УДК 519.61

І. І. Лазурчак, д-р фіз.-мат. наук

Дрогобицький державний педагогічний університет, м. Дрогобич

РЕАЛІЗАЦІЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ LU-ФАКТОРИЗАЦІЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

У статті розглядається метод розгортання визначників розріджених матриць, що застосовується при реалізації функціонально-дискретного методу для розв'язування крайових задач на власні значення зі скалярними коефіцієнтами в диференціальному операторі.

Ключові слова: *крайові задачі, стрічкові матриці, визначник, редукція, системи комп'ютерної математики.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Проблема інформатизації суспільства вимагає детального аналізу сучасних систем навчання інформатичного та математичного циклів. Зокрема, освоєння класичних методів обчислень, впровадження нових і модифікованих алгоритмічних схем та програмних засобів у вищій школі повинно сприяти підвищенню інтенсивності, ефективності та якості процесу навчання.

Багато задач теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри для їх практичної реалізації на ПЕОМ вимагають потужних електронних ресурсів, характеристики яких стрімко зростають, проте мають певні технічні обмеження. Тому, поряд з удосконаленням обчислювальних засобів, необхідно підвищувати ефективність математичного програмного забезпечення. Оптимізація процесу обчислень є однією з ключових проблем сучасного інформаційного суспільства. При цьому основними факторами є не тільки економія оперативної пам'яті обчислювальних систем, а й оптимальне використання процесорного часу, навантаження адресних шин, обмін із зовнішніми пристроями, включаючи дискову пам'ять тощо.

Використання систем комп'ютерної математики (СКМ), які мають внутрішню мову функціонального та процедурного програмування, засоби символьних перетворень, потужні 3D-графічні, анімаційні засоби, математичні пакети розширень, відкривають можливості для ефективного застосування нових і модифікацію існуючих аналітичних методів та чисельних алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розробці чисельних методів розв'язування систем лінійних рівнянь великої розмірності та матрицями стрічкового типу присвячено багато робіт [1]. В них пропонується використання так званих методів прогонки, які, в свою чергу, отримується із відомого методу Гауса з врахуванням вказаних характеристик систем. Однак, ще один з прямих (точних) методів — метод LU-факторизації — за певними ознаками не поступається методу Гауса і надає можливість розглядати різні види розріджених систем.

На даний час розроблено декілька комп'ютерних математичних пакетів, що дають можливість спеціалістам розв'язувати велику кількість досить складних задач. Одними з найпотужніших СКМ є системи Mathematica (версії 7.x–9.x) [2] та Maple (версії 12.x–15.x) [3]. Система Mathematica є інтерактивна, тобто працює в режимі постійного діалогу з користувачем і, водночас, допускає програмний режим роботи, включаючи функціональний та процедурний стилі програмування. Вона гнучка та універсальна, так як передбачає числові процедури та аналітичні (символьні) перетворення, що дозволяють знаходження в аналітичному вигляді загальних розв'язків диференціальних рівнянь, визначників матриць та їх розгортання в степеневі поліноми, обчислення визначених та невласних інтегралів тощо.

Мета роботи — побудова модифікації методу LU-факторизації для обчислення та розкриття визначників стрічкових матриць зі сталими та змінними коефіцієнтами.

Виклад основного матеріалу дослідження. При розв'язуванні ряду крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) на власні значення, які формулюються наступним чином

$$u''(x)+\left[\lambda-q(x)\right]u(x)=0,\ x\in(0,1), \tag{1}$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=a\int_{1/4}^{3/4}u(\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

в якості нелокальних інтегральних умов (2) можуть бути вибрані крайові умови як в класичній (умови 1–3 роду), так і більш загальній постановці.

