2. Бешелев С. Д. Экспертные оценки / С. Д. Бешелев, Ф. Г. Гуревич. — М. : Наука, 1973. — 163 с.
3. Гохман О. Г. Экспертное оценивание : учебное издание / О. Г. Гохман. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1991. — 153 с.
4. Гихман И. И. Теория случайных процессов : в 3-х томах / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1971. — Т. 1. — 666 с.; 1973. — Т. 2. — 630 с.; 1975. — Т. 3. — 496 с.
5. Єлейко Я. І. Колективне експертне оцінювання у випадковому середовищі / Я. І. Єлейко, М. Р. Звізло // Алгебра, аналіз, стохастика АТАС-2012.
6. Кололюк В. С. Полумарковские процессы и их приложения / В. С. Королюк, А. Ф.Турбин. — К. : Наукова думка, 1976. — 184 с.

The article deals with the main problems of the theory and practice of collective expert evaluations in a random environment including issues related to the typical stages of collective expert evaluations: the order of the survey of experts, decision making on the basis of the assessments, determining the level of trust to experts. In this article it is shown the example of Borda rule modification and the build of a model of collective expert evaluations in a random environment, which will allow make decisions in the absence of information about the situation.

Key words: *collective expert evaluations, Bord rule, semi-Markov process, ergodic theorem.*

Отримано: 11.09.2014

УДК 519.718;519.21

А. М. Калинюк*, канд. фіз.-мат. наук,
Т. О. Лукашів,** канд. фіз.-мат. наук

* Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам’янець-Подільський,
** Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО СТОХАСТИЧНУ СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІТО З ЗАГАЮВАННЯМИ

Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості тривіального розв’язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто з багатьма сталими загаюваннями.

Ключові слова: *стохастичне диференціально-різницеве рівняння, рівномірно-стохастична стійкість.*

Вступ. Питання асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості вивчено у монографії Скорохода А. В., Гіхмана Й. І. [2]. Для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь це питання вивчалося Царковим Є. Ф. [4]. У цій роботі розглянуто проблему асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості для стохастичних систем Іто з багатьма загаюваннями.

1. Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з фільтрацією $(F_t)_{t\geq t_0}$ розглянемо випадковий процес $(x(t)) \equiv x(t,\omega) \in R^n$ для $t \geq t_0$, як сильний розв'язок системи стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма сталими загаюваннями [2]

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t, x(t), x(t-\Delta_i))dt + \sum_{j=1}^{l} b_j(t, x(t), x(t-\Delta_j))dw_j(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$x(t)\big|_{t\in[-\Delta,0]} = \varphi(t,\omega) \in D, \quad (2)$$

де $\Delta \equiv \sup\limits_{i,j}(\Delta_i, \Delta_j)$, $i = \overline{1,k}$; $j = \overline{1,l}$; коефіцієнти $a_i : R_+ \times R^n \times R^n \to R^n$; $b_j : R_+ \times R^n \times R^n \to M_n(R^n)$ — $n \times n$-матриця, причому всі вони неперервні за всіма аргументами; $w_j(t) \equiv w_j(t,\omega) \in R^n$ — попарно-незалежні вінерові процеси [1; 3]; $D_n([-\Delta,0]) \equiv D([-\Delta,0], R^n)$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [1].

Лема 1. [3] Нехай:

1) коефіцієнти системи (1) неперервні;
2) виконуються умови Ліпшиця за другим і третім аргументом: для $\forall\ x^1, x^2, y^1, y^2 \in R^n$

$$\sum_{i=1}^{k}\left|a_i(t,x^1,x^2) - a_i(t,y^1,y^2)\right| + \sum_{j=1}^{l}\left\|b_j(t,x^1,x^2) - b_j(t,y^1,y^2)\right\| \leq$$
$$\leq L\left(\left|x^1 - y^1\right| + \left|x^2 - y^2\right|\right),$$

де $L > 0$ — дійсна стала;

3) виконується умова рівномірної обмеженості за t.

