

11. Козаченко Ю. В. Моделювання випадкових процесів / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко. — К. : Київський університет, 1999. — 223 с.
12. Пашко А. О. Спектральні моделі гауссових випадкових процесів / А. О. Пашко // VI міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». Матеріали конференції. 5-6 вересня 2013. Київ. — 2013. — С. 177–180.

This paper investigates algorithms for the construction of sub-Gaussian models for the Gaussian stationary random processes with continuous spectrum. Estimates for random processes with standard correlation functions retrieved and improved existing ones. Algorithms for simulation of random processes with given accuracy and reliability in various function spaces were constructed.

**Key words:** *Gaussian process, simulation, sub-Gaussian model, model accuracy, model reliability.*

Отримано: 12.09.2014

УДК 518:517.948

**Р. М. Пелешак**, д-р фіз.-мат. наук,  
**М. В. Дорошенко**, канд. фіз.-мат. наук

Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка, м. Дрогобич

### **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНО-ДИFUЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ТРИШАРОВИХ НАПРУЖЕНИХ НАНОГЕТЕРОСИСТЕМАХ**

Побудовано з врахуванням самоузгодженої деформаційно-дифузійної взаємодії математичну модель просторово-часового розподілу точкових дефектів (міжвузлових атомів, вакансій) у тришаровій напруженій наногетеросистемі. Реалізовано комп'ютерне моделювання перерозподілу точкових дефектів в системі комп'ютерної математики Mathematica 7.0. Розв'язок отриманих крайових задач для диференційних рівнянь отримано з використанням прямих та обернених перетворень Лапласа.

**Ключові слова:** *математична модель, точкові дефекти, самоузгоджена задача, рівняння дифузії, крайова задача, перетворення Лапласа.*

**Постановка проблеми.** Інтенсивний розвиток нанотехнологій дав можливість створювати на основі напружених наногетеросистем GaAs / In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As / GaAs (ZnTe / Zn<sub>1-x</sub>Cd<sub>x</sub>Te / ZnTe) наноелектронні прилади. Активною областю таких структур є шари In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As, Zn<sub>1-x</sub>Cd<sub>x</sub>Te, в яких локалізуються електрон-дірковий газ, який обмежений з двох сторін потенціальними бар'єрами GaAs (ZnTe).

Відомо, що оптичні та електричні властивості таких приладів значною мірою залежать як від деформації ґраток контактуючих систем, так і від просторового розподілу точкових дефектів.

Такі дефекти можуть проникати з поверхні або виникати в процесі епітаксійного росту. Крім цього, в технології виготовлення оптоелектронних приладів відіграють важливу роль дифузійні процеси, які пов'язані із перерозподілом домішок у напівпровідниковій структурі.

**Аналіз попередніх публікацій.** Взаємодія дефектів з полем деформації, створеним як неузгодженням кристалічних ґраток контактуючих матеріалів, так і точковими дефектами, зумовлює просторовий перерозподіл останніх. Це може призвести як до накопичення, так і до зменшення числа дефектів у активній області ( $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ;  $\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ ) робочого елемента в залежності від характеру деформації, створеної як невідповідністю параметрів контактуючих кристалічних ґраток ( $\varepsilon_0 = 7\%, 4\%$  для  $\text{GaAs} / \text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As} / \text{GaAs}$ ,  $\text{ZnTe} / \text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te} / \text{ZnTe}$  відповідно [1; 2]), так дією дефектів. Зокрема, відомо, що арсенід галію, вирощений методом молекулярно-пучкової епітаксії при низькій температурі, містить надлишок миш'яку [3, 4]. Впровадження надлишкового миш'яку спричиняє тетрагональне спотворення ґратки матеріалу  $\text{GaAs}$  і генерацію в ньому точкових дефектів: міжвузлових атомів ( $\text{As}$ ), вакансій ( $\text{Ga}$ ) та антиструктурних дефектів ( $\text{As}_{\text{Ga}}$ ), що, в свою чергу, призводить до їх просторового перерозподілу.

