14. Михалевич В. М. Проблема неопределенности в задачах принятия решения и принцип гарантированного результата : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.05.02 / В. М. Михалевич ; Нац. ун-т «Києво-Могил. акад.». — К., 2013. — 316 с.
15. Кирилюк В. С. Полиэдральные меры риска и робастные решения / В. С. Кирилюк, А. С. Бабанин // Теорія оптимальних рішень. — К. : Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2008. — Вип. 7. — С. 66–72.
16. Chateauneuf A. Monotone continuous multiple priors / A. Chateauneuf, F. Maccheroni, M. Marinacci, J.-M. Tallon // Economic Theory. — 2005. — Vol. 26. — P. 973–982.
17. Arrow K. Essays in the theory of risk-bearing / K. Arrow. — Chicago : Markham Pub. Co., 1971. — 278 p.

For the class of decision-making problems in which consequences depend on the results of repeated random trials, the axiomatic decision-making model based on the principle of guaranteed result has been introduced in [1]. In the model the decision losses are evaluated as maximal expected losses, where maximum is taken over some set of finitely additive probabilities on the set of possible outcomes of the random trial. This paper introduces the additional preference continuity condition guaranteeing countable additivity of probabilities.

Key words: *preference relation, optimality criterion, the principle of guaranteed result, finitely additive probabilities, continuous preferences.*

Отримано: 10.07.2014

УДК 519.2:519.6

А. О. Пашко, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

У роботі досліджуються алгоритми побудови субгауссових моделей для гауссових стаціонарних випадкових процесів з неперервним спектром. Отримано оцінки для випадкових процесів з стандартними кореляційними функціями, що покращують існуючі. Побудовано алгоритми для моделювання випадкових процесів з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах.

Ключові слова: *гауссовий процес, субгауссові моделі, точність моделі, надійність моделі, спектральне зображення.*

Вступ. У роботі продовжуються дослідження алгоритмів побудови субгауссових моделей для гауссових стаціонарних випадкових процесів та полів [1–5]. Для побудови моделей випадкових процесів використовуються їх спектральні зображення у вигляді стохастичних інтегралів. У роботах [6–9] досліджувались методи моделювання та умови слабкої збіжності гауссових моделей. В цих же роботах для оцінки точності моделювання запропоновано використовувати оцінки моментів різниці процесу і моделі. В роботах [4–5] досліджувались оцінки швидкості збіжності субгауссових моделей в різних функціональних просторах. Це дозволило побудувати алгоритми моделювання випадкових процесів та полів з заданими точністю і надійністю для різних функціональних просторів.

В якості моделі запропоновано розглядати строго субгауссові випадкові спектральні розклади випадкових процесів. Дослідження властивостей субгауссових випадкових процесів наведені в роботах [10–11].

При побудові моделей гауссових випадкових процесів з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах необхідно оцінювати приріст $F(\infty)-F(\Lambda)$, де $\Lambda>0$, $F(\Lambda)$ — спектральна функція процесу [12]. Якщо спектральна функція відома, то це не викликає ускладнень. Інша ситуація, коли відома лише кореляційна функція, а спектральну функцію неможливо знайти у явному вигляді.

У роботі для гауссових стаціонарних процесів з неперервним спектром, що мають кореляційні функції з заданими властивостями, покращуються оцінки отримані в [1–5].

1. Основні поняття та означення. Нехай $\xi(t)$ — дійсний гауссовий випадковий стаціонарний процес з $E\xi(t)=0,$ $R(\tau)$ — кореляційна функція $\xi(t)$, $F(\lambda)$ — спектральна функція процесу $\xi(t)$, $R(\tau)=\int\limits_0^\infty \cos\left(\lambda t\right) dF(\lambda)$. Випадковий процес має зображення

$$\xi(t)=\int\limits_0^\infty \cos\left(\lambda t\right) d\xi_1(\lambda)+\int\limits_0^\infty \sin\left(\lambda t\right) d\xi_2(\lambda),$$

