УДК 519.85

О. Р. Мічута, аспірант

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ПРО СТІЙКІСТЬ ЧИСЛОВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ВПЛИВУ ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ НА ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ

Досліджено стійкість числових розв'язків задачі впливу хімічної суфозії на процеси фільтраційної консолідації шляхом прослідковування зміни величини просідань верхньої рухомої межі грунту при зміні густоти просторової та часової сіток.

Ключові слова: *нелінійна крайова задача, просідання, просторові змінні, стійкість числових розв'язків.*

Вступ. Однією із задач класичної механіки грунтів є задача фільтраційної консолідації водонасиченого грунту. Вона полягає у визначенні динаміки зміни надлишкових напорів в поровій рідині пористого середовища. Причиною виникнення цих надлишкових напорів є прикладені навантаження на грунтове середовище у вигляді цивільних та промислових споруд, або власна вага грунту у випадку будівництва гідротехнічних об'єктів. Сам процес розсіювання надлишкових напорів в ґрунті призводить до зближення частинок ґрунту і, в результаті, до ущільнення ґрунтової основи під впливом прикладеного навантаження. Такі процеси математично досить повно описані в роботі [5]. Крім того, в роботах [2; 3] класичні математичні моделі фільтраційної консолідації доповнені та вдосконалені шляхом урахування впливу тепло-солепереносу.

Однак, в цих роботах в якості порової рідини розглядався однокомпонентний сольовий розчин. Насправді ж, в природних умовах, поровий розчин є багатокомпонентним. Прикладом може бути загіпсований грунт, в пори якого починає надходити інший сольовий розчин в результаті аварії на хімічному підприємстві, або як результат неконтрольованого витоку. Загіпсовані ґрунти досить часто використовуються в якості основ для будівництва. Моделювання поведінки таких ґрунтів має свої особливості. Основна — це необхідність урахування розчинення гіпсу (хімічної суфозії) в процесі будівництва та експлуатації споруд на цих ґрунтах [11].

Дослідження впливу хімічної суфозії на процеси фільтраційної консолідації грунту наведено в роботах [7–10]. Проте в даних роботах не наведено якісної теорії нелінійних крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі. Крім того, також не досліджені теоретичні питання точності, збіжності та стійкості схем відшукання наближених розв’язків цих крайових задач. Проведення досліджень стійкості числових розв’язків на снові числових експериментів є ціллю даної статті.

Математична модель процесу фільтраційної консолідації. Математична модель R-вимірної задачі консолідації ґрунту в області Ω під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу S-компонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі робіт [2; 3] може бути описана наступною крайовою задачею [7–10]:

$$\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a}\times\left(\nabla\cdot\left(K_h(c,N,T)\nabla h-\sum_{s=1}^{S}(\upsilon_s\nabla c_s)-\upsilon_{\mathrm{T}}\nabla T\right)\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{S}\frac{\varepsilon_s(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma\rho_s a}\left(n\frac{\partial c_s}{\partial t}-e\frac{\partial N_s}{\partial t}\right)=\frac{\partial h}{\partial t},\quad X\in\Omega,\ s=\overline{1,S},t>0, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot(D_s\nabla c_s)+\nabla\cdot(D_{Ts}\nabla T)-u\nabla c_s=n\frac{\partial c_s}{\partial t}+\frac{\partial N_s}{\partial t},\ s=\overline{1,S},X\in\Omega,\ t>0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t}=-\gamma_s\left(C_s^{(\max)}(c,T)-c_s\right)N_s^{\alpha_s},s=\overline{1,S},\ X\in\Omega,\ t>0, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot(\lambda\nabla T)-\rho c_p u\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\ X\in\Omega,t>0, \tag{4}$$

$$u-ev=-K(c,N,T)\nabla h+\sum_{s=1}^{S}\upsilon_s\nabla c_s+\upsilon_T\nabla T,\ X\in\Omega,\ t>0, \tag{5}$$

$$h(X,0)=H_0(X),\quad c_s(X,0)=C_s^{(0)}(X),$$
$$N_s(X,0)=N_s^{(0)}(X),s=\overline{1,S},\ \ T(X,0)=T_0(X),\ X\in\overline{\Omega}, \tag{6}$$

$$l_h h(X,t)\big|_{\Gamma}=H_1(X,t),\ \ l_{c_s}c_s(X,t)\big|_{\Gamma}=C_s^{(1)}(X,t),\ \ X\in\Gamma,s=\overline{1,S},$$
$$l_T T(X,t)\big|_{\Gamma}=T_1(X,t),\ \ X\in\Gamma, \tag{7}$$