Напруження, зумовлені неузгодженням ґраток епітаксійного шару і підкладки, можуть бути пружними у випадку, коли товщина шару не перевищує певного критичного значення [5]. В іншому випадку відбувається утворення дислокацій невідповідності, що супроводжується різким погіршенням як оптичних, так і електричних характеристик приладів. Однак, в шарах  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  з неузгодженням меншим за критичне при певних умовах спостерігається значний спад рухливості та інтенсивності фотолюмінісценції [5], що пов'язано із збільшенням числа точкових дефектів та відповідним збільшенням дифузійного бар'єру для атомів третьої групи.

У експериментальній роботі [6] показано, що в гетероструктурі  $\text{GaAs} / \text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  напружені квантово-розмірні гетерошари затримують дифузію водню і дефектів в об'єм матеріалу, що призводить до істотної відмінності їх просторового розподілу в гетероструктурі та однорідних шарах.

Тому для створення приладів з наперед заданими фізичними властивостями виникає необхідність побудови просторово-часової дифузійно-деформаційної моделі, яка б описувала самоузгоджені дифузійно-деформаційні процеси в напружених наногетероструктурах.

**Мета роботи:** побудова просторово-часової дифузійно-деформаційної моделі та розрахунок просторово-часового профілю розпо-

ділу точкових дефектів (міжвузлових атомів та вакансій) у тришарових напружених наногетеросистемах.

**Виклад основних результатів.** Розглянемо напружені наногетеросистеми GaAs / In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As / GaAs (ZnTe / Zn<sub>1-x</sub>Cd<sub>x</sub>Te / ZnTe) з внутрішніми шарами InAs, CdTe товщиною  $2a$ , що складається з трьох шарів, в яких середня концентрація цих дефектів становить  $N_{d0}^{(1)}, N_{d0}^{(2)}, N_{d0}^{(3)}$  відповідно, а коефіцієнти дифузії  $D_1, D_2, D_3$ . Вважаємо, що зовнішні шари GaAs (ZnTe) мають товщини, які значно перевищують ширину внутрішнього шару гетероструктури ( $\frac{2a}{L} \ll 1$ ), тому деформацією їхніх шарів можна знехтувати ( $\varepsilon_i(x) = 0, i = 1, 3$ ).

Механічна деформація, яка виникає за рахунок неузгодження параметрів ґраток контактуючих матеріалів гетеросистеми, моделюється функцією [7]:

$$\varepsilon_i(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{x^2}{a^2}, & i = 2; \\ 0, & i = 1, 3; \end{cases} \quad (1)$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} < 0$  — відносна зміна об'єму елементарної комірки напруженого шару на гетеромежах

$$x = |a|; \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i}, \quad \varepsilon_{xx} = -\frac{2C_{12}^{(2)}}{C_{11}^{(2)}} \varepsilon_{yy},$$

де  $i = 1, 3$  відповідає шарам GaAs (ZnTe),  $i = 2$  — внутрішнім шарам In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As (Zn<sub>1-x</sub>Cd<sub>x</sub>Te);  $a_i$  — параметри кристалічних ґраток відповідно матеріалів GaAs (ZnTe) та InAs (CdTe) гетероструктури;  $C_{11}^{(2)}$  та  $C_{12}^{(2)}$  — пружні константи матеріалу In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As (Zn<sub>1-x</sub>Cd<sub>x</sub>Te).

Оскільки епітаксійний ріст на підкладці з неузгодженими параметрами ґраток відбувається одночасно з дифузійним процесом, тому в основі моделі необхідно покласти самоузгоджену систему нестационарних рівнянь для параметра деформації  $U_i(x, t)$  та концентрації домішок  $N_d^{(i)}(x, t)$  у напруженій гетеросистемі, перерозподіл яких здійснюється як звичайним дифузійним потоком

$$J_{df}^{(i)}(x, t) = -D_i \frac{\partial N_d^{(i)}(x, t)}{\partial x},$$

так і деформаційною складовою потоку

$$J_{def.}^{(i)}(x,t) = -D_i \frac{\theta_d^{(i)}}{k_B T} N_d^{(i)}(x,t) \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial x},$$

де  $\theta_d^{(i)} = K^{(i)} \Delta \Omega^{(i)}$  — механічний деформаційний потенціал;

$K^{(i)} = \frac{C_{11}^{(i)} + 2C_{12}^{(i)}}{3}$  — модуль всестороннього стиску  $i$ -го матеріалу;

$\Delta \Omega^{(i)}$  — зміна об'єму елементарної комірки за наявності дефекта в  $i$ -му шарі.