Тоді:

I) задача Коші (1), (2) має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t) \in R^n$, $t \in [0,T]$;

II) виконується оцінка

$$E\left\{\sup_{t_0\leq t\leq T}\left|x(t)\right|^2\right\} \leq NE\left\{\sup_{-\Delta+t_0\leq t\leq t_0}\left|\varphi(t)\right|^2\right\},$$

де стала N залежить від сталої Ліпшиця і $T > 0$.

Надалі вважатимемо, що $t_0 = 0$ і для існування тривіального розв'язку системи (1), (2)

$$a_i(t,0,0) \equiv 0\,;\; b_j(t,0,0) \equiv 0_{n\times n}\,.$$

Вірне наступне твердження [3].

Лема 2. Нехай:

1) задано невід'ємний випадковий процес $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) \in R^n$;
2) для довільного розбиття

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$$

та умовного математичного сподівання виконано нерівність

$$E\left\{\xi(t_n)\middle|\,\xi(t_0),\xi(t_1),\ldots,\xi(t_{n-1})\right\} \le \xi(t_{n-1}).$$

Тоді $\forall C > 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\xi(t) > C\right\} \le \frac{1}{C}E\xi(0).$$

2. Достатні умови асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості. Будемо розглядати задачу стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) у наступному сенсі [7–8].

Означення 1. Розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) назвемо рівномірно-стохастично стійким, якщо для $\forall \varepsilon_i > 0,\ i = 1,2$ існує таке $\delta > 0$, що при

$$E\left\{\sup_{-\Delta\le t\le 0}\left|\varphi(t)\right|\right\} \le \delta\,, \tag{3}$$

виконується нерівність

$$P\{\left|x(t)\right| \le \varepsilon_2\} \ge 1 - \varepsilon_1,\ \forall t \ge 0\,.$$

Означення 2. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) асимптотично рівномірно-стохастично стійкий, якщо він стохастично рівномірно стійкий (означення 1), причому для $\forall \varepsilon_3 > 0$

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\left|x(t)\right| = 0\right\} \ge 1 - \varepsilon_3.$$

Теорема 1. При виконанні умов леми 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші (1), (2) є виконання на розв'язках системи (1) нерівності

$$\begin{aligned} F(t,x(t),k,l) &:= 2\sum_{i=1}^{k} x'(t)a_i(t,x(t),x(t-\Delta_i)) + \\ &+ Sp\sum_{j=1}^{l} b(t,x(t),x(t-\Delta_j))b'(t,x(t),x(t-\Delta_j)) \le -f_\Delta(x_t), \end{aligned} \tag{4}$$

де $f : D \to R^1$ — додатно визначений неперервний та обмежений функціонал на відрізку траєкторії $x_t \equiv \{x(t+\theta\}, -\Delta \le \theta \le 0$ такий, що з $f(\varphi) \equiv 0$ випливає, що $\varphi(\theta) \equiv 0$, «штрих» — операція транспонування.

Доведення. Розглянемо новий випадковий процес як квадрат модуля розв'язку задачі (1), (2):

$$z(t) = |x(t)|^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) .$$

Диференціал $dz(t)$ за заміною Іто буде мати вигляд [2; 3]

$$dz(t) \equiv 2\sum_{i=1}^{k} x'(t)a_i(t, x(t), x(t-\Delta_i))x(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} Spb_j(t, x(t), x(t-\Delta_j))b'(t, x(t), x(t-\Delta_j)) - |x(t)|^2 +$$

$$+2x'(t)b(t, x(t), x(t-\Delta_j))dw_j(t) = 2\sum_{i=1}^{k} x'(t)a_i(t, x(t), x(t-\Delta_i)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} Spb_j(t, x(t), x(t-\Delta_j))b^*(t, x(t), x(t-\Delta_j)) .$$

