УДК 519.6

О. В. Щирба, асистент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ ДЛЯ МЕТОДІВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

У статті розглядається ідея розширення методів типу внутрішньої точки з скінченновимірного на нескінченновимірний випадки, досліджуються труднощі, пов'язані з застосуванням двоїстих методів скінченновимірних задач оптимізації, критерії оптимальності.

Ключові слова: *задачі оптимального управління, критерії оптимальності, множники Лагранжа.*

Вступ. За останнє десятиліття, методи чисельного розв'язання задач оптимального управління досягли досить високого рівня складності. Сучасні методи здатні розв'язувати важливі класи великомасштабних реальних проблем життя в науці і техніці. У загальному використовують два види методів: (а) прямі методи, які в основному, базуються на деяких надійних коллокаціях, в тому числі спеціальних параметризаціях управління, і (б) непрямі методи, які, як правило, базуються або на декількох методах, або методах адаптивної коллокацій. Кожного разу, коли необхідні умови Ейлера-Лагранжа дають достатній опис проблеми, то доведено, що непрямі методи приводять до оптимального розв'язку. Проте вони вимагають досить детальних апріорних знань про послідовність оптимальних траєкторій.

На відміну від цього прямі методи можуть обходитися без цих серйозних обмежень, але мають тенденцію, що це потім призведе до неоптимального розв'язку. З цієї причини, гібридні методи комбінують: на першому кроці, використовують деякий прямий метод до тих пір, поки спеціальні параметризовані змінні керування не забезпечать грубе наближення послідовності до оптимального розв'язку; потім на другому кроці, працює непрямий метод, щоб вирішити нарешті проблему з високою точністю.

Потрібне розумне поєднання підходів функціонального аналізу, що реалізує ідеї прямих і непрямих методів в просторах з нескінченною розмірністю, а не в скінченовимірних — в противагу від вищезгаданих гібридних методів. Є декілька можливостей такого розширення. Справжнім методом для функціонального простору був метод запропонований в роботі [2]. Але, реалізація скінченнопросторового методу внутрішньої точки в межах запропонованого ними методу передбачає розв'язання послідовності дискретних задач на кожній із послідовнотоншій сітці. Така процедура постраждала б від серйозних труднощів при наявності розривів змінних керування.

Ми звертаємося до центрального шляху у функціональному просторі, як математичного поняття і отримуємо основні теоретичні викладки роботи. Проаналізуємо труднощі, пов'язані з застосуванням двоїстих методів скінченновимірних задач оптимізації на випадок задачі оптимального управління в функціональних просторах та запропонуємо шляхи подолання цих труднощів.

Виклад основного матеріалу. Нехай $X = X_u \times X_y$ — функціональний простір над областю $\Omega := [0,1]$. Припустимо, що $\dot{y} \in X_u$ для $y \in X_y$. Будемо використовувати розклад $x = (u, y)$ як взаємозамінну для елементів з простору *X*. Припустимо, що $\Im : R^{n_u} \times R^{n_y} \to R$, $c : R^{n_u} \times R^{n_y} \times R^{n_y} \to R^{n_c}$, $c^r : R^{n_y} \times R^{n_y} \to R^{n_r}$ і $g^u : R^{n_u} \to R^{m_u}$ принаймні двічі, а $g^y : R^{n_y} \times R^{m_y}$ принаймні тричі неперервно диференційовні за Ліпшицем.

Розглянемо задачу оптимального управління

$$\int_\Omega \Im(u(t), y(t))dt \to \min$$

при обмеженнях

$$c(u(t), y(t), \dot{y}(t)) = 0\,,$$

$$c^r(y(0), y(1)) = 0\,,$$

$$g^u(u(t)) \ge 0\,,$$

$$g^y(y(t)) \ge 0\,.$$

Для компактніших аналітичних функціональних позначень, визначимо функціонал

$$J(x) = \int_\Omega \Im(u(t), y(t))dt$$

і оператор обмежень рівнянь *c* на просторі *X*

$$c(x) := \begin{bmatrix} \tilde{c}(x) \\ c^r(y(0), y(1)) \end{bmatrix},$$

де $\tilde{c}(x)(t) := \boldsymbol{c}(u(t), y(t), \dot{y}(t))$ для $t \in \Omega$.