Нехай в даній гетеросистемі розподілені точкові дефекти з середньою концентрацією  $N_{d0}^{(i)}$ . У результаті їх самоузгодженої взаємодії через поле деформації, створеної як невідповідність параметрів ґраток контактуючих матеріалів гетеросистеми, так і наявності дефектів відбувається зміна концентраційного профілю точкових дефектів та характеру деформації.

Механічна напруга в епітаксійних шарах, створена як точковими дефектами, так і неузгодженням параметрів ґраток контактуючих матеріалів, описується виразом:

$$\sigma_i(x,t) = \rho_i c_i^2 U_i(x,t) - \theta_d^{(i)} N_d^{(i)}(x,t) - \rho_i c_i^2 \varepsilon_i(x), \quad (2)$$

де  $\rho_i, c_i$  — густина  $i$ -го середовища та повздовжня швидкість звуку відповідно.

Запишемо хвильове рівняння для параметра деформації  $U_i(x,t)$ :

$$\rho_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x^2}. \quad (3)$$

З врахуванням (2) рівняння (3) для перенормованої деформації  $U_i(x,t)$  набуде такого вигляду:

$$\frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\theta_d^{(i)}}{\rho_i c_i^2} \frac{\partial^2 N_d^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_i(x)}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Рівняння для концентрації дефектів (міжвузлових атомів або вакансій) запишеться у вигляді [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_d^{(i)}(x,t)}{\partial t} &= D_i \frac{\partial^2 N_d^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \\ &- D_i \frac{\theta_d^{(i)}}{k_B T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_d^{(i)}(x,t) \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial x} \right] + G_d^{(i)} - \frac{N_d^{(i)}(x,t)}{\tau_d^{(i)}}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $D_i$  — коефіцієнт дифузії точкових дефектів у  $i$ -му шарі;  $G_d^{(i)}$  — швидкість генерації дефектів;  $\tau_d^{(i)}$  — час життя дефекта.

У результаті отримали самоузгоджену систему рівнянь (4), (5) для визначення просторово-часового розподілу концентрації дефектів  $N_d^{(i)}(x, t)$  та параметра деформації  $U_i(x, t)$  в різних областях тришарової наногетероструктури.

Представимо концентрацію дефектів у вигляді:

$$N_d^{(i)}(x, t) = N_{d0}^{(i)} + N_{dl}^{(i)}(x, t), \quad (6)$$

Враховуючи представлення (6) в наближенні  $N_{dl}^{(i)} \ll N_{d0}^{(i)}$ , рівняння дифузії запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\partial x^2} - D_i N_{d0}^{(i)} \frac{\theta_d^{(i)}}{k_B T} \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial x^2} + G_d^{(i)} - \frac{N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\tau_d^{(i)}}. \quad (7)$$

В подальшому розв'язок самоузгодженої системи рівнянь (4), (5) будемо шукати в наближенні

$$\left( \frac{L_{di}^2}{2D_i} \right)^2 \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial t^2} \ll \varepsilon_0, \text{ тобто } \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial t^2} \approx 0, \quad (8)$$

де  $L_{di}$  — дифузійна довжина дефекта в  $i$ -му шарі.