де $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для $0\le\lambda_1<\lambda_2$ має місце

$$E\left(\xi_1(\lambda_2)-\xi_1(\lambda_1)\right)^2=E\left(\xi_2(\lambda_2)-\xi_2(\lambda_1)\right)^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1).$$

Нехай D_Λ — деяке розбиття інтервалу $\left[0,\Lambda\right]$, $D_\Lambda: 0=\lambda_0<$ $<\lambda_1<\ldots<\lambda_M=\Lambda$. Модель випадкового процесу $\xi(t)$ будемо будувати у вигляді

$$S_M\left(t,\Lambda\right)=\sum_{i=0}^{M-1}\left[\cos\left(\lambda_i t\right)\left(\xi_1(\lambda_{i+1})-\xi_1(\lambda_i)\right)+\sin\left(\lambda_i t\right)\left(\xi_2(\lambda_{i+1})-\xi_2(\lambda_i)\right)\right].$$

Модель процесу $\xi(t)$ можна отримати, змоделювавши суму $\sum_{i=0}^{M-1}\left[\cos\left(\lambda_i t\right)\eta_{1i} + \sin\left(\lambda_i t\right)\eta_{2i}\right]$, де $\left\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\right\}$ — некорельовані центровані гауссові випадкові величини з $E\left(\eta_{1i}\right)^2 = E\left(\eta_{2i}\right)^2 = F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)$. Враховуючи точність роботи з дійсними числами та похибки алгоритмів побудови гауссових випадкових величин будемо розглядати $\left\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\right\}$ як послідовності некорельованих строго субгауссових випадкових величин.

Нехай $\xi(t)$ та всі $S_M\left(t, \Lambda\right)$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа $\delta > 0$ та $0 < \varepsilon < 1$.

Означення 1. Модель $S_M\left(t, \Lambda\right)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо має місце нерівність $P\left\{\left\|\xi(t) - S_M\left(t, \Lambda\right)\right\| > \delta\right\} \le \varepsilon.$

2. Основні результати.

Теорема 1. Нехай $G\left(x\right)$ — функція розподілу симетричної випадкової величини, $\varphi(t)$ — відповідна їй характеристична функція. Якщо при $|t| < t_0$ виконується нерівність $1-\varphi(t) \le \sum_{j=1}^{K}\psi_j(t)$, де $\psi_j(t) \ge 0,\ j = 1,2...K$ — монотонно неспадні функції, $\psi_j(0) = 0$, такі, що при $|uv| < t_0$, $\psi_j(uv) \le \psi_j^1(u)\psi_j^2(u)$, де $\psi_j^i(u) \ge 0, i = 1,2,\ \ j = 1,2...K$ — монотонно неспадні функції, $\psi_j^i(0) = 0$, та $F(h) = G(h) - G(-h)$, тоді виконуються нерівності

1) якщо

$$h > \frac{2}{t_0}, \text{ то } 1 - F(h) \le \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{K} \mathrm{H}_{0,\psi_j}\left(\frac{h}{2}\right), \tag{1}$$

2) якщо

$$h > \frac{3}{t_0}, \text{ то } 1 - F(h) \le \frac{8}{3\pi}\sum_{j=1}^{K} \mathrm{H}_{1,\psi_j}\left(\frac{h}{3}\right), \tag{2}$$

3) якщо

$$h > \frac{4}{t_0}, \text{ то } 1 - F(h) \le \frac{3}{\pi}\sum_{j=1}^{K} \mathrm{H}_{2,\psi_j}\left(\frac{h}{4}\right), \tag{3}$$

де $\mathrm{H}_{n,\psi_j}\left(h\right)=\psi_j^1\left(\frac{1}{h}\right)\left(\int\limits_0^1\psi_j^2(u)du+\int\limits_1^{ht_0}\frac{\psi_j^2(u)}{u^{n+2}}du\right)+\frac{2}{(n+1)\left(ht_0\right)^{n+1}}$,

Теорема являє собою узагальнений результат леми 4 із [2].