Функціонально-дискретний (FD-) метод, розроблений в роботі [4] і застосований до розв'язування задачі (1), (2), відіграє двояку роль. З одного боку він дозволяє досліджувати якісні властивості розв'язку задачі (1), (2) (дійсність власних значень, наявність комплексних власних значень, кратність спектру тощо). З другого боку запропонований метод дає алгоритм для чисельного знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2) з будь-яким наперед заданим порядком точності. Відмінною рисою FD-методу є те, що для широкого класу задач на власні значення, його точність тим вище, чим старший порядковий номер відповідного власного значення; він не вимагає розв'язування повної алгебраїчної задачі на власні значення; він допускає вибірковий рахунок, а отже, і розпаралелювання обчислень.

Нехай $q(x)=x,\ a=20.$ Тоді загальний розв'язок ЗДР (1) має вигляд

$$u_n\left(x,\lambda_n\right)=C_n\sqrt{\lambda_n-x}\left(J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\left(\lambda_n-x\right)^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_n^{3/2}\right)-\right.$$
$$\left.-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\left(\lambda_n-x\right)^{3/2}\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_n^{3/2}\right)\right), \tag{3}$$

де $J_{\pm 1/3}\left(z\right)$ — циліндричні функції або функції Бесселя 1 роду. Зазначимо, що тут враховано першу крайову умову з (2), а C_n — довільна стала.

Точні власні значення λ_n визначаються з другої крайової умови в (2), тобто з рівняння

$$\Delta\left(\lambda_n\right)\equiv u_n\left(1,\lambda_n\right)-20\int\limits_{1/4}^{3/4}u_n\left(x,\lambda_n\right)dx=0. \tag{4}$$

Для досягнення збіжності FD-методу була вибрана на рівномірній сітці

$$\Omega_N=\left\{x_i=\frac{i}{N}, i=0,\ldots,N\right\}$$

апроксимуюча функція $\overline{q}\left(x\right)$ у вигляді кусково-постійної функції з кількістю «сходинок», рівною N

$$\overline{q}\left(x\right)=\left\{\overline{q}_i=\frac{1}{2}\left[q\left(x_{i-1}\right)+q\left(x_i\right)\right], i=1,\ldots,N\right\}. \tag{5}$$

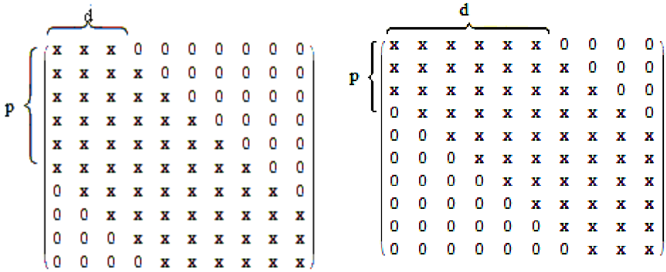
Якщо розв'язок базової задачі (1), (2) задати тепер у вигляді

$$u_n^{(0)}\left(x,\overline{q}\left(\cdot\right)\right)=$$
$$=\begin{cases} k_1\sin\sqrt{\lambda-\overline{q}_1}\,x, & 0\le x\le x_1,\quad i=1,\\ k_{2i-2}\sin\sqrt{\lambda-\overline{q}_i}\,x+k_{2i-1}\cos\sqrt{\lambda-\overline{q}_i}\,x, & x_{i-1}\le x\le x_i,\quad 2\le i\le N,\end{cases}$$

то наближення нульового рангу $\lambda_n^{(0)}\left(\overline{q}\left(\cdot\right)\right)$ та невідомі $k_i\left(i=1,\ldots,2N-1\right)$ знаходяться з умови існування нетривіального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} u_n^{(0)}\left(x_i,\overline{q}_i\right)=u_n^{(0)}\left(x_i,\overline{q}_{i+1}\right), \quad i=\overline{1,N-1},\\ \left[u_n^{(0)}\left(x,\overline{q}_i\right)\right]'_{x=x_i}=\left[u_n^{(0)}\left(x,\overline{q}_{i+1}\right)\right]'_{x=x_i} \quad i=\overline{1,N-1},\\ u_n^{(0)}\left(1,\overline{q}_N\right)=a\int\limits_{1/4}^{3/4}u_n^{(0)}\left(\xi,\overline{q}\left(\cdot\right)\right)d\xi.\end{cases} \tag{6}$$