Оператор нерівностей *g* на *X* визначимо таким же чином:

$$g(x) := \begin{bmatrix} g^u(x) \\ g^y(y) \end{bmatrix},$$

де $g^u(u)(t) := g^u(u(t))$ і $g^y(u)(t) := g^y(y(t))$ для $t \in \Omega$.

Тоді сформульовану вище задачу оптимального управління можна записати як задачу відшукання

$$J(u) \to \min$$

при обмеженнях

$$c(x) = 0\,,$$

$$g(x) \geq 0\,.$$

Зауважимо, що обмеження на область $\Omega := [0,1]$ покладається лише для зручності викладок, оскільки будь-яка область легко зіставляється з нею за допомогою афінних перетворень. Це справедливо і для задач оптимального управління з невідомими на час, де ми визначимо $[t_0, T]$, щоб ввести t_0 і T в ролі нових скалярних параметрів управління.

Необхідні умови оптимальності вперше сформулювали Каруш, Куна та Таккер в контексті задачі нелінійного програмування. Необхідні, так само як і достатні умови оптимальності, потім були дані в різних формах рядом дослідників для нескінченновимірних задач. У порівнянні з скінченновимірними випадками, необхідні сильніші припущення, щоб гарантувати існування множників Лагранжа для нескінченновимірних задач.

У самому загальному випадку задача оптимізації може бути сформульована так:

$$\arg\min\ J(x)$$

при обмеженнях

$$g(x) \in K\,, \tag{1}$$

де J — функціонал визначений в дійсному банаховому просторі X, g — відображення з X в дійсний банаховий просторі Z і K — опуклий замкнений конус в Z. Оскільки будь-який замкнутий опуклий конус $K \subset Z$ визначає частковий порядок на Z, ми будемо писати $z_1 \leq z_2$, якщо $z_2 - z_1 \in K$. Нехай $K^+ := \left\{\, l \in Z^* : \left\langle l, k \right\rangle \geq 0,\ k \in K \right\}$ спряжений конус до K. Функціонали J і g вважаються двічі неперервно диференційовними за Фреше.

Точка $x \in X$ називається регулярною, якщо

$$0 \in \operatorname{int}(g(x) + g'(x)X - K),$$

де через int позначено топологічну внутрішність.

Теорема 1. (Необхідні умови) Нехай x — регулярний розв’язок задачі (1). Тоді існує деякий елемент $l \in K^+$ такий, що

$$J'(x) - g'(x)^* l = 0\,,$$

$$\left\langle l, g(x) \right\rangle = 0\,. \tag{2}$$

Теорема 2. (Достатні умови) Нехай x — регулярний розв’язок задачі (1) і існує множник Лагранжа $l \in K^+$ такий, що $J'(x) - g'(x)^* l = 0$ і

$\left\langle l, g(x)\right\rangle = 0$. Покладемо $L(x) = J(x) - \left\langle l, g(x)\right\rangle$. Припустимо, що існують $\delta > 0$ і $\beta > 0$ такі, що

$$\left\langle L''(x)h, h\right\rangle \geq \delta \| h \|^2, \tag{3}$$

для всіх $g'\left(x\right)h \in K + IRg\left(x\right)$ і $\left\langle l, g'(x)h\right\rangle \leq \beta \| h \|$. Тоді існує окіл U точки x такий, що x буде єдиним локальним розв'язком задачі (1) в U.