Перейдемо до інтегральної форми запису одержаного стохастичного диференціалу $dz(t)$ і використаємо умову (4), в результаті отримаємо нерівність для $t \to \Delta$

$$z(t) \le |\varphi(0)|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta}^{t} x'(\tau)a_i(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_i))d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} \int_{\Delta}^{t} Spb(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_i))b'(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_i))d\tau +$$

$$+2\sum_{j=1}^{l} \int_{\Delta}^{t} x'(\tau)b(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_j))dw_j(\tau) \le$$

$$\le |\varphi(0)|^2 - \int_{\Delta}^{t} f_\Delta(x_\tau)d\tau + \beta(t) + \gamma,$$

де відповідно позначено

$$\gamma \equiv 2\sum_{i=1}^{k} \left[\int_{0}^{\Delta} x'(\tau)a_i(\tau, x(\tau), \varphi(\tau-\Delta_i)d\tau + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{l} \int_{0}^{\Delta} Spb_j(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_j))b'(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_j))d\tau ;$$

$$\beta(t) \equiv 2\sum_{j=1}^{l}\int_{0}^{t} x'(\tau)b_j(\tau, x(\tau), x(\tau-\Delta_j))dw_j(\tau).$$

I) Доведемо спочатку рівномірно-стохастичну стійкість тривіального розв'язку системи (1), (2). На інтервалі $[0,T]$ можна провести оцінку, аналогічну отриманій Царковим Є. Ф. [4] для γ :

$$|\gamma| \le C_1 \sup_{0\le\tau\le\Delta} \left\{K_0 |x(\tau)|^2 + L_0 |x(\tau)||\varphi(\tau-\Delta)| + L_0 |\varphi(\tau-\Delta)|^2\right\};$$

$$E\left\{|\gamma|^2\right\} \le C_2 \sup_{0\le\tau\le\Delta} |\varphi(\tau)|;$$

де C_1 залежить від сталої Ліпшиця L, а C_2 — від сталої Ліпшиця L та K.

Отже, $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_1 \equiv \delta_1\left(\sup|\varphi(\tau)|^2\right) > 0$ таке, що

$$P\left\{|\gamma| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ge 1 - \frac{2\delta_1}{\varepsilon}.$$

Оскільки $\beta(t)$ є мартингалом [2] на розв'язку, що задовольняє нерівність $|\beta(t)| > |\varphi(0)|^2$, то $\forall t \in [0,T]$ за лемою 2 має місце нерівність

$$\frac{\varepsilon}{2} \le P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left(|\beta(t)| + |\varphi(0)|^2\right) < \varepsilon\right\} \le \frac{2|\varphi(0)|^2}{\varepsilon}.$$

А, отже,

$$\begin{aligned} P\left\{\omega : \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|^2 \le \varepsilon\right\} \le P\left\{|\gamma(t)|^2 > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \\ +P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left(|\beta(t)|^2 + |\varphi(0)|^2\right) \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le \frac{\delta_1}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

Це означає, що розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) стохастичнорівномірно стійкий за означенням 1.

II) Доведення асимптотичної рівномірної стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2).

Це рівносильне доведенню $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ на ω-множині, ймовірнісна міра якої близька до 1, якщо $\sup_{-\Delta\le\tau\le 0} |\varphi(\tau)|$ як завгодно близьке до 0. Дійсно, ω-множина з (5) задовольняє цю умову, а саме:

$$|x(t)|^2 \le |\varphi(0)|^2 + \gamma - \int_0^t f_\Delta(x_\tau)d\tau + \beta(t) \le \varepsilon - \int_0^t f_\Delta(x_\tau)d\tau. \tag{6}$$

Ліва частина нерівності (6) додатна, тому інтеграл правої частини (6) повинен збігатися за умовою 1) теореми. Отже, в силу неперервності функціонала $f_\Delta(x_\tau)$ випливає $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$, бо $\lim\limits_{t\to\infty} f_\Delta(x_\tau)=0$, що завершує доведення теореми 1.

Теорема 2. Нехай умова (4) теореми 1 виконується на розв'язках $x(t)$ системи (1), (2) і при цьому виконується нерівність

$$\left|x(t-\tau)\right|^2 < \alpha\left|x(t)\right|^2, \tag{7}$$

де $0\le\tau\le\Delta$, $\alpha>1$. Тоді розв'язок $x(t)\equiv 0$ задачі Коші (1), (2) асимптотично рівномірно-стохастично стійкий.