$$\frac{dl(X',t)}{dt}=-\int_{l(X',t)}^{L(X')}\frac{1}{\left(1-\sum_{s=1}^{S}\frac{N_s}{\rho_s}(1+e)\right)(1+e)}\times$$
$$\times\left(\frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi}\frac{\partial h}{\partial t}-(1+e)\sum_{s=1}^{S}\left(\frac{\gamma_s}{\rho_s}\left(C_s^{(\max)}-c_s\right)N^{\alpha_s}\right)dx,\right. \tag{8}$$

де $t\in[0;t_0]$, $l_h, l_{c_s}, l_T, s=\overline{1,S}$ — оператори, що задають граничні умови на межі Г для напору, концентрації солей у рідкій фазі та температури відповідно; $H_0(X)$, $C_s^{(0)}(X)$, $N_s^{(0)}(X)$, $s=\overline{1,S}$, $T_0(X)$, $H_1(X,t)$,

$T_1(X,t)$ — задані функції. Тут використані наступні позначення: $h(X,t)$ — надлишкові напори в поровій рідині; $c(X,t)=\left\{c_s(X,t)\right\}_{s=1}^{S}$, $N(X,t)=\left\{N_s(X,t)\right\}_{s=1}^{S}$ — вектори концентрації солей в рідкій та твердій фазах відповідно; e — коефіцієнт пористості; γ — питома вага сольового розчину; a — коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ — коефіцієнт бічного тиску грунту; $K\left(c,N,T\right)$ — коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури; $\upsilon_s=\{\upsilon_{sij}\}$, $s=\overline{1,S}$, $\upsilon_T=\{\upsilon_{Tij}\}$, $i,j=\overline{1,R}$ — коефіцієнти хімічного та термічного осмосів; ρ_s, $s=\overline{1,S}$ — густини солей в твердій фазі; n — пористість ґрунту; $D_s=\{D_{sij}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=\overline{1,R}$ — коефіцієнти дифузії; γ_s, $s=\overline{1,S}$ — коефіцієнти швидкості масообміну; α_s, $s=\overline{1,S}$ — показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [1]; $D_{Ts}=\{D_{Ts}^{(ij)}\}$, $s=\overline{1,S}$, $i,j=\overline{1,R}$ - коефіцієнти термічної дифузії; $C_s^{(\max)}$, $s=\overline{1,S}$ - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі; $\lambda=\{\lambda_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,R}$ — коефіцієнт теплопровідності вологого ґрунту; c — густина порового сольового розчину; c_ρ — питома теплоємність порового сольового розчину; c_T — об’ємна темлоємніть ґрунту; $u=(u_1;u_2;u_3;...;u_R)$ — вектор швидкості фільтрації; $v=(v_1;v_2;v_3;...;v_R)$ — вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

У процесі консолідації тверді частинки ґрунту зближаються. Як результат — верхня межа ґрунту просідає і область консолідації змінюється з часом. Крім того, зміна області консолідації може відбуватись і за рахунок хімічної суфозії. Тому крайова задача (1)–(7) доповнена кінематичною граничною умовою (8) на рухомій верхній межі. Дану умову виведено в R — вимірному випадку, припустивши, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Тут верхня межа ґрунту описується рівнянням $x_1=l\left(x_2,x_3,...,x_R,t\right)$, де x_1 — вертикальна координата. Для спрощення умову (8) запишемо у вигляді

$$\frac{dl\left(t\right)}{dt}=-\int\limits_{l\left(X',t\right)}^{L\left(X'\right)}F\left(c,N,h\right)dx. \qquad (9)$$

Числове розв'язання крайової задачі. Числове розв'язання крайової задачі (1)–(8) здійснене методом радіальних базисних функцій [2; 3; 14]. Покриємо область Ω вузловими точками $X_j = \left(x_{1j}^{(X)}, x_{2j}^{(X)}, ..., x_{Rj}^{(X)}\right)$, $j=\overline{1,m}$. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (1)–(8) шукаємо у вигляді

$$h(X,t) \approx \sum_{j=1}^{m} h_j(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_H\right),\ c_s(X,t) \approx \sum_{j=1}^{m} c_{sj}(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_s\right),$$
$$N_s(X,t) \approx \sum_{j=1}^{m} N_{sj}(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_{N_s}\right),\ s=\overline{1,S},\ T(X,t) \approx \sum_{j=1}^{m} T_j(t)\varphi_j\left(r_j,\varepsilon_T\right), \tag{10}$$