Зазначимо, що умов теореми 2, взагалі кажучи, не достатньо для задач оптимального управління, оскільки найчастіше розв'язок x* регулярний тільки, якщо $X \subset L_\infty$, але $L''(x^*)$ є обмеженим тільки, якщо $L_2 \subset X$. Це показано в наступному прикладі.

Приклад 1. Розглянемо задачу оптимізації

$$\sqrt{1+u^2}$$

при обмеженнях

$$-1 \leq u \leq 1.$$

Оптимальним є тривіальний розв'язок $u^* = 0$ при повністю неактивних обмеженнях і, отже, множники Лагранжа перетворюються в нуль: $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Теорема 1 передбачає регулярність

$$0 \in \operatorname{int}(g(u^*) + g'(u^*)X_0 - K)$$

з $g(u) = (u+1,\ 1-u)^T$ і $K := \{(a,b)^T : a \geq 0, b \geq 0\}$ для того, щоб гарантувати існування множників Лагранжа, які задовольняють умови Каруша-Куна-Таккера (2). Тут

$$U := \operatorname{int}\left(g\left(0\right) + g'\left(0\right)X_u - K\right) = \left\{\left(1+v-a, 1-v-b\right)^T : v \in X_u, a \geq 0, b \geq 0\right\}.$$

Для того, щоб 0 був в середині U параметри $v \in X_0$ і $a, b \in K$ повинні бути такими, що

$$\begin{matrix} 1+v-a = \epsilon_a \\ 1+v-b = \epsilon_b \end{matrix} \Rightarrow a+b = 2-\epsilon_a-\epsilon_b$$

для кожного $\epsilon_a, \epsilon_b \in B(0,\rho)$ з досить малим значенням ρ. Тому u^* регулярний тоді й тільки тоді, коли $X_u \subset L_\infty$.

З іншого боку, теорема 2 вимагає, щоб в цьому випадку $L''(u^*)$ була додатньовизначена на всьому просторі X_u . Починаючи з $L''(0)(h,h) = 2 \| h \|_2^2$, це задовольняє дану вимогу тільки тоді, коли $L_2 \subset X_u$, що протирічить вимозі $X_u \subset L_\infty$ регулярності u^* . Таким чином, теорема 2 не застосовується.

Ці дві розбіжності норми можуть бути вирішені за допомогою двох різних норм самого простору і умови коерцитивності (3).

Теорема 3. (Достатні умови) Нехай x є регулярною точкою для задачі (1). Припустимо, що J і g визначені і двічі неперервно диференційовані по Фреше на деяких великих просторах $X_p \supset X$. Нехай виконуються умови (2) і $L(x) = J(x) - \langle l, g(x) \rangle$. Припустимо, що $\delta > 0$ і $\beta > 0$ такі, що $\langle L''(x)h, h \rangle \geq \delta \| h \|_p^2$ для всіх $g'(x)h \in K + IRg(x)$ і $\langle l, g'(x)h \rangle \leq \beta \| h \|_p$. Тоді існує окіл U точки x в X_p такий, що x є єдиним локальним розв'язком задачі (1) на U.

Крім визначення характеристик розв'язку, множники Лагранжа, що пов'язані з оптимальною точкою x^* в співвідношеннях Каруша-Куна-Таккера, можна інтерпретитувати як чутливість цілої функції щодо порушення відповідних обмежень.

Технічно, при відповідних припущеннях, можна показати, що, якщо x^* є розв'язком (1) з відповідним множником Лагранжа l, то при досить малих збуреннях $z \in Z$ існує відображення $z \mapsto x(z)$ таке, що $x(z)$ забезпечує

$$\min J(x)$$

при обмеженнях

$$g(x) - z \in K. \tag{4}$$

Крім того, похідною оптимального значення збуреної задачі (4) є $\partial_z J(x(z))\big|_{z=0} = l$. Зокрема, ця рівність є основою для побудови виваженої оцінки похибки адаптивних методів спеціально для задач оптимізації [4].