Наслідок 1. Якщо при $\left|t\right|<t_0$ $1-\varphi(t)\le C_\alpha\left|t\right|^\alpha$, $0\le\alpha\le 2$, то

1) якщо

$$h>\frac{2}{t_0},\ 0\le\alpha<1,\text{ то } 1-F(h)\le\frac{2}{\pi}\mathrm{H}'_{0,\alpha}\left(\frac{h}{2}\right), \tag{4}$$

2) якщо

$$h>\frac{3}{t_0},\ 0\le\alpha<2,\text{ то } 1-F(h)\le\frac{8}{3\pi}\mathrm{H}'_{1,\alpha}\left(\frac{h}{3}\right), \tag{5}$$

3) якщо

$$h>\frac{4}{t_0},\ 0\le\alpha\le 2,\text{ то } 1-F(h)\le\frac{3}{\pi}\mathrm{H}'_{2,\alpha}\left(\frac{h}{4}\right), \tag{6}$$

де $H'_{n,\alpha}(h)=\frac{C_\alpha}{h^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{n+1-\alpha}\right)+\frac{1}{\left(ht_0\right)^{n+1}}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{C_\alpha t_0^\alpha}{n+1-\alpha}\right)$.

Отримані оцінки залежить від α, так при малих α кращою є оцінка (4), а при $\alpha>1$ кращою є оцінка (6). Оцінку (5) необхідно порівнювати в кожному конкретному випадку. Отримані результати можна використовувати для оцінки $F(\infty)-F(\Lambda)$.

Якщо для $R(\tau)$ кореляційної функції та $F(\lambda)$ спектральної функції процесу $\xi(t)$ виконується $R(0)=F\left(\infty\right)=1$ (в загальному випадку можна покласти $R(\tau)=\frac{R(\tau)}{R(0)}$ та $F(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{F(\infty)}$), то $R(\tau)$ можна розглядати як характеристичну функцію деякої випадкової величини із симетричною функцією розподілу $G(\lambda)$ і при $\lambda>0$ має місце $F(\lambda)=G(\lambda)-G(-\lambda)$.

Теорема 2. Нехай для кореляційної функції $R(\tau)$ і для деякого t_0 при $\left|t\right|<t_0$ виконується умова $1-\frac{R(t)}{R\left(\infty\right)}\le\sum\limits_{j=1}^{K}\psi_j(t)$, де $\psi_j(t)$, $j=1,2...K$ задовольняють умови теореми 1. Тоді для $1-\frac{F(\lambda)}{F(\infty)}$ мають місце оцінки (1)–(3) теореми 1.

Доведення теореми безпосередньо випливає з теореми 1.

Нехай кореляційна функція $R(\tau)$ має похідні порядку $4k$, $k=1,2,\ldots$. Оскільки $R^{(4k)}(\tau)=(-1)^{2k}\int\limits_0^\infty \lambda^{4k}\cos(\lambda\tau)dF(\lambda)$, то $R^{(4k)}(\tau)$ — кореляційна функція випадкового процесу зі спектральною функцією $F_k(\lambda)=\int\limits_0^\lambda u^{4k}dF(u)$.

Має місце

$$F_k(\infty)-F_k(\Lambda)=\int\limits_\Lambda^\infty u^{4k}dF(u)\ge\Lambda^{4k}\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right),$$

тоді $F(\infty)-F(\Lambda)\le\dfrac{1}{\Lambda^{4k}}\left(F_k(\infty)-F_k(\Lambda)\right)$.

Наслідок 2. Якщо при $k=1,2,\ldots$ для кореляційної функції $R^{(4k)}(\tau)$ і для деякого t_0 при $|t|<t_0$ виконується умова $1-\dfrac{R^{(4k)}(t)}{R^{(4k)}(\infty)}\le\sum\limits_{j=1}^{K}\psi_{j,k}(t)$, де $\psi_{j,k}(t),\ j=1,2\ldots K$ задовольняють умови теореми 1. Тоді для $1-\dfrac{F_k(\lambda)}{F_k(\infty)}$ мають місце оцінки