У наближенні (8) з рівняння (4) знайдемо другу похідну  $U(x, t)$  по  $x$  і підставимо в рівняння (7). В результаті отримуємо диференціальне рівняння для визначення просторово-часового розподілу дефектів у напруженій гетеросистемі

$$\frac{\partial N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\partial t} = \left[ D_i \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(i)}}{N_{dc}^{(i)}} \right) \right] \frac{\partial^2 N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\partial x^2} - D_i \frac{N_{d0}^{(i)}}{N_{dc}^{(i)} \Delta \Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon_i(x)}{\partial x^2} + G_d^{(i)} - \frac{N_{dl}^{(i)}(x, t)}{\tau_d^{(i)}}, \quad (9)$$

де  $N_{dc}^{(i)} = \frac{k_B T \rho c_i^2}{\theta_d^{(i)}}$  — критична концентрація дефектів після перевищення якої відбувається самоорганізація дефектів [9].

Крім того, на межах шарів гетероструктури, повинні виконуватись умови рівності концентрацій домішок, а також їх потоків:

$$\frac{\partial N_{dl}^{(1)}(-L, t)}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 N_{dl}^{(1)}(-a, t) &= N_{dl}^{(2)}(-a, t), \\
 J_1(-a, t) &= J_2(-a, t), \\
 N_{dl}^{(2)}(a, t) &= N_{dl}^{(3)}(a, t), \\
 J_2(a, t) &= J_3(a, t), \\
 \frac{\partial N_{dl}^{(3)}(L, t)}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{де } J_i(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ D_i N_{dl}^{(i)}(x, t) (1 - \varepsilon_i(x)) \right].$$

У початковий момент часу

$$N_{dl}^{(i)}(x, 0) = 0. \tag{11}$$

Ввівши безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{t}{\tau_d^{(2)}}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad L_d^{(i)} = \sqrt{D_i \tau_d^{(i)}}, \\
 N_{d0}^{(i)} &= G_d^{(i)} \tau_d^{(i)}, \quad N_{dl}^{(i)}(x, t) = Y_i(x, t) G_d^{(i)} \tau_d^{(i)}, \\
 \beta &= D_2 \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \frac{2\varepsilon_0}{\Delta \Omega^{(2)} a^2 G_d^{(2)}}
 \end{aligned} \tag{12}$$

рівняння (9) та крайові умови (10) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 Y_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} - \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{L_d^{(1)}}{L_d^{(2)}} \right)^2 (Y_1(\hat{x}, \theta) - 1), \\
 \frac{\partial Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial^2 Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + \beta - Y_2(\hat{x}, \theta) + 1, \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial^2 Y_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} - \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(3)}}{L_d^{(2)}} \right)^2 (Y_3(\hat{x}, \theta) - 1).$$

$$\frac{\partial Y_1(-\hat{L}, \theta)}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$Y_1(-\hat{a}, \theta) = \frac{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}}{G_d^{(1)} \tau_d^{(1)}} Y_2(-\hat{a}, \theta),$$

$$Y_2(\hat{a}, \theta) = \frac{G_d^{(3)} \tau_d^{(3)}}{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}} Y_3(\hat{a}, \theta),$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial Y_1(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} = \\
& = \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Y_2(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} - \beta \hat{a}, \\
& \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Y_2(\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}} + \beta \hat{a} = \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial Y_3(-\hat{a}, \theta)}{\partial \hat{x}}, \\
& \frac{\partial Y_3(-\hat{L}, \theta)}{\partial \hat{x}} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Як видно з формули (12) параметр  $\beta$  може приймати як додатні значення  $\beta > 0$  ( $\varepsilon_0 > 0, \Delta\Omega^{(2)} > 0$ ;  $\varepsilon_0 < 0, \Delta\Omega^{(2)} < 0$ ), так і від'ємні значення  $\beta < 0$  ( $\varepsilon_0 > 0, \Delta\Omega^{(2)} < 0$ ;  $\varepsilon_0 < 0, \Delta\Omega^{(2)} > 0$ ).