Доведення. 1) Доведення рівномірно-стохастичної стійкості тривіального розв'язку $x(t)\equiv 0$ системи (1), (2).

Виберемо $\forall\varepsilon>0$ і розглянемо ω-множину

$$B_\varepsilon \equiv \left\{\omega : \left|\gamma(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega : \sup_{t\in[0,T]} \left|\beta(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Доведемо еквівалентний означенню 1 факт: якщо $x(t)$ для $\omega\in B_\varepsilon$ потрапив до смуги $\left|x(t)\right|<\delta$, то $x(t)$ її ніколи не залишить.

Дійсно, нехай $\forall\eta>0$ існує $\delta>0$, що з нерівності $\sup\limits_{\tau\in[-\Delta,0]} \left|\varphi(\tau)\right|<\delta$ випливає $P\{B_\varepsilon\}\ge 1-\eta(\delta)$. Тоді за умовою (4) маємо $\sup\limits_{t\in[0,T]} \left|x(t)\right|^2<\varepsilon$ на траєкторії, яка задовольняє нерівність $\left|x(t-\tau)\right|^2 < \alpha\left|x(t)\right|^2$, причому $\lim\limits_{\delta\to 0}\eta(\delta)=0$.

Нехай знайдеться хоча б одна траєкторія $y(t)$ системи (1), (2), для якої $\sup\limits_{t\ge 0}\left|y(t)\right|>\varepsilon$ на ω-множині B_ε. Тоді в перший момент виходу з ε-смуги матимемо нерівність $\left|y(t^*-\tau)\right|^2 < \left|y(t^*)\right|^2$, $\forall\tau\in[0,t^*]$. Що означатиме, що в момент часу t^* знаходимося на кривій з умови (7). Одержали протиріччя, тобто тривіальний розв'язок системи (1) рівномірно-стохастично стійкий.

II) Доведення асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2).

Позначимо через $\delta_0>0$ максимальний рівень, над яким деяка траєкторія знаходиться для $t\ge 0$ та $\omega\in B_\varepsilon$.

Якщо такий рівень існує для довільного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2), то $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий. Далі міркування від супротивного. Існує $\delta_0 > 0$, але $\forall \eta > 0$ існує $T > 0$ таке, що даний розв'язок (1), (2) задовольняє нерівність $\left| x(T+\tau) \right|^2 < \delta_0^2 + \eta$, $\forall \omega \in B_\varepsilon$ і $\tau > 0$. Виберемо $\eta = \delta_0^2 (\alpha - 1)$ таким, щоб

$$\frac{\delta_0^2 + \eta}{\delta_0^2} \left| x(T+\tau) \right|^2 > \delta_0^2 + \eta > \left| x(T+\tau-\tau_1) \right|^2, \text{ де } 0 \le \tau_1 \le \Delta .$$

Тоді для $\forall \omega \in B_\varepsilon$ матимемо

$$\left| x(T+\tau) \right|^2 \le \delta_0^2 - \int_T^t f_\Delta (x_\tau) d\tau .$$

Звідки $\lim\limits_{\tau \to \infty} f_\Delta (x_\tau) = 0$, тобто $\left| x(T+t) \right| < \delta_0$ для $\forall t > 0$, що суперечить припущенню. **Теорема 2 доведена.**

Теорема 3. При виконанні умов леми 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) є виконання на розв'язках нерівності

$$F(t, x(t), k, l) \le -f_\Delta (x_t) + \beta \left[\left| x(t) \right|^2 - \left| x(t-\Delta) \right|^2 \right], \tag{8}$$

де праву частину (8) при $\beta > 0$ слід розглядати як додатно визначений неперервно-обмежений функціонал.

Доведення повторює міркування теореми 1, якщо вибрати функціонал вигляду

$$z(t) = \left| x(t) \right|^2 + \beta \int_{t-\Delta}^{t} \left| x(\tau) \right|^2 d\tau, \ \beta > 0 .$$

Зауважимо, що умова (8) для практичного застосування більш придатна, бо права частина, як правило, одержується як квадратична форма відносно фазових змінних $x(t),\ x(t-\Delta_i),\ x(t-\Delta_j)$.