У випадку $N = 8$ при виборі кусково-сталої функції $\overline{q}(x)$ необхідно знайти нетривіальний розв’язок системи (6), який існує у випадку, коли її визначник рівний нулю. Класичні методи передбачають обчислення визначника повної квадратної матриці. Проте, внаслідок постановки різних крайових умов, утворені матриці мають разріджену структуру, а саме, стрічкову форму (див. рис.1)



а) б)

Рис. 1. *Матриці стрічкового типу: а) $p \ge q$; б) $p <= q$*

Обчислення визначників таких стрічкових матриць можна організувати, модифікуючи відомий метод LU-факторизації. Суть його заключається в наступному.

Відомо, що довільну квадратну дійсну матрицю A можна розкласти на добуток двох трикутних матриць $A = LU$, одна з яких є нижньою (лівою) трикутною, а друга верхньою (правою) трикутною. Такий розклад є єдиним, якщо одну з діагоналей вказаних матриць будь-яким чином зафіксувати. Як правило, в матриці U діагональні елементи набувають значення 1. А саме,

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} \ 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ell_{21}\ \ell_{22}\ldots\ldots\ldots 0 \\ \text{--------------} \\ \ell_{n1}\ \ell_{n2}\ldots\ldots\ \ell_{nn} \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 1 \ u_{12}\ldots u_{1n} \\ 0 \ \ 1\ldots\ldots u_{2n} \\ \text{----------} \\ 0 \ \ 0\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

Тоді, розрахункові формули методу LU-факторизації набувають вигляд

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}, \quad i \ge j\ , \ i = \overline{1,n}\ , \tag{7}$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) / a_{ii}, \quad i < j\ , \ a_{ii} \ne 0, \ \ i, j = \overline{1,n}\ . \tag{8}$$

Тоді обчислення визначника матриці A зводиться до обчислення визначника матриці L

$$\det A = \det L = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii} \tag{9}$$

Проте, програмні засоби пакету LinearAlgebra СКМ Maple 12.x [3] не можуть забезпечити обчислення нулів розгорнутого в поліном детермінанта матриці розмірності 15×15 внаслідок недостатнього об'єму оперативної пам'яті або файлу ***підкачки***. Враховуючи те, що вказана матриця має 5-ти діагональну структуру, проблему вдається вирішити, використовуючи модифікацію методу LU-факторизації, розробленого для систем з розрідженими матрицями [5]. Крім цього, обчислення нев'язки $\left|\Delta\left(\lambda_n\right)\right|$ із (4) у разі комплексно спряжених власних значень вдається здійснити лише при виборі достатньо великого значення для системної змінної (*Digits*:= 800), яка встановлює кількість значущих цифр мантиси при проведенні чисельних розрахунків в арифметиці з плаваючою крапкою. Слід зазначити, що для обчислення інтегралів від власних функцій, які у свою чергу представляють інтеграли із змінною верхньою межею, необхідно для спрощення підінтегральних виразів використовувати серію процедур ***simplify, expand, fnormal, evalc***.

Вивчення багатьох задач призводить до необхідності виконання перетворень з матрицею, порядок яких може досягати кількох десятків і сотень тисяч, проте кількість ненульових під- та наддіагоналей є обмеженою та однаковою. Ці матриці називають $(2p+1)$-діагональними, якщо $a_{ij=0}$ при $|i-j|>p$, де p — кількість піддіагоналей (наддіагоналей). Число $2p+1$ називають шириною стрічки. Такі матриці утворюються, наприклад, при знаходженні власних значень диференціального рівняння з конкретно заданими крайовими умовами. У процесі розв'язування таких задач необхідно розкривати (розгортати) визначник тридіагональної матриці. Для обчислення визначника тридіагональної матриці розроблені спеціальні формули [5]. Проте їх застосування передбачає наявність скалярних (числових) значень елементів матриці. Якщо серед вказаних елементів зустрічаються невідомі (змінні величини), то на допомогу приходять лише СКМ. До математичних пакетів розширень цих систем, як правило, спеціальні методи не входять. А тому робота якраз і призначена для того, щоб доповнити згадані пакети з подальшим їх застосуванням для довільних стрічкових матриць.