Крім того, разом з перетворенням в нуль множників Лагранжа (слабо) активних обмежень це може свідчити про неоднозначність розв'язку.

Приклад 2. Розглянемо задачу оптимізації

$$\min -y(1)$$

при умові $y(0) = 0$, $u \leq 1$, $\dot{y} = u$, $y \leq \max(1-3t, 0, 3t-2)$ з очевидним розв'язком

$$y = \max\left(0, t - \frac{2}{3}\right)$$

і

$$u = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{2}{3}, \\ 1, & t > \dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

та відповідними множниками Лагранжа

$$\lambda = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{2}{3}, \\ 1, & t > \dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

$$\lambda^r = 0 \,,$$

$$\eta^u = \lambda \,,$$

$$\eta^y = \delta_{\frac{2}{3}} \,,$$

які задовольняють необхідні умови (2). Той факт, що множники Лагранжа перетворюються в нуль на цілому відрізку [0, 2/3) означає, що розв’язок не є єдиним і управління можуть бути змінені без зміни значення цільового функціоналу. Фактично, всі можливі управління $\tilde{u}$ з $\int_0^{\frac{2}{3}} \tilde{u} dt = 0$ є оптимальними розв’язками.

Однак, слід зазначити, що множники Лагранжа можуть також перетворитися в нуль при єдиному розв'язку і, таким чином, це не означає неоднозначність. Якщо значення цільового функціоналу в даному випадку збільшується досить повільно, то розв’язок не змінюється (за винятком функції η^u на [2/3, 1]), але він буде єдиний.

Висновки. Розширення методів типу внутрішньої точки з скінченновимірного на нескінченновимірний випадки відбувається не зовсім просто: зрештою, поняття логарифмічної бар'єрної функції більше немає сенсу в нескінченновимірному налаштуванні. На щастя, версія взаємозалежності методу внутрішньої точки, в тому числі поняття центрального шляху, природним чином переноситься на нескінчену розмірність. Однак, деякі застережливі теоретичні міркування необхідні: відома невідповідність з двома нормами (див. [3]) настійно рекомендує використання різних норм для обробки диференційовності, з одного боку, і опуклості з іншого боку.

Список використаних джерел:

1. Бейко І. В. Розвиток методів розв’язуючих та асимптотично-розв’язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей / І. В. Бейко // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2002. — Вип.3. — С. 10–15.
2. Alt W. The Lagrange-Newton method for state constrained optimal control problems / W. Alt, K. Malanowski // Comput. Optim. Appl. — 1995. — № 4(3). — P. 217–239.

3. Malanowski K. Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints / K. Malanowski // SIAM J. Control Optimization. — 1997. — № 35 (1). — P. 205–227.

In the paper the idea of extension methods such as interior-point with finite to infinite-dimensional cases are investigated difficulties associated with the use of dual methods of finite-dimensional optimization problems, optimality criteria.

Key words: *problems of optimum control, criteria of an optimality, Lagrange's multipliers.*

Отримано: 17.02.2014

УДК 519.217

В. К. Ясинський*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Є. В. Ясинський,** аналітик-програміст,
І. В. Юрченко*, канд. фіз.-мат. наук

* Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,
** Університет Атабаска, м. Едмонтон, Канада

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ІЗ ЗОВНІШНИМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Доведено існування сильного розв'язку лінійного дифузійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРзЧП) у відповідному просторі із зовнішними випадковими збуреннями. Отримано достатні умови в термінах коефіцієнтів ЛСДРзЧП асимптотичної стійкості й нестійкості в середньому квадратичному сильного розв'язку цього рівняння.

Ключові слова: *стохастичне рівняння в частинних похідних, стійкість в середньому квадратичному, асимптотична стійкість.*

Вступ. Дослідженню детермінованих рівнянь з частинними похідними присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [1–3; 17], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці XX — на поч. XXI ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих монографіях [4–6] та їх подальше поширення на класи стоха-