1) якщо $h>\dfrac{2}{t_0}$, то $F_k(\infty)-F_k(h)\le\dfrac{2}{\pi}F_k(\infty)\sum\limits_{j=1}^{K}\mathrm{H}_{0,\psi_j}\left(\dfrac{h}{2}\right)$,

2) якщо $h>\dfrac{3}{t_0}$, то $F_k(\infty)-F_k(h)\le\dfrac{8}{3\pi}F_k(\infty)\sum\limits_{j=1}^{K}\mathrm{H}_{1,\psi_j}\left(\dfrac{h}{3}\right)$,

3) якщо $h>\dfrac{4}{t_0}$, то $F_k(\infty)-F_k(h)\le\dfrac{3}{\pi}F_k(\infty)\sum\limits_{j=1}^{K}\mathrm{H}_{2,\psi_j}\left(\dfrac{h}{4}\right)$,

де $\mathrm{H}_{n,\psi_j}(h)=\psi_j^1\left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\int\limits_0^1\psi_j^2(u)du+\int\limits_1^{ht_0}\dfrac{\psi_j^2(u)}{u^{n+2}}du\right)+\dfrac{2}{(n+1)(ht_0)^{n+1}}$.

Доведення безпосередньо випливає з теореми 2.

Наслідок 3. Нехай для кореляційної функції $R(\tau)$ і для деякого t_0 при $|t|<t_0$ виконується умова $1-\dfrac{R(t)}{R(\infty)}\le C_\alpha|t|^\alpha$, $0\le\alpha\le2$. Тоді для $1-\dfrac{F(\lambda)}{F(\infty)}$ мають місце оцінки

1) якщо $h > \dfrac{2}{t_0}$, $0 \le \alpha < 1$, то $1 - \dfrac{F(h)}{F(\infty)} \le \dfrac{2}{\pi} \mathrm{H}'_{0,\alpha}\left(\dfrac{h}{2}\right)$,

2) якщо $h > \dfrac{3}{t_0}$, $0 \le \alpha < 2$, то $1 - \dfrac{F(h)}{F(\infty)} \le \dfrac{8}{3\pi} \mathrm{H}'_{1,\alpha}\left(\dfrac{h}{3}\right)$,

3) якщо $h > \dfrac{4}{t_0}$, $0 \le \alpha \le 2$, то $1 - \dfrac{F(h)}{F(\infty)} \le \dfrac{3}{\pi} \mathrm{H}'_{2,\alpha}\left(\dfrac{h}{4}\right)$

де $H'_{n,\alpha}(h) = \dfrac{C_\alpha}{h^\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha+1} + \dfrac{1}{n+1-\alpha}\right) + \dfrac{1}{(ht_0)^{n+1}}\left(\dfrac{2}{n+1} - \dfrac{C_\alpha t_0^\alpha}{n+1-\alpha}\right)$.

Доведення безпосередньо слідує з наслідку 1 і теореми 2.

Розглянемо стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з кореляційною функцією $R(\tau) = A_\alpha \exp\left\{-C|\tau|^\alpha\right\}\cos(\beta\tau)$, де $A_\alpha > 0$, $C > 0$, $\beta > 0$ та $1 < \alpha \le 2$. Оцінимо $F(\infty) - F(\Lambda)$. Покладемо $R(0) = F(\infty) = A_\alpha = 1$.

Нехай $1 < \alpha < 2$, оскільки при $x > 0$ мають місце нерівності $\exp\{-x\} \ge 1 - x$ та $\cos(x) \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$, то при $|\tau| \le t_0 = \min\left(C^{-\frac{1}{\alpha}}, \sqrt{2}\beta^{-1}\right)$

маємо

$$1 - R(\tau) \le 1 - \left(1 - C|\tau|^\alpha\right)\left(1 - \frac{\beta^2\tau^2}{2}\right) =$$

$$= C|\tau|^\alpha + \frac{\beta^2\tau^2}{2} - C|\tau|^\alpha\left(\frac{\beta^2\tau^2}{2}\right) \le C|\tau|^\alpha + \frac{\beta^2\tau^2}{2}.$$

Таким чином, згідно наслідку 1, при $h > \dfrac{4}{t_0}$ маємо

$$1 - F(h) \le \frac{3}{\pi}\left(H'_{2,\alpha}\left(\frac{h}{4}\right) + H'_{2,2}\left(\frac{h}{4}\right)\right),$$

де $H'_{2,2}(a) = \dfrac{3\beta^2}{4a^2}$ та $H'_{2,\alpha}(a) = \dfrac{C}{a^\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha+1} + \dfrac{1}{3-\alpha}\right)$.

