}^{n}\alpha^2{}_i=1\right\}$ — одинична сфера простору R^n.

На попередньому кроці методу вибираємо точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in domp_{s_j}{}^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, для яких виконується умова (4) (5).

На k-му кроці $(k\ge 1)$ будемо розв'язувати задачу лінійного програмування:

$$\inf\theta \tag{6}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)+\theta\ge f_j\left(y_j\right)-p_{s_j}{}^*\left(f_j\right),\ j=\overline{1,m_1+k-1}, \tag{7}$$

де для $j=\overline{1,m_1}$ точки y_j вибираються з $a\left(s_j\right)$ довільно.

Зрозуміло, що задача лінійного програмування (6),(7) має допустимий розв'язок. Таким допустимим розв'язком буде, наприклад, вектор $\left(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n;\bar{\theta}\right)$, де $\left(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n\right)$ вибрано довільно з R^n, а

$$\bar{\theta}=\max_{1\le j\le m_1+k-1}\left(f_j\left(y_j\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-p_{s_j}{}^*\left(f_j\right)\right).$$

Для всіх допустимих розв'язків $\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\theta\right)$ задачі (6), (7) маємо, що

$$\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(-g_i\left(s_j\right)\right)-\max_{1\le j\le m_1}\left(p_{s_j}{}^*\left(f_j\right)-f_j\left(y_j\right)\right)\le\theta.$$

Звідки при $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \neq \left(0, ..., 0\right)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2} \max_{1 \le j \le m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_i}} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - \max_{1 \le j \le m_1} \left(p_{s_j}{}^*\left(f_j\right) - f_j\left(y_j\right)\right) \le \theta .$$

Оскільки згідно з (5)

$$\max_{1 \le j \le m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_i}} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) \ge \bar{\mu} > 0 ,$$

то звідси випливає, що

$$\theta \ge -\max_{1 \le j \le m_1} \left(p_{s_j}{}^*\left(f_j\right) - f_j\left(y_j\right)\right) . \tag{8}$$

Отже, для будь-якого допустимого розв'язку $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n; \theta\right)$ задачі (6), (7) має місце співвідношення (8).

Це означає, що цільова функція θ цієї задачі лінійного програмування обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому задача лінійного програмування (6), (7) має оптимальний розв'язок (див., наприклад, [14, с. 110]).

Теорема 1. Якщо $\left(\alpha^k; \theta^k\right) = \left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k; \theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то мають місце співвідношення

$$\theta^k \le \alpha_V^*\left(a\right) \le \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^k\left(s\right)\right), \tag{9}$$

де $g^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, ...$.

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^k\left(s\right)\right),$$

то g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність

$$\theta^k = \alpha_V^*\left(a\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^k\left(s\right)\right). \tag{10}$$

Доведення. Оскільки вектор $\left(\alpha^k, \theta^k\right) = \left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k; \theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то

$$\theta^k = \inf\left\{\theta : f_j\left(y_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\left(s_j\right)\right) - p_{s_j}{}^*\left(f_j\right) \le \theta,\right.$$

$$j=\overline{1,m_1+k-1},\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\theta\right)\in R^{n+1}\Big\}=$$

$$=\max_{1\le j\le m_1+k-1}\left(f_j\left(y_j-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k g_i\left(s_j\right)\right)-p_{s_j}{}^*\left(f_j\right)\right)=$$

$$=\max_{1\le j\le m_1+k-1}\left(f_j\left(y_j-g^k\left(s_j\right)\right)-p_{s_j}{}^*\left(f_j\right)\right)\le$$

$$\le\inf\left\{\theta: f\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\left(s\right)\right)-p_s{}^*\left(f\right)\le\theta, s\in S,\right.$$

$$\left.y\in a\left(s\right), f\in domp_s{}^*,\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\theta\right)\in R^{n+1}\right\}= \qquad (11)$$

$$=\inf\left\{\theta:\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\max_{f\in domp_s^*}\left(f\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\left(s\right)\right)-p_s^*\left(f\right)\right)\le\theta,\right.$$

$$\left.\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\theta\right)\in R^{n+1}\right\}=\inf\left\{\theta:\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\left(s\right)\right)\le\theta,\right.$$

$$\left.\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\theta\right)\in R^{n+1}\right\}=\inf\left\{\theta:\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g\left(s\right)\right)\le\theta,\right.$$

$$\left.g\in V,\theta\in R\right\}=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g\left(s\right)\right)=\alpha_V^*\left(a\right)\le$$

$$\le\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g^k\left(s\right)\right).$$

Із співвідношення (11) випливають співвідношення (9).

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g^k\left(s\right)\right),$$

то, враховуючи (9), робимо висновок, що g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність (10).

Теорему доведено.

Отже, якщо для деякого натурального k

$$\theta^k=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g^k\left(s\right)\right),$$

то згідно з теоремою 2 g^k є екстремальним елементом для величини (1) і $\alpha_V^*\left(a\right)=\theta^k$.