У процесі розв'язування задач виникають випадки, коли необхідно обчислити визначник $(2p+1)$-діагональної матриці великої розмірності (наприклад, n = 10000). У такому випадку зручно використовувати метод LU-факторизації з дещо зміненими формулами:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=i_1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \ i \in \overline{1,n}, \ j \in \overline{i_1, i_2}, \ i \ge j, \tag{10}$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=m_2}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \Big/ l_{ii}, \ i \in \overline{1,n}, \ j \in \overline{i_1, i_2}, \ i < j, \tag{11}$$

$$i_1 = \max\{1, i-p\}, \ i_2 = \min\{n, i+p\}, \ m_1 = i_1, \ m_2 = \max\{1, j-p\}. \tag{12}$$

Формули (10), (11) вимагають паралельної програмної реалізації і, крім того, для масивів L та U необхідно оголошувати три масиви розмірності $n \times n$. Тому пропонується такий підхід до обчислення визначника стрічкової матриці з однаковою кількістю над- і під діагоналей, рівною p.

Із стрічкових квадратних матриць $A_{n\times n}$, $L_{n\times n}$ та $U_{n\times n}$ сформуємо прямокутні матриці $Q_{n\times(2p+1)}$ та $R_{n\times(2p+1)}$ за таким правилом:

$$q_{i,p+j-i+1} = a_{ij}, \quad r_{i,p+j-i+1} = \begin{cases} l_{ij}, & i \ge j, \\ u_{ij}, & i < j, \end{cases} \quad i \in \overline{1,n}, \quad j \in \overline{i_1, i_2}. \tag{13}$$

Інші елементи q_{ij} та r_{ij} дорівнюють нулю. В результаті утворена матриця Q, зображена на рис. 2 буде містити лише $2p$ нулів. Такий самий вигляд буде мати і матриця R.

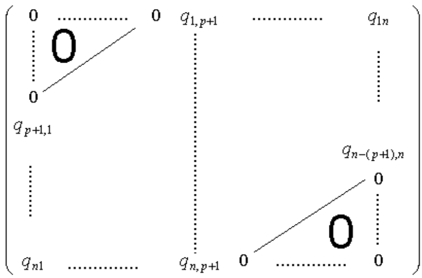


***Рис. 2.** Структура прямокутних матриць Q та R*

Тоді елементи матриці R згідно (13) будуть обчислюватися за формулами:

$$r_{ij} = q_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik} r_{i-p+k-1, j+p-k+1}, \ i \in \overline{1,n}, \ j \in \overline{1, p+1},$$

$$r_{ij} = \left(q_{ij} - \sum_{\substack{k=j-p \\ k>0}}^{p} r_{ik} r_{i-p+k-1, j+p-k+1} \right) \Big/ r_{i,p+1}, \tag{14}$$

де $i - p + k - 1 \ge 1, \ j + p - k + 1 \le 2p + 1, \ i \in \overline{1,n}, \ j \in \overline{p+2, 2p+1}.$

Тоді формула (9) набуває зміни

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} r_{i,p+1} \,. \qquad (15)$$

Крім того, існують випадки, коли у процесі розв'язування задачі необхідно обчислювати визначники стрічкових матриць з різною кількістю під- та наддіагоналей (рис. 1а, 1б)). Наведемо формули для обчислення визначника таких стрічкових матриць, використовуючи модифікацію методу LU-факторизації.