Тобто, при $h > \dfrac{4}{t_0}$ маємо

$$F(\infty) - F(h) \le \frac{3A_\alpha}{\pi}\left(H'_{2,\alpha}\left(\frac{h}{4}\right) + H'_{2,2}\left(\frac{h}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{3A_\alpha}{\pi}\left(\frac{4^\alpha C}{h^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{3-\alpha}\right)+\frac{12\beta^2}{h^2}\right).$$

Нехай $\alpha = 2$. Відмітимо, що $R(\tau) = \exp\left\{-C\left|\tau\right|^2\right\}\cos\left(\beta\tau\right)$ — це добуток двох характеристичних функцій: $\psi_1(\tau) = \exp\left\{-C\left|\tau\right|^2\right\}$ — характеристична функція випадкової величини ζ_1, що має нормальний розподіл із $E\zeta_1 = 0$, $E\zeta_1^2 = \frac{1}{2C}$, а $\psi_2\left(\tau\right) = \cos\left(\beta\tau\right)$ — характеристична функція випадкової величини ζ_2 із законом розподілу $P\left\{\zeta_2 = \beta\right\} = \frac{1}{2}$ та $P\left\{\zeta_2 = -\beta\right\} = \frac{1}{2}$.

Таким чином $R(\tau)$ — це характеристична функція випадкової величини $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, де ζ_1 та ζ_2 незалежні. Тобто, за умови $\lambda > 0$

$$1 - F(h) = P\left\{\left|\zeta\right| > h\right\} = P\left\{\left|\zeta_1+\zeta_2\right| > h\right\} =$$

$$= \frac{P\left\{\left|\zeta_1+\beta\right| > h\right\}}{2} + \frac{P\left\{\left|\zeta_1-\beta\right| > h\right\}}{2}.$$

Якщо $h > \beta$, то легко бачити, що

$$1 - F(h) = \frac{1}{2}\left(P\left\{\left|\zeta_1\right| > h-\beta\right\} + P\left\{\left|\zeta_1\right| > h+\beta\right\}\right) =$$

$$= \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\lambda-h}^{\infty}\exp\left\{-t^2C\right\}dt + \int\limits_{\lambda+h}^{\infty}\exp\left\{-t^2C\right\}dt\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{(h-\beta)\sqrt{C}}^{\infty}\exp\left\{-u^2\right\}du + \int\limits_{(h+\beta)\sqrt{C}}^{\infty}\exp\left\{-u^2\right\}du\right).$$

Отже,

$$1 - F(h) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{(h-\beta)\sqrt{C}}\exp\left\{-C(h-\beta)^2\right\} + \frac{2}{(h+\beta)\sqrt{C}}\exp\left\{-C(h+\beta)^2\right\}\right).$$

Тобто, при $h > \beta$ маємо нерівність

$$F(\infty) - F(h) \le$$

$$\le \frac{2A_2}{\sqrt{\pi C}}\left(\frac{2}{(h-\beta)\sqrt{C}}\exp\left\{-C(h-\beta)^2\right\} + \frac{2}{(h+\beta)\sqrt{C}}\exp\left\{-C(h+\beta)^2\right\}\right).$$