де $\varepsilon_h, \varepsilon_s, \varepsilon_{N_s}, \varepsilon_T$, $s=\overline{1,S}$, — параметри форми; $\varphi_j\left(r_j,\varepsilon\right)$ — радіальні базисні функції; $h_j(t), c_{sj}(t), N_{sj}(t), T_j(t)$, $s=\overline{1,S}$, — невідомі коефіцієнти, які залежать від часу;

$$r_j = \sqrt{\left(x_1 - x_{1j}^{(X)}\right)^2 + \left(x_2 - x_{2j}^{(X)}\right)^2 + ... + \left(x_R - x_{Rj}^{(X)}\right)^2},\ j=\overline{1,m}.$$

Покриємо замикання області $\overline{\Omega}$ колокаційними точками $Y_i = \left(x_{1i}^{(Y)}, x_{2i}^{(Y)}, ..., x_{Ri}^{(Y)}\right)$, $i=\overline{1,M}$. Введемо множини $\varpi = \{i : Y_i \in \Omega\}$, $\gamma_1^{(h)} = \left\{i : Y_i \in \Gamma_1^{(h)}\right\}$, $\gamma_2^{(h)} = \left\{i : Y_i \in \Gamma_2^{(h)}\right\}$. Тут $\Gamma_1^{(h)}$, $\Gamma_2^{(h)}$ — частини межі Γ, де для функції $h(X,t)$ задано граничні умови першого та другого роду відповідно. Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{\left(x_{1i}^{(Y)} - x_{1j}^{(X)}\right)^2 + ... + \left(x_{Ri}^{(Y)} - x_{Rj}^{(X)}\right)^2},\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,M},\ m \ge M .$$

Підставляючи (10) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $H(t) = \left\{h_j(t)\right\}_{j=1}^{m}$, $C_s(t) = \left\{C_{sj}(t)\right\}_{j=1}^{m}$, $N_s(t) = \left\{N_{sj}(t)\right\}_{j=1}^{m}$, $s=\overline{1,S}$, $T(t) = \left\{T_j(t)\right\}_{j=1}^{m}$:

$$M^{(1)}\frac{dH(t)}{dt} + L^{(1)}\left(C_s(t), N_s(t), T(t)\right)H(t) =$$
$$= K_s^{(1)}\frac{dN_s(t)}{dt} + A_s^{(1)}\frac{dC_s(t)}{dt} + A_s'^{(1)}C_s(t) + E'^{(1)}T(t) + F^{(1)}, \tag{11}$$

$$M_s^{(2)} \frac{dC_s(t)}{dt} + L_s^{(2)}\left(C_s(t), N_s(t), T(t)\right)C_s(t) = \\ = K_s^{(2)} \frac{dN_s(t)}{dt} + E'^{(2)}T(t) + F^{(2)}, s = \overline{1,S}. \quad (12)$$

$$M_s^{(3)} \frac{dN_s(t)}{dt} = L_s^{(3)}\left(C_s(t), N_s^{\alpha_s}(t)\right), s = \overline{1,S}, \quad (13)$$

$$M^{(4)} \frac{dT(t)}{dt} + L^{(4)}\left(C_s(t), N_s(t), T(t)\right)T(t) = F^{(4)}, \quad (14)$$

$$\tilde{M}^{(1)}H_0(t) = \tilde{F}^{(1)}, \tilde{M}_s^{(2)}C_s^{(0)}(t) = \tilde{F}^{(2)}, \\ \tilde{M}_s^{(3)}N_s^{(0)}(t) = \tilde{F}^{(3)}, s = \overline{1,S}, \tilde{M}^{(4)}T_0(t) = \tilde{F}^{(4)}, \quad (15)$$

де

$$M_s^{(k)} = \left\{m_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; \tilde{M}_s^{(k)} = \left\{\tilde{m}_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; L_s^{(k)} = \left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \quad k = 2,3;$$

$$M^{(k)} = \left\{m_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; \tilde{M}^{(k)} = \left\{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; L^{(k)} = \left\{l_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \quad k = 1,4;$$

$$K_s^{(k)} = \left\{k_{sij}^{(k)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; k = 1,2; \;\; A_s^{(1)} = \left\{a_{sij}^{(1)}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; A_s'^{(1)} = \left\{a'^{(1)}_{sij}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m},$$

$$E'^{(1)} = \left\{e'^{(1)}_{ij}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; E'^{(2)} = \left\{e'^{(2)}_{ij}\right\}_{i=1,\, j=1}^{M,\;\; m}, \; \tilde{F}^{(k)} = \left\{\tilde{f}_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m},$$

$$F^{(k)} = \left\{f_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{m}, \; k = \overline{1,4}, \; s = \overline{1,S}.$$