У цьому випадку процес відшукання величини (1) та її екстремального елемента завершено.

Розглянемо випадок, коли

$$\theta^k < \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^k(s)\right).$$

Тоді знаходимо точки $s_{m_1+k} \in S$, $y_{m_1+k} \in a\left(s_{m_1+k}\right)$ такі, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^k(s)\right) = \max_{y\in a\left(s_{m_1+k}\right)} p_{s_{m_1+k}}\left(y - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right) =$$

$$= p_{s_{m_1+k}}\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right),$$

функціонал $f_{m_1+k} \in \partial p_{s_{m_1+k}}\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right)$ та до обмежень (7) задачі лінійного програмування (6), (7) добавляємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{m_1+k}\left(g_i\left(s_{m_1+k}\right)\right) + \theta \geq f_{m_1+k}\left(y_{m_1+k}\right) - p^*_{s_{m_1+k}}\left(f_{m_1+k}\right),$$

де

$$p^*\left(f_{m_1+k}\right) = f_{m_1+k}\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right) - p_{s_{m_1+k}}\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right)$$

(див., наприклад, [12, с. 16]), знаходимо оптимальний розв'язок $\left(\alpha^{k+1}, \theta^{k+1}\right) = \left(\alpha_1^{k+1}, ..., \alpha_n^{k+1}; \theta^{k+1}\right)$ одержаної нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 2. Послідовність $\left\{\theta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim\limits_{k\to\infty} \theta^k$. Послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $\alpha^k = \left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k\right)$, $k = 1, 2, ...$, є обмеженою послідовністю простору R^n. Для будь-якої часткової границі $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right)$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ елемент $g^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Мають місце співвідношення:

$$\lim_{k\to\infty} \theta^k = \alpha_V^*(a) = \lim_{k\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^k(s)\right), \qquad (12)$$

де $g^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, ...$.

Доведення. Оскільки обмеження задачі лінійного програмування (6), (7), яка розв'язується на k-ому кроці, включається в обмеження задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $k+1$-му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові, то для відповідних їх оптимальних розв'язків $\left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k; \theta^k\right)$ та $\left(\alpha_1^{k+1}, ..., \alpha_n^{k+1}; \theta^{k+1}\right)$

виконується нерівність: $\theta^k \le \theta^{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$. Згідно з теоремою 1 $\theta^k \le \alpha_V^*(a)$. Тому існує $\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k$ і

$$\lim_{k\to\infty}\theta^k \le \alpha_V^*(a). \tag{13}$$

Переконаємось, що послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^n. Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\left\{\alpha^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\|\alpha^{k_\nu}\right\| = +\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\alpha^k\right\| = +\infty$.

Оскільки $\left(\alpha_1^k,\ldots,\alpha_n^k;\theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\alpha_i^k\right)f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\theta^k \le p_{s_j}^*\left(f_j\right)-f_j\left(y_j\right),\ j=\overline{1,m_1}\ ,\ k=1,2,\ldots.$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-\alpha_i^k}{\left\|\alpha^k\right\|}f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}\theta^k \le \frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}p_{s_j}^*\left(f_j\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}f_j\left(y_j\right), \tag{14}$$

$$j=\overline{1,m_1}\ ,\ k=1,2,\ldots.$$

Оскільки $\left(-\dfrac{\alpha_1^k}{\left\|\alpha^k\right\|},\ldots,-\dfrac{\alpha_n^k}{\left\|\alpha^k\right\|}\right)\in S_{R^n}$, то з послідовності

$$\left\{\left(-\frac{\alpha_1^k}{\left\|\alpha^k\right\|},\ldots,-\frac{\alpha_n^k}{\left\|\alpha^k\right\|}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

можна вибрати збіжну підпослідовність

$$\left\{\left(-\frac{\alpha_1^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|},\ldots,-\frac{\alpha_n^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}.$$

Нехай

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(-\frac{\alpha_1^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|},\ldots,-\frac{\alpha_n^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|}\right)=\left(\alpha_1^{/},\ldots,\alpha_n^{/}\right).$$

Зрозуміло, що $\left(\alpha_1^{/},...,\alpha_n^{/}\right)\in S_{R^n}$.

З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\left\{\theta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ (існує $\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k$) з (14) одержимо, що

$$\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{/} f_j\left(-g_i\left(s_j\right)\right)\le 0 ,$$

що суперечить (4).

Отже, $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^n .

Нехай $\alpha^*=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$ її часткова границя.