Нехай задана стрічкова матриця шириною $p+d+1$, де p — кількість піддіагоналей, d — кількість наддіагоналей. Тоді формули (10), (11), (15) залишаться без змін, а діапазони зміни індексів (12) набудуть вигляду:

$$i_1 = \max\{1, i-p\},\ i_2 = \min\{n, i+d\},$$

$$m_1 = \begin{cases} \max(1,\, i-p,\, j-d), \text{якщо } p \ge d, \\ \max(1,\, i-p), \qquad\ \text{якщо } p \le d, \end{cases} \qquad (16)$$

$$m_2 = \begin{cases} \max(1,\, j-d), \qquad\ \text{якщо } p \ge d, \\ \max(1, i-p,\, j-d), \text{якщо } p \le d, \end{cases}$$

Зауваження 1. У випадку, коли $p = q$, значення $m_1 = \max\{1, i-p\}$ при $i \ge j$, а значення $m_2 = \max\{1,\, j-d\}$ при $i < j$. Тоді вирази (12) і (16) є еквівалентними. Крім цього, коли матриця A є повністю заповненою (або її розрідженість не відповідає означенню стрічкового типу), значення $p = q = n-1$, а параметри з виразів (16) набувають значень $i_1 = m_1 = m_2 = 1, i_2 = n$ і формули (10), (11) збігатимуться з формулами (7), (8).

Тому зі стрічкових матриць A, L та U сформуємо прямокутні матриці $Q_{n\times(p+d+1)}$ та $R_{n\times(p+d+1)}$ наступним чином:

$$q_{i,p+j-i+1} = a_{ij},\ 1 \le p+j-i+1 \le p+d+1,$$

$$r_{i,p+j-i+1} = \begin{cases} l_{ij}, & i \ge j, \\ u_{ij}, & i < j, \end{cases}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad j \in \overline{i_1, i_2}.$$

Інші елементи q_{ij} та r_{ij} дорівнюють нулю.

Тоді формули (14) можна переписати у вигляді:

$$r_{ij} = q_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik} r_{i-p+k-1,j+p-k+1}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad j \in \overline{1, p+1},$$

$$r_{ij} = \left(q_{ij} - \sum_{\substack{k=j-d \\ k>0}}^{p} r_{ik} r_{i-p+k-1,j+p-k+1} \right) \Bigg/ r_{i,p+1},\ i-p+k-1 \ge 1,$$

$$j + p - k + 1 \le d + p + 1, i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{p+2, p+d+1}\ ,$$

а значення визначника обчислюється згідно (15).

Запропонований підхід дає змогу значно зменшити кількість обчислювальних затрат, включаючи об'єм оперативної RAM та час CPU.

Якщо системи комп'ютерної математики такі як Mathematica, Maple мають можливість задання матриць у вигляді стрічок, то класичні мови програмування (Pascal, Ci++) вимагають задання всіх елементів матриць, що в свою чергу вимагає виділення додаткового об'єму оперативної пам'яті ЕОМ.

Програмна реалізація запропонованого алгоритму проведена у кількох системах комп'ютерної математики таких як Mathematica 7.0, Maple 11.0, Maxima 5.16.0.

Приклад. При розв'язуванні крайової задачі Діріхле для звичайного диференціального рівняння другого порядку виду

$$u''(x) - q(x) * u(x) = -f(x),\ x \in (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 \qquad (17)$$

методом скінченних різниць проміжок (0, 1) покривається рівномірною сіткою Ω_N на n рівних частин. Тоді в кожній внутрішній точці розбиття друга похідна замінюється центральною скінченною різницею другого поряду, що приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - q(x_i)u_i = -f(x_i), \quad i = 1,...,n-1,\ u_0 = 0,\ u_n = 0.$$

Ця система якраз і має тридіагональну матрицю коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h^2} - q_1 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} - q_2 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} - q_3 & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Якщо вибрати $q(x) = x, \quad f(x) = 3x^2$, точний (аналітичний) розв'язок цієї задачі з урахуванням однорідних крайових умов з (17) буде мати вигляд