Елементи матриць задачі Коші (10)–(14) визначаються однотипно, але досить громіздко. Так для рівняння теплопровідності (4) маємо

$$m_{ij}^{(4)} = -c_T \varphi_j\left(r_j, \varepsilon_T\right), i = \varpi;$$

$$l_{sij}^{(4)} = \begin{cases} \nabla\left(\lambda \nabla \varphi_j\left(r_{ij}, \varepsilon_T\right)\right) - \rho c_\rho u \nabla \varphi_j\left(r_{ij}, \varepsilon_T\right), \; i = \varpi;. \\ \varphi_j\left(r_{ij}, \varepsilon_T\right), \quad i \in \gamma_1^{(T)}; \\ \nabla \varphi_j\left(r_{ij}, \varepsilon_T\right)n, i \in \gamma_2^{(T)}; \end{cases}$$

$$f_j^{(4)} = \begin{cases} T_1(t), i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0, \; i \in \gamma_2^{(T)}. \end{cases}$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (10)–(14) дискретизуємо часовий відрізок рівномірно з кроком φ. Для дискретизації рівнянь (10), (11), (13) по часу використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [12]. Оскільки рівняння (12) є нелінійними, то для їх лінеаризації використано метод Ньютона

$$M_s^{(3)} \frac{N_s^{(k+1)} - N_s^{(k)}}{\tau} = \alpha_s L_s^{(3)} \left(C_s^{(k)}, N_s^{(\alpha_s - 1)} (t_k) \right) \times$$
$$\times \left(N_s^{(k+1)} - N_s^{(k)} \right) + L_s^{(3)} \left(C_s^{(k)}, N_s^{\alpha_s} (t_k) \right), s = \overline{1, S}.$$

Отриману після дискретизації по часу систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів [13].

Для перерахунку координат вузлових та колокаційних точок використано кінематичну граничну умову (9):

$$\frac{x_{1j}^{(k+1)} - x_{1j}^{(k)}}{\tau} = - \int\limits_{l^{(k)}(X')}^{L(X')} F\left(c^{(k+1)}, N^{(k+1)}, h^{(k+1)} \right) dx.$$

Результати числових експериментів. В якості числових експериментів розглянуто дві задачі.

Задача 1. Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару засоленого глинистого ґрунту товщини *l*=25 м з такими вхідними даними:

$$\sigma = 0.4\,,\ e = 0.7\,,\ \alpha = 0.5\,,\ a = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{Н}\,,\ \rho_s = 2000\ \text{кг/м}^3\,,$$
$$C_1^{(\max)} = 350\ \text{г/л}\,,\ \gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4}\ \text{доба}^{-1}\,,\ C_0(x) = 8\ \text{г/л}\,,$$
$$\upsilon_c = 2.8 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^5/(\text{кг} \times \text{доба})\,,\ C_1(t) = C_1^{(\max)}\,,\ T_1(t) = 30^o\ \text{C}\,,$$
$$c_T = 2137\,\text{кДж}/\left(\text{м}^3 \times \text{град}\right),\ T_0(x) = 4^{\text{o}}\ \text{C},$$
$$\lambda = 108\,\text{кДж}/(\text{м} \times \text{град} \times \text{доба}),\ c_\rho = 4{,}2\,\text{кДж}/(\text{кг} \times \text{град}),$$
$$\upsilon_T = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3/(\text{доба} \times \text{град})\,.$$

Коефіцієнт фільтрації незасоленого ґрунту при фільтрації чистої води і при температурі $20^{\text{o}}\ \text{C}$ у випадку $K_h = const$ беремо рівним $K_h = 0{,}005\,\text{м/доба}$. Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах і температури визначали за формулою [4] $K_h(c, N, T) = k_0(c, T) \cdot e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}}$. Для апроксимації залежності $k_0(c,T)$ використано метод РБФ [2; 3].