3. Оцінка параметрів моделі. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ заданий на інтервалі $\left[0,T\right], T>0$. Модель випадкового процесу $\xi(t)$ будемо будувати у вигляді $S_M\left(t,\Lambda\right)=\sum\limits_{i=0}^{M-1}\left[\cos\left(\lambda_i t\right)\eta_{1i}+\sin\left(\lambda_i t\right)\eta_{2i}\right]$, де $D_\Lambda: 0=\lambda_0<\lambda_1<...<\lambda_M=\Lambda$ — рівномірне розбиття інтервалу $\left[0,\Lambda\right]$, $\left\{\eta_{1i},\eta_{2i}\right\}$ — незалежні строго субгауссові випадкові величини з

$$E\left(\eta_{li}\right)^2=F\left(u_{i+1}\right)-F(u_i)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}}\int\limits_0^\infty\cos\left(v\tau\right)R\left(\tau\right)d\tau dv=$$

$$=\frac{2A_\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\sin\left(\frac{\left(i+1\right)\Lambda\tau}{M}\right)-\sin\left(\frac{i\Lambda\tau}{M}\right)\right)\exp\left\{-C\left|\tau\right|^\alpha\right\}\frac{\cos\left(\beta\tau\right)}{\tau}d\tau\,.$$

Знайдемо такі Λ та M, щоб вибрана модель наближала процес $\xi(t)$ з заданими точністю δ та надійністю $1-\varepsilon$ у $L_2\left(T\right)$.

Теорема 3. Модель $S_M\left(t,\Lambda\right)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ у нормі простору $L_2(T)$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності

$$B_{M,\Lambda}<\delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{B_{M,\Lambda}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{M,\Lambda}}\right\}\le\varepsilon\,,$$

$$\text{де } B_{M,\Lambda}=\int\limits_T E\left(\xi(t)-S_M(t,\Lambda)\right)^2 d\mu(t)\,.$$

Доведення теореми можна знайти в роботах [4–5].

У випадку рівномірного розбиття відрізка $\left[0,\Lambda\right]$ — $B_{M,\Lambda}\le$ $\le\frac{T^3\Lambda^2}{3M^2}F(\Lambda)+T\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right)$.

За теоремою 3 для шуканих Λ та M повинні виконуватись нерівності $B_{M,\Lambda}\le\delta^2$ та $B_{M,\Lambda}\le\frac{\delta^2}{s_\varepsilon}$, де s_ε — корінь рівняння $\exp\left\{\frac{1}{2}-\frac{s^2}{2}\right\}s=\varepsilon$. Розглянемо такі Λ, що $\Lambda\ge\Lambda_0=\max\left(1,\frac{1}{t_0}\right)$, де $t_0=\min\left(C^{-\frac{1}{\alpha}},\sqrt{2}\beta^{-1}\right)$. Тоді маємо $F(\infty)-F(\Lambda)\le\frac{A_\alpha L_\alpha}{\Lambda^\alpha}$, де $L_\alpha=\frac{3}{\pi}\left(\frac{C4^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(3-\alpha)}+12\beta^2\right)$.

Отже, $B_{M,\Lambda} \le \frac{T^3\Lambda^2}{3M^2}F(\infty) + \frac{TA_\alpha L_\alpha}{\Lambda^\alpha}$. Мінімізуємо праву частину по Λ, тобто $\Lambda_M = \left(\frac{3L_\alpha \alpha M^2}{2T^2}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}$, то отримаємо нерівність

$$B_{M,\Lambda} \le \frac{T^{\frac{3\alpha+2}{\alpha+2}}}{M^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}\left(\frac{2A_\alpha}{3}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\left(L_\alpha A_\alpha \alpha\right)^{\frac{2}{2+\alpha}}(\alpha+2).$$

Отже, для M має виконуватись нерівність

$$M \ge \frac{T^{\frac{3\alpha+2}{\alpha+2}} A_\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(L_\alpha \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha+2)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\left(\delta^2 \min\left(1, s_\varepsilon^{-1}\right)\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}} = N_1 .$$

Має місце таке твердження.

Лема 1. Модель $S_M(t,\Lambda)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ в нормі $L_2([0,T])$, якщо $\Lambda = \Lambda_M$, а для M виконується нерівність $M \ge \max(N_1, N_2, N_3)$, де

$$N_2 = \Lambda_0^{\frac{\alpha+2}{2}}\left(\frac{2}{3L_\alpha\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} T,\ N_3 = \left(\frac{3}{2}L_\alpha\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} T,$$

$$\Lambda_0 = \max\left(1, \frac{1}{t_0}\right),\ t_0 = \min\left(C^{-\frac{1}{\alpha}}, \sqrt{2}\beta^{-1}\right).$$

Аналогічно отримуються результати в просторі $L_p([0,T]),\ p > 2$.