$$u_{анал}(x) = 1/((\sqrt{3}AiryAi[1] - AiryBi[1] \cdot Gamma[1/3] \cdot 3 \cdot \pi \cdot$$
$$\cdot(AiryAi[x] \cdot (-\sqrt{3}AiryAi[1] \cdot AiryBi\Pr ime[1] \cdot Gamma[1/3] + (\sqrt{3} \cdot$$
$$\cdot AiryAi[1] - AiryAi[1]) \cdot AiryBi\Pr ime[x] \cdot Gamma[1/3] + 3^{1/6} \cdot AiryBi[1] \cdot$$
$$\cdot(2 + 3^{1/3} \cdot AiryAi\Pr ime[1] \cdot Gamma[1/3])) + AiryBi[x] \cdot (-AiryAi\Pr ime[1] \cdot$$
$$\cdot AiryBi[1] \cdot Gamma[1/3] + AiryAi\Pr ime[x] \cdot (-\sqrt{3} \cdot AiryAi[1] + AiryBi[1]) \cdot$$
$$\cdot Gamma[1/3] + AiryAi[1] \cdot (-2 \cdot 3^{1/6} + AiryAi\Pr ime[1] \cdot Gamma[1/3])))$$

в якому присутні трансцендентні функції: гамма-функції $\Gamma(x)$, функції Ейрі ($Ai(x)$, $Bi(x)$) та їх похідні . В таблиці 1 приведені наближені та точні значення шуканої функції в 20-ти вузлах сітки.

Таблиця 1

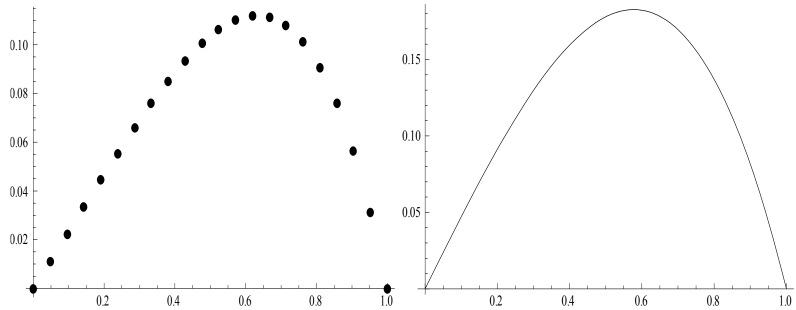
Порівняння наближених та точних розв'язків задачі (17)

x_i	**Наближені значення** $\overline{u}_i$	**Точні значення** u_i
0.05	0.0112149	0.0226251
0.10	0.0224132	0.0449291
0.15	0.0335547	0.0665953
0.20	0.0445682	0.0873116
0.25	0.0553541	0.10677
0.30	0.0657843	0.124667
0.35	0.0757017	0.140701
0.40	0.0849205	0.154574
0.45	0.0932255	0.165989
0.50	0.100372	0.17465
0.55	0.106083	0.18026
0.60	0.110055	0.182521
0.65	0.111947	0.18113
0.70	0.11139	0.175782
0.75	0.107978	0.166164
0.80	0.10127	0.151955
0.85	0.090788	0.132824
0.90	0.0760146	0.108429
0.95	0.056391	0.078413
1	0.0000005	0.0

Як видно максимальна норма відхилень складає величину порядку 0.07. Для того, щоб досягти більш високої точності (в межах $10^{-6} - 10^{-7}$) необхідно зменшувати крок сітки h, тобто збільшувати її розмірність, а значить і об'єм матриці A із (19) до $n = 1000$.

На рис.3а графік (*ListPlot*) поточково представляє наближені значення функції. Точний розв'язок, представлений на рис.3б у вигляді функції, отриманій в аналітичній формі.

Зауваження 2. Кількість арифметичних операцій, необхідних для реалізації модифікованого методу LU-факторизації для знаходження визначника тридіагональної матриці A становить величину $4n$, що є значно меншою від значення $O\left(n^3\right)$ — числа операцій, необхідних для методу Гауса чи LU-факторизації для повної матриці. Застосування вище введених прямокутних матриць, в свою чергу, вимагає $\left(n + d + 1\right)$ — елементів, що також значно менше величини n^2, яку займає повна квадратна матриця.