Початковий розподіл солей $C_0(x) = 2\,\text{кг/м}^3$, $N_0(x) = \left(240 \left(-\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40 \right)$. Функція $C_0(x)$ відповідає слабо насиченому сольовому розчину (якщо врахувати, що $C_1^{(\max)}(x) = 350\,\text{кг/м}^3$). Початковий розподіл $N_0(x)$ має форму параболи з максимальним значенням $80\,\text{кг/м}^3$ в точці $x = l/2$. При наближенні до точок $x = 0$ та $x = l$ концентрація солей в твердій фазі зменшується $40\,\text{кг/м}^3$. Вважається, що біля верхньої межі часткове розсолення відбулося за рахунок атмосферних опадів, а біля нижньої — у зв'язку із впливом ґрунтових вод.

Кількість вузлових точок покладалася рівною 100, а колокаційних — 1000. В якості базисної використовувалась мультиквадратична радіальна функція $\varphi(r,\varepsilon) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури і величини просідань верхньої рухомої межі грунту на кожному часовому проміжку. Для перевірки стійкості отриманих розв'язків було проведено ряд експериментів визначення величини просідань верхньої рухомої межі грунту на різних часових сітках за час $t = 360$ діб. Результати наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Величина просідань верхньої рухомої межі грунту при зміні кроку по часу

Величина кроку τ	**Величина просідань, см.**	**Зміна величини просідань**
τ = 10 діб	101,6	4,4%
τ = 15 діб	100,13	2,89%
τ = 20 діб	98,99	1,72%
τ = 30 діб	97,32	—

З таблиці 1 видно, що при зменшенні кроку по часу спостерігається незначне зростання величини просідань верхньої рухомої межі грунту. Зокрема, при зменшенні значення величини τ в три рази просідання зросли всього на 4,4% (у випадку шаблонного значення при $\tau = 30$ діб). Це свідчить про те, що отриманий числовий розв'язок є стійким. Більше того, з таблиці 1 чітко прослідковується лінійна залежність між зміною у величині просідання та співвідношенням кроків по часу. Це відповідає теоретичній точності $O(\tau)$ використаної лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми [12].

Задача 2. Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару загіпсованого ґрунту товщиною l = 25 м. Грунт вважається однорідним та ізотропним за своїми характеристиками. З фундаменту споруди в грунт починає надходити висококонцентрований розчин кам'яної солі. Нехай $c_1(x,t)$, $N_1(x,t)$ — концентрації звичайної кам'яної солі NaCl, яка починає надходити в ґрунт з фундаменту споруди; $c_2(x,t)$, $N_2(x,t)$ — концентрації гіпсу. Вихідні дані беремо наступними:

$$n = 0.4,\ \ e = 0.7,\ \ \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5,\ \ a = 5\cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{Н},$$

$$\rho_1 = 2000\ \text{кг/м}^3,\ \ \rho_2 = 1900\,\text{кг/м}^3,\ \ C_1^{(\max)} = 350\ \text{г/л},$$

$$D_1 = 0.002\,\text{м}^2/\text{доба},\ \ D_2 = 0.02\ \text{м}^2/\text{доба},$$

$$\upsilon_1 = 2.8\cdot 10^{-5}\ \text{м}^5/\text{кг}\times\text{доба},\ \ \upsilon_2 = 2.9\cdot 10^{-5}\ \text{м}^5/\text{кг}\times\text{доба},$$

$$\upsilon_T = 2.8\cdot 10^{-5}\ \text{м}^5/\text{кг}\times\text{доба},\ \ \gamma_1 = 6.5\cdot 10^{-5}\ \text{доба}^{-1},\ q{=}10^5\ \text{кг/м}^2\text{доба}^2$$

$$\gamma = 10^4\,\text{кг}/(\text{м}^2\times\text{доба}^2),\ \ c_T = 2137\ \text{кДж/м}^3\times\text{град},$$

$$c_\rho = 4{,}2\,\text{кДж/кг}\times\text{град},\ \ \lambda = 108\ \text{кДж/м}\times\text{град}\times\text{доба},\ \ T_1 = 20^\circ\text{C},$$

$$T_2 = 4^\circ\text{C},\ \ C_0(x) = 0.1\ \text{г/л},\ \ C_2^{(0)}(x) = 10\ \text{г/л},\ \ T_0(x) = 4^\circ\text{C},$$

$$C_1^{(1)}(t) = 0.1\ \text{г/л},\ \ C_1^{(2)}(t) = 0.1\ \text{г/л},\ \ C_2^{(1)}(t) = 10\ \text{г/л},\ \ C_2^{(2)}(t) = 5\ \text{г/л}.$$

Коефіцієнт фільтрації визначався аналогічно до попередньої задачі. Загіпсованість ґрунту становить 20%, а густина ґрунту $\rho_g = 2000\,\text{кг/м}^3$.