Лема 2. Модель $S_M(t,\Lambda)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ в нормі $L_p([0,T]),\ p>2$, якщо $\Lambda = \Lambda_M$, а для M виконується нерівність $M \ge \max(N_4, N_5)$, де

$$N_4 = \frac{\sqrt{2}T^{\frac{\alpha+2+p\alpha}{\alpha p}} A_\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}\left(L_\alpha\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha+2)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\left(\delta^2 \min\left((p+1)^{-1}, s_\varepsilon^{-2}\right)\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}},\ N_5 = \Lambda_0^{\frac{\alpha+2}{2}}\left(\frac{2}{L_\alpha\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} T .$$

Доведення. Нехай $\mu(T) = T$. Для шуканих Λ та M повинні виконуватись нерівності $T^{\frac{2}{p}} D_{M,\Lambda} \le \frac{\delta^2}{s_\varepsilon^2}$ та $T^{\frac{2}{p}} D_{M,\Lambda} \le \frac{\delta^2}{p+1}$. Розглянемо такі Λ, що $\Lambda \geq \Lambda_0 = \max\left(1, \frac{1}{t_0}\right)$, тоді повинна виконуватись нерівність $D_{M,\Lambda} \leq \frac{T^2\Lambda^2}{M^2}F(\infty) + \frac{A_\alpha L_\alpha}{\Lambda^\alpha}$. Якщо мінімізувати праву частину по Λ, тобто, покласти $\Lambda = \Lambda_M = \left(\frac{L_\alpha \alpha M^2}{2T^2}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}$, то отримаємо нерівність $D_{M,\Lambda} \leq \frac{T^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{M^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}}\left(2A_\alpha\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\left(L_\alpha A_\alpha \alpha\right)^{\frac{2}{2+\alpha}}\left(\alpha+2\right)$. Отже, для M має виконуватись нерівність

$$M \geq \frac{\sqrt{2}T^{\frac{\alpha+2+p\alpha}{\alpha p}} A_\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}\left(L_\alpha \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\alpha+2\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\left(\delta^2 \min\left((p+1)^{-1}, s_\alpha^{-2}\right)\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}} = N_4 .$$

Якщо врахувати, що $\Lambda_M \geq \Lambda_0$, то отримаємо доведення леми.

Нехай задана C-функція $U_q(x) = \exp\left\{|x|^q\right\} - 1$, $1 \leq q \leq 2$.

Лема 3. Модель $S_M\left(t,\Lambda\right)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю δ в нормі $L_{U_q}(\left[0,T\right]), T \geq 1$, якщо $\Lambda = \Lambda_M$, а для M виконується нерівність $M \geq \max\left(N_6, N_5\right)$, де N_5 визначено в лемі 2, а $N_6 = \frac{\sqrt{2}T^{\frac{2\alpha+2}{\alpha}} A_\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}\left(L_\alpha \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\alpha+2\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}{\left(\delta^2 \min\left((2+\left(\ln 2\right)^{-\frac{2}{q}})^{-1}, \left(\ln 2\right)^{\frac{1}{\alpha}} s_\alpha^{-2}\right)\right)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}$.

Доведення леми аналогічно доведенню лем 1 та 2.

При реальному моделюванні, наприклад, для заданих надійності $1-\varepsilon$ та точності δ при $A_\alpha = 1$, $C = 1$, $\beta = 1$ та $T = 1$ маємо результати (таблиця 1).