3. Модельні задачі.

Модельна задача 1. Математичною моделлю багатьох задач механіки суцільного середовища є система стохастичних диференціально-різницевих рівнянь другого порядку [10]

$$dx_1(t) = x_2(t) dt ;$$

$$dx_2(t) = \left\{ -h(x_1(t)) + \int_{-r}^{0} f(\theta) g(x_1(t+\theta) - x_1(t)) d\theta \right\} dt + \sigma(x_t) dw(t) ,$$

де $\overline{x}_t \equiv \begin{pmatrix} x_1(t+\theta) \\ x_2(t+\theta) \end{pmatrix}$, $-r \le \theta \le 0$.

Розв’язання. Якщо вибрати функціонал

$$f_\Delta(t, x(t), x(t-r)) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + H(x_1(t)) + \int_{-r}^{0} f(\theta) G(x_1(\theta) - x_1(0)) d\theta ,$$

де $H(z) = \int_0^z h(\lambda) d\lambda$, $G(z) = \int_0^z g(\lambda) d\lambda$, а $h(\lambda)\lambda > 0$ і $g(\lambda)\lambda > 0$, $\lambda > 0$, $h(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$, функції $f(\theta)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ неперервно диференційовні, $\sigma(z)$ та $h(z)$ задовольняють локальну умову Ліпшиця, то

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x_2(t)) + \int_{-r}^{0} \frac{df(\theta)}{d\theta} G(x_1(t+\theta) - x_1(t)) d\theta - f(-r) G(x_1(t-r) - x_1(t)) < 0 .$$

Звідси, при умові, що $f(\theta) > 0$, $\frac{df(\theta)}{d\theta} \le 0$ та

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x_2(t)) \le f(-r) G(x_1(t-r) - x_1(t))$$

внаслідок недодатності підінтегрального виразу

$$\int_{-r}^{0} \frac{df(\theta)}{d\theta} G(x_1(t+\theta) - x_1(t)) d\theta \le 0 ,$$

одержимо $F(t, x(t), x(t-r)) \le 0$, що є умовою рівномірно-стохастичної стійкості.

Модельна задача 2. Розглянемо випадковий процес $x(t) \in R^1$, який є сильним розв'язком стохастичного рівняння Іто другого порядку

$$d^2 x(t) = -\left[a_1 x(t) + a_2 x(t-\Delta)\right] dt + b_1 x(t) dw_1(t) + b_2 x(t-\Delta) dw_2(t) \quad (9)$$

з початковою умовою

$$x(0) = \varphi_0; \;\; x'(0) = \varphi_1 ,$$

де $w_1(t)$ та $w_2(t)$ — незалежні.

Розв'язання. Позначимо $dx(t) = x_1(t) dt$, тоді (9) еквівалентна системі двох стохастичних рівнянь

$$dx(t) = x_1(t) dt ,$$

$$dx_1(t) = -\left[a_1 x_1(t) + a_2 x(t-\Delta)\right] dt + b_1 x_1(t) dw_1(t) + b_2 x(t-\Delta) dw_2(t) ,$$

яку слід розуміти як відповідні інтегральні рівняння

$$x(t) = \varphi_0 + \int_0^t x_1(s) ds ,$$

$$x_1(t)=\varphi_1-\int_0^t\left[a_1x_1(s)+a_2x(s-\Delta)\right]ds+b_1\int_0^t x_1(s)dw_1(s)+b_2\int_0^t x(s-\Delta)dw_2(s).$$

Розглянемо функціонал

$$z(t)=\left|y(t)\right|^2+b_2^2\int_{t-\Delta}^{t}\left|y(\tau)\right|d\tau,$$

де $y(t)\equiv\left(x_1(t),x(t-\Delta)\right)'$.