Розв'язок рівнянь (13) з крайовими умовами (14) шукаємо у вигляді:

$$Y_i(\hat{x}, \theta) = e^{-\lambda_i \theta} Z_i(\hat{x}, \theta), \tag{15}$$

де

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L_d^{(1)}} \right); \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L_d^{(3)}} \right),$$

а  $Z_i(\hat{x}, \theta)$  задовольняють наступним рівнянням:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_1}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 Z_1(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + e^{\lambda_1 \theta}, \\
\frac{\partial Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \left( \frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial^2 Y_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + e^{\theta} (\beta + 1), \\
\frac{\partial Z_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial^2 Z_2(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + e^{\theta} (\beta + 1), \\
\frac{\partial Z_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial^2 Z_3(\hat{x}, \theta)}{\partial \hat{x}^2} + e^{\lambda_3 \theta}
\end{aligned} \tag{16}$$

з такими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1(-\widehat{L}, \theta)}{\partial \widehat{x}} &= 0, \\ e^{-\lambda_1 \theta} Z_1(-\widehat{a}, \theta) &= e^{-\theta} \frac{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}}{G_d^{(1)} \tau_d^{(1)}} Z_2(-\widehat{a}, \theta), \\ e^{-\theta} Z_2(\widehat{a}, \theta) &= e^{-\lambda_2 \theta} \frac{G_d^{(3)} \tau_d^{(3)}}{G_d^{(2)} \tau_d^{(2)}} Z_3(\widehat{a}, \theta), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} \right) \frac{\partial Z_1(-\widehat{a}, t)}{\partial \widehat{x}} &= \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Z_2(-\widehat{a}, t)}{\partial \widehat{x}} - \beta \widehat{a} e^\theta, \\ \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} \right) \frac{\partial Z_2(\widehat{a}, t)}{\partial \widehat{x}} + \beta \widehat{a} e^\theta &= \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 \left( -1 + \frac{N_{d0}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} \right) \frac{\partial Z_3(\widehat{a}, t)}{\partial \widehat{x}}, \\ \frac{\partial Z_3(\widehat{L}, \theta)}{\partial \widehat{x}} &= 0. \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь (16) з крайовими умовами (17) використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$X_i(\widehat{x}, p) = \int_0^\infty Z_i(\widehat{x}, \theta) e^{-p\theta} d\theta. \quad (18)$$

Тоді диференціальні рівняння (16) та крайові умови (17) при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ,  $\frac{D_2}{D_1} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 = \frac{D_3}{D_2} \left( \frac{L_d^{(2)}}{L} \right)^2 = 1$  набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} H_1 X_1''(\widehat{x}, p) - p X_1(\widehat{x}, p) + \frac{1}{p-1} &= 0, \\ H_2 X_2''(\widehat{x}, p) - p X_2(\widehat{x}, p) + \frac{\beta + 1}{p-1} &= 0, \\ H_3 X_3''(\widehat{x}, p) - p X_3(\widehat{x}, p) + \frac{1}{p-1} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} X_1(-\widehat{a}, p) &= X_2(-\widehat{a}, p), \\ -H_1 X_1'(-\widehat{a}, p) &= -H_2 X_2'(-\widehat{a}, p) - \frac{\beta \widehat{a}}{p-1}, \\ X_2(\widehat{a}, p) &= X_3(\widehat{a}, p), \\ -H_2 X_2'(\widehat{a}, p) + \frac{\beta \widehat{a}}{p-1} &= -H_3 X_3'(\widehat{a}, p), \end{aligned} \quad (20)$$



де  $H_i = \left( 1 - \frac{N_{d0}^{(i)}}{N_{dc}^{(i)}} \right)$

Аналітичні розв’язки диференційних рівнянь (19) у кожному із шарів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} X_1(\hat{x}, p) &= C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{H_1}} \hat{x}} + \frac{1}{p(p-1)}, \text{ де } -\hat{a} \leq \hat{x} \leq -\hat{L}, \\ X_2(\hat{x}, p) &= C_2 e^{\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{x}} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{x}} + \frac{\beta + 1}{p(p-1)}, \text{ де } -\hat{a} \leq \hat{x} \leq \hat{a}, \\ X_3(\hat{x}, p) &= C_4 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_3}} \hat{x}} + \frac{1}{p(p-1)}, \text{ де } \hat{a} \leq \hat{x} \leq \hat{L}. \end{aligned} \quad (21)$$