Значення концентрації граничного насичення гіпсу $C_2^{(\max)}(C_1,T)$, що залежить від концентрації солі та температури отримано внаслідок апроксимації даних, взятих з [6, с. 50].

При вказаних даних знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури і величини просідань верхньої рухомої межі грунту на кожному часовому проміжку. Для перевірки стійкості отриманих розв'язків проведено ряд експериментів з визначення величини просідань верхньої рухомої межі грунту при різних кількостях вузлових та колокаційних точок, кроку по часу $\tau = 60$ діб, протягом загального часу $t = 360$ діб. Результати наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Величина просідань верхньої межі грунту при різній кількості вузлових та колокаційних точок

Кількість вузлових kx та колокаційних ky точок	**Величина просідань, см.**	**Зміна величини просідань**
$kx = 50$, $ky = 60$	42,25	0,14%
$kx = 100$, $ky = 120$	42,2	0,024%
$kx = 200$, $ky = 240$	42,19	—

З вищенаведеної таблиці видно, що при зменшенні кількості вузлових та колокаційних точок (збільшенні кроку по просторові змінній) спостерігається незначне зростання величини просідань верхньої рухомої межі грунту. Зокрема, при зменшенні кількості вузлових та колокаційних точок в чотири рази просідання зросли всього на 0,14%. Це свідчить про те, що отриманий числовий розв'язок є стійким відносно кроку по просторових змінних.

Висновки. У роботі досліджено стійкість числових розв'язків для задач впливу одно- та двокомпонентного сольових розчинів та температури на розподіл надлишкових напорів та на просідання верхньої межі масиву ґрунту. Дослідження проведені шляхом зміни густоти просторової та часової сіток (зміни величини кроку по просторових та часовій змінних). Отримані результати свідчать про незначні зміни величини просідання верхньої рухомої межі ґрунту на різних сітках. Тому можна зробити висновок, що отриманий числовий розв'язок є стійким. Подальші наші дослідження будуть стосуватися теоретичного дослідження якісних характеристик сформульованих нелінійних крайових задач та їх числових розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. — М., 1980. — С. 19–24.
2. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
3. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во НУВГП, 2010. — 277 с.
4. Добронравов О. О. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / О. О. Добронравов, В. С. Кремез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. — 2006. — Вип. 7. — С. 141–146.
5. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. — М. : Высш. шк., 1991. — 447 с.
6. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. — М. : Недра, 1986. — 208 с.
7. Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та неізотермічних умов на фільтраційну консолідацію тіла ґрунтової греблі / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2012. — Вип. 3. — С. 209–215.
8. Мічута О. Р. Математичне моделювання консолідації грунтів з врахуванням неізотермічних умов та впливу багатокомпонентних хімічних розчинів в одновимірному випадку / О. Р. Мічута // Наукові записки НаУКМА. Сер. комп. науки. — 2012. — Т. 138. — С. 100–105.
9. Мичута О. Р. Математическое моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизо-

термических условиях / О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартинюк // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 3–18.
10. Мічута О. Р. R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2013. — Вип. 2. — С. 196–204.
11. Петрухин В. П. Расчет суффозионных деформаций оснований в засоленных грунтах / В. П. Петрухин // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1995. — № 5. — С. 11–13.
12. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Научный мир, 2003. — 316 с.
13. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри / С. М. Шахно. — Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. — 243 с.
14. Buhmann M. D. Radial Basis functions: Theory and implementations / M. D. Buhmann. — Cambridge University Press, 2003. — 272 p.

The stability of numerical solutions of the chemical suffosion effect on the filtration consolidation processes was investigated by tracing the subsidence change of upper moving soil border while the density of spatial and time grids had been changing.

Key words: *nonlinear boundary-value problem, subsidence, spatial variables, numerical solutions stability.*

Отримано: 14.07.2014

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРОБЛЕМА СТАБІЛІЗАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянуто проблему стабілізації стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: *диференціально-функціональні рівняння, системи випадкової структури, імпульсні марковські збурення, скінченне запізнення.*

Вступ. Проблема стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівняннь с імпульсними марковскими збуреннями та скінченним запізненням проаналізована в роботах [1], [3], [6].