Переконаємося, що вектор $g^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Існує підпослідовність $\left\{\alpha^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha^{k_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{k_\nu},...,\alpha_n^{k_\nu}\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)=\alpha^* .$$

До обмежень задачі лінійного програмування типу (6), (7), яка розв’язана на кроці k_ν , добавляється обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)+\theta\ge f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right),$$

де точки $s_{m_1+k_\nu}\in S$, $y_{m_1+k_\nu}\in a\left(s_{m_1+k_\nu}\right)$ вибрані так, що

$$\begin{aligned}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^{k_\nu}\left(s\right)\right)&=\max_{y\in a\left(s_{m_1+k_\nu}\right)} p_{s_{m_1+k_\nu}}\left(y-g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)=\\&=p_{s_{m_1+k_\nu}}\left(y_{m_1+k_\nu}-g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right),\end{aligned}\tag{15}$$

а $f_{m_1+k_\nu}\in\partial p_{s_{m_1+k_\nu}}\left(y_{m_1+k_\nu}-g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)$,

$$p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)=f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}-g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p_{s_{m_1+k_\nu}}\left(y_{m_1+k_\nu}-g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right).$$

Тому уже

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)+\theta^{k_{\nu+1}}\ge f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right). \tag{16}$$

Маємо далі з урахуванням (15), (16), що

$$\left|\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^{k_\nu}(s)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_\nu} g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{k_{\nu+1}}-\alpha_i^{k_\nu}\right|\left\|f_{m_1+k_\nu}\right\|\left\|g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right\|\le l\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{k_{\nu+1}}-\alpha_i^{k_\nu}\right|\left\|g_i\right\|.$$

Оскільки $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{k_\nu},...,\alpha_n^{k_\nu}\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$, то звідси, співвідношення (13) та наслідку 1 випливає, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^{k_\nu}(s)\right)=\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_\nu} g_i(s)\right)=$$

$$=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(s)\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p^*_{s_{m_1+k_\nu}}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\le$$

$$\le\lim_{\nu\to\infty}\theta^{k_{\nu+1}}\le\alpha_V^*(a).$$

Отже,

$$\alpha_V^*(a)\le\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)\le\lim_{k\to\infty}\theta^k\le\alpha_V^*(a).$$

Звідси робимо висновок, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=\alpha_V^*(a)=\lim_{k\to\infty}\theta^k. \tag{17}$$

Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки рівність (17) має місце для будь-якої граничної точки $\alpha^*=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\alpha_1^k,...,\alpha_n^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, то справедлива рівність (12).

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що оцінки (9) можна використати для відшукання величини (1) з наперед заданою точністю.

Крім того, з теореми 2 випливає, що умова (4) ((5)) є достатньою для існування екстремального елемента для величини (1).

Задача найкращої зваженої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.

Нехай $\omega(s)$, $s \in S$ — задана на S неперервна дійснозначна функція така, що $\omega(s) > 0$ для всіх $s \in S$ (деяка вагова функція).

Покладемо для $s \in S$ $p_s(x) = \omega(s)\|x\|$, $x \in X$. Зрозуміло, що $p_s, s \in S$, є опуклими на X ліпшіцевими з константою $l = \max\limits_{s \in S} \omega(s)$ функціями, для яких відображення $s \in S \to p_s(x) = \omega(s)\|x\|$ є неперервними на S при кожному $x \in X$.

З урахуванням цього можна зробити висновок, що задача відшукання

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \omega(s)\|y - g(s)\| \tag{18}$$

вкладається у схему постановки задачі відшукання величини (1).

Легко переконатися, що для сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ функцій p_s, $s \in S$, таких, що $p_s(x) = \omega(s)\|x\|$, $x \in X$, існують точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in domp_{s_j}^{\ *}$, $j = \overline{1, m_1}$, для яких виконується умова (4). Тому для відшукання величини (18) та її екстремального елемента можна використати описаний вище чисельний метод.

Задачу відшукання величини (18) будемо називати задачею найкращої зваженої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором V.

Висновки. Побудовано чисельний метод розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.

Отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю.

Обґрунтовано, що побудований метод можна використати, зокрема, для розв'язування задачі найкращої зваженої рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The «Cutting plane» methods for solving convex programs / J. E. Kelly // SIAM J. — 1960. — Vol. 8, № 4. — P. 703–712.

2. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София : БАН, 1979. — 372 с.
3. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — Вип. 308, № 5. — С. 1047–1050.
4. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вест. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.
5. Чобан М. М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. М. Чобан, Д. М. Ипате // Изв. АН Респ. Молдова. Мат. –1981. — № 2. — С. 13–18.
6. Дудов С. И. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображения с шаровыми образами/ С. И. Дудов, А. Б. Коноплев // Мат. заметки. — 2007. — Вип. 82, № 4. — С. 525–529.
7. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та.– 2000. — №2. — С. 13–15.
8. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима// Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57, № 12. — С. 1601–1619.
9. Дудов С. И. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой / С. И. Дудов, Е. В. Сорина // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. — 2008. — № 10. — С. 20–23.
10. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В.Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Вип. 189. — С. 3–20.
11. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991. – Вип. 50, № 6. — С. 85–93.
12. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
13. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
14. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 774 с.

We generalized the method of cutting planes for the problem of the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation of compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps.

Key words: *the compact-valued maps, the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation, the finite dimensional space, the weight function.*

Отримано: 06.03.2014