Таблиця 1

Оцінка параметрів M та Λ для заданих точності і надійності

δ	ε	α	M	Λ
0.1	0.05	1.1	175200	6924
0.05			1236000	24420
0.01			115300000	455500

Продовження таблиці 1

0.1		1.5	27060	1006
0.05			136400	2535
0.01			5830000	21680
0.1		2	8080	281
0.05			32320	562
0.01			808000	2810

Висновки. В роботі знайдено оцінки для приростів спектральних функцій випадкових процесів. Отримані результати використано для оцінювання параметрів субгауссових моделей при моделюванні гауссових випадкових процесів. Знайдені оцінки дозволяють будувати моделі з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах, а саме, $L_2([0,T])$, $L_p([0,T])$, $p > 2$ та просторах Орліча.

Цікавим є отримання аналогічних оцінок для кореляційних функцій, що є аналітичними.

Список використаних джерел:

1. Козаченко Ю. В. Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов, представимых в виде стохастических интегралов / Ю. В. Козаченко, А. А. Пашко // Теория и приложения статистического моделирования. — Новосибирск, 1988. — С. 10–24.
2. Козаченко Ю. В. Про моделювання гауссових стаціонарних процесів з абсолютно неперервним спектром / Ю. В. Козаченко, Л. Ф. Козаченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1992. — № 47. — С. 47–54.
3. Козаченко Ю. В. Про моделювання випадкових полів I / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1999. — № 61. — С. 61–74.
4. Козаченко Ю. В. Про моделювання випадкових полів II / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1999. — № 62. — С. 61–74.
5. Пашко А. О. Чисельне моделювання субгауссових випадкових полів / А. О. Пашко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 35–39.
6. Ермаков С. М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. — М. : Наука, 1982. — 296 с.
7. Пригарин С. М. О слабой сходимости приближенных моделей гауссовских случайных полей / С. М. Пригарин // Теория и приложения статистического моделирования. — Новосибирск, 1988. — С. 31–39.
8. Prigarin S. M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods / S. M. Prigarin. — Utrecht : VSP, 2001. — 195 p.
9. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. — Новосибирск, 2005. — 259 с.
10. Булдыгин В. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. — К. : ТВиМС, 1998. — 289 с.

11. Козаченко Ю. В. Моделювання випадкових процесів / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко. — К. : Київський університет, 1999. — 223 с.
12. Пашко А. О. Спектральні моделі гауссових випадкових процесів / А. О. Пашко // VI міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». Матеріали конференції. 5-6 вересня 2013. Київ. — 2013. — С. 177–180.

This paper investigates algorithms for the construction of sub-Gaussian models for the Gaussian stationary random processes with continuous spectrum. Estimates for random processes with standard correlation functions retrieved and improved existing ones. Algorithms for simulation of random processes with given accuracy and reliability in various function spaces were constructed.

Key words: *Gaussian process, simulation, sub-Gaussian model, model accuracy, model reliability.*

Отримано: 12.09.2014

УДК 518:517.948

Р. М. Пелещак, д-р фіз.-мат. наук,
М. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНО-ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ТРИШАРОВИХ НАПРУЖЕНИХ НАНОГЕТЕРОСИСТЕМАХ

Побудовано з врахуванням самоузгодженої деформаційно-дифузійної взаємодії математичну модель просторово-часового розподілу точкових дефектів (міжвузлових атомів, вакансій) у тришаровій напруженій наногетеросистемі. Реалізовано комп'ютерне моделювання перерозподілу точкових дефектів в системі комп'ютерної математики Mathematica 7.0. Розв'язок отриманих крайових задач для диференційних рівнянь отримано з використанням прямих та обернених перетворень Лапласа.

Ключові слова: *математична модель, точкові дефекти, самоузгоджена задача, рівняння дифузії, крайова задача, перетворення Лапласа.*

Постановка проблеми. Інтенсивний розвиток нанотехнологій дав можливість створювати на основі напружених наногетеросистем GaAs / $In_xGa_{1-x}As$ / GaAs (ZnTe / $Zn_{1-x}Cd_xTe$ / ZnTe) наноелектронні прилади. Активною областю таких структур є шари $In_xGa_{1-x}As$, $Zn_{1-x}Cd_xTe$, в яких локалізується електрон-дірковий газ, який обмежений з двох сторін потенціальними бар'єрами GaAs (ZnTe).