Вираз $F(t,x(t),k,l)$ (див. (4)) набуде вигляду

$$F(t,y(t))=-2a_1x_1^2-2a_2x_1(t)x(t-\Delta)+$$
$$+2x(t)x_1(t)+b_1^2x_1^2(t)+b_2^2x^2(t-\Delta)+b_2x^2(t)-b_2x^2(t-\Delta).$$

Тоді на кривих $\alpha x^2(t)>x^2(t-\Delta)$ для $\forall\alpha>0$ одержуємо

$$F(t,y(t))=-2a_1x_1^2(t)-2a_2\sqrt{\alpha}\left|x_1(t)\right|\left|x(t)\right|+2\left|x(t)\right|\left|x_1(t)\right|+$$
$$+b_1^2x_1^2(t)+b_2^2x^2(t)=(-2a_1+b_1^2)x_1^2(t)+2(a_2\sqrt{\alpha}+1)\left|x_1(t)\right|\left|x(t)\right|+b_2^2x^2(t).$$

Для від'ємної визначеності цієї квадратичної форми $F(t,y(t))$ відносно фазових координат $x(t)$, $x(t-\Delta)$ достатньо виконання умови

$$(-2a_1-b_1^2)b_2^2+(a_2\sqrt{\alpha}-1)^2<0. \tag{10}$$

Отже, за означенням 2 умова (10) є достатньою умовою асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $x(t)\equiv 0$ стохастичного рівняння (9).

Модельна задача 3. Стохастичною моделлю зміни положення суцвіття у рослин є система нелінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$dy(t)=y(t)dt,$$

$$dy(t)=\left[-\frac{a}{2}y(t)-\frac{b}{2}\sin x(t)+\frac{b}{2}\int_{-r}^{0}\cos(x(t+\theta)y(t+\theta))d\theta\right]dt+\frac{c}{2}y(t)dw(t), \tag{11}$$

де a, b, c та r додатні сталі.

Розв'язання. Система (11) еквівалентна рівнянню

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{a}{2}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{b}{2}\sin x(t-r)-\frac{c}{2}x(t)\frac{dw(t)}{dt}=0.$$

Слід розглянути функціонал

$$f_\Delta(x_t)=\frac{r}{2}y^2(t)+b(1-\cos x(t))+\frac{a}{2r}\int_{-r}^{0}\int_{s}^{0}y^2(t+\tau)d\tau ds.$$

Виписавши $F(t, x(t), x(t-r))$ і перевіривши умову (4), одержимо умову асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $y(t) \equiv 0$ системи (11) у вигляді нерівності $2a(a^2 r^2 - c^2) > b^2 r^4$.

Для дослідження стохастичних диференціально-різнецевих рівнянь Іто-Скорохода із запізненням слід розглядати функціонали Ляпунова-Красовського [7–9].

Висновки. Досліджено стохастичну рівномірну стійкість систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь. Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто з багатьма сталими загаюваннями.

Список використаних джерел:

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
2. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1968. — 354 с.
3. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
4. Свердан М. Л. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем / М. Л. Свердан, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Снятин : Вид-во «Над Прутом», 1996. — 448 с.
5. Королюк В. С. Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики / В. С. Королюк, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2005. — 525 с.
6. Королюк В. С. Теорія ймовірностей. Комп'ютерний практикум / В. С. Королюк, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2011. — 487 с.
7. Ясинский В. К. Устойчивость и оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предысторией / В. К. Ясинский, И. В. Ясинский. — К. : Вид-во «ТВіМС», 2004. — 363 с.
8. Ясинський В. К. Задачі стійкості і стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : Вид-во «ТВіМС», 2005. — 580 с.
9. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2011. — 738 с.
10. Kushner H. J. Approximations and weak convergence methods for random processes / H. J. Kushner. — MIT Press, 1984. — 252 p.

We obtain the sufficient contitions of the asymptotic uniformely stochastic stability of a trivial solution of the Cauchy problem for the stochastic differential-difference Ito equation with many constant delays.

Key words: *stochastic differential-difference equation, uniformely stochastic stability.*

Отримано: 19.09.2014