а) б)

Рис. 3. *Графіки дискретно заданої (а) та аналітичної заданої (б) функції*

Висновки і перспективи подальших розвідок. Розроблений комплекс програм реалізований у вигляді автоматизованої навчальної системи у візуальному середовищі Delphi із завантаженням exe-файлу пакету Mathematica 7.0 — директива WinExec (PChar) «маршрут до exe-файлу», SW_SHOWNORMAL та підключенням модулів, написаних засобами внутрішньої мови програмування СКМ Mathematica та Maple.

Запропонований підхід для розв’язування крайових задач з використанням модифікованого методу LU-факторизації пропонується застосовувати для наукових та практичних обчислень, а також використовувати в курсах «Чисельні методи» [3], «Символьні обчислення та комп`ютерна алгебра», які викладаються на більшості природничих спеціальностях.

Розширені функціональні можливості використання систем комп'ютерної математики Mathematica та Maple, а також описано спосіб їх підключення до інших програмних середовищ.

Використання в наукових дослідженнях та освітній сфері СКМ, які забезпечують обчислювальний процес в плаваючій арифметиці дуже високої точності і мають потужні графічні засоби та пакети розширень, відкривають перспективи ефективного застосування вже існуючих або модифікованих аналітично-чисельних методів, а також розробку і апробацію нових алгоритмів.

Список використаних джерел:

1. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М. : Наука, 1978. — 312 с.
2. Лазурчак І. І. Системи комп’ютерної математики : навчальний посібник / І. І. Лазурчак, Т. П. Кобильник. — Дрогобич : Коло, 2013. — 256 с.
3. Говорухин В. Компьютер в математическом исследовании. Maple, Matlab, LaTex / В. Говорухин, В. Цибулин. — СПб. : Питер, 2001. — 620 с.
4. Makarov V. L. On a functional difference method of arbitrary order of precision for solving the Sturm-Liouville problem with piecewise smooth coefficients / V. L. Makarov // Soviet. Math. Dorel. — 1992. — Vol. 44, № 2. — P. 391–396.

5. Кобильник Т. П. Модифікація методу LU-факторизації для обчислення визначників розріджених матриць / Т. П. Кобильник, І. І. Лазурчак, Л. А. Остапчук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька (27.09–01.10 2004, м. Дрогобич) : [тези доповідей]. – Львів, 2004. — С. 247.

In the article the method of deployment determinants sparse matrices used in the implementation of functional and discrete method for solving boundary value problems eigenvalue with scalar coefficients in the differential operator.

Key words: *boundary value problems, banded-matrix, determinant, reduction, computer algebra systems.*

Отримано: 15.07.2014

УДК 517.9

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук,
О. І. Неня, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана, м. Київ

ПРО ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ ХИЖАК-ЖЕРТВА З МОНОТОННОЮ ФУНКЦІЄЮ ВПЛИВУ

У роботі розглянуто систему рівнянь, яка є дискретним аналогом моделі хижак-жертва з монотонною функцією впливу та нескінченним запізненням. Досліджується проблема побудови умов перманентної поведінки динамічної моделі. Для отримання достатніх умов перманентної поведінки розв'язків системи, використано методи, які базуються на застосуванні теорем порівняння. Отримано нові оцінки обмеженості розв'язку рівняння «хижака» та покращенно оцінки розв'язку рівняння «жертви».

Ключові слова: *модель хижак-жертва, перманентність, функціональний вплив.*

Постановка задачі. Дослідження різноманітних питань динамічної взаємодії між елементами моделі хижак-жертва було та є одним з домінуючих, як в екології, так і в математичній біології [3]. Актуальними є проблеми локальної та глобальної стійкості, періодичності, перманентної поведінки розв'язку моделі хижак-жертва [7; 8].

Існують численні біологічні та фізіологічні свідоцтва [1; 2; 6], що в багатьох випадках (особливо, коли хижаки вимушені в пошуках здобичі ділитися жертвою або конкурувати за жертву), більш повною, в порівнянні з класичною моделлю хижак — жертва, є модель у якій темп приросту чисельності хижака має бути функцією не однієї змінної чисельності популяції жертви і не двох незалежних змінних чисельності жертв та хи-