Константи інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4$  визначаємо із наступної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_1}} \hat{a}} - C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} - C_3 e^{\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} &= \frac{\beta}{p(p-1)}, \\ -C_1 \sqrt{H_1} e^{-\sqrt{\frac{p}{H_1}} \hat{a}} + C_2 \sqrt{H_2} e^{-\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} - C_3 \sqrt{H_2} e^{\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} &= \frac{\beta \hat{a}}{\sqrt{p(p-1)}}, \\ C_2 e^{\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} + C_3 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} - C_4 e^{-\sqrt{\frac{p}{H_3}} \hat{a}} &= -\frac{\beta}{p(p-1)}, \\ -C_2 \sqrt{H_2} e^{\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} + C_3 \sqrt{H_2} e^{-\sqrt{\frac{p}{H_2}} \hat{a}} + C_4 \sqrt{H_3} e^{-\sqrt{\frac{p}{H_3}} \hat{a}} &= \frac{\beta \hat{a}}{\sqrt{p(p-1)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здійснивши обернене перетворення Лапласа, отримаємо просторово-часовий перерозподіл точкових дефектів у першому, другому та третьому напружених шарах відповідно

$$\begin{aligned} Y_1(\hat{x}, \theta) &= e^{-\theta} Z_1(\hat{x}, \theta) - e^{-\theta} + 1, \\ Y_2(\hat{x}, \theta) &= Z_2(\hat{x}, \theta) (1 - e^{-\theta}) (1 + \beta), \\ Y_3(\hat{x}, \theta) &= e^{-\theta} Z_3(\hat{x}, \theta) - e^{-\theta} + 1, \end{aligned} \quad (23)$$

де функції  $Z_1(\hat{x}, \theta)$ ,  $Z_2(\hat{x}, \theta)$  та  $Z_3(\hat{x}, \theta)$  є розв’язками диференційних рівнянь (16) з крайовими умовами (17) відповідно

$$Z_1(\hat{x}, \theta) = \frac{1}{b} \left( e^\theta - 1 + e^\theta \frac{\hat{a}}{\sqrt{H_2}} \operatorname{Erf}(\sqrt{\theta}) \right) l_3 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^m}{b^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} l_{2i-1} r_{2i-1} \theta^k \Phi_1(\hat{x}, \theta, k) + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^m}{b^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} l_2 r_2 \theta^k \Phi_2(\hat{x}, \theta, k),
 \end{aligned} \tag{24}$$

де

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\hat{x}, \theta, k) = & - \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{r_{2i-1} \Gamma(k+1)} - \\
 & - (-1)^i \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} r_{2i-1} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(1-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\theta \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}; \\
 \Phi_2(\hat{x}, \theta, k) = & - \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_2^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_2^2}{4\theta}\right)}{r_2 \Gamma(k+1)}
 \end{aligned}$$

$$a = (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})(\sqrt{H_2} - \sqrt{H_3}); \quad b = (\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2})(\sqrt{H_2} + \sqrt{H_3});$$

$$l_1 = \beta \sqrt{H_2} (\sqrt{H_3} - \sqrt{H_2}); \quad l_2 = -\frac{l_1 \hat{a}}{\sqrt{H_2}};$$

$$l_3 = \beta \sqrt{H_2} (\sqrt{H_3} + \sqrt{H_2}); \quad l_4 = \frac{l_3 \hat{a}}{\sqrt{H_2}};$$

$$r_1 = -\frac{\hat{x} + \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{4\hat{a}(m+1)}{\sqrt{H_2}}; \quad r_2 = -\frac{\hat{x} + \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{2\hat{a}(2m+1)}{\sqrt{H_2}}; \quad r_3 = -\frac{\hat{x} + \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{4\hat{a}m}{\sqrt{H_2}}.$$

$$\begin{aligned}
 Z_2(\hat{x}, \theta) = & \frac{1}{b} \left( (e^\theta - 1)(p_3 + p_4) + (p_5 + p_6) e^\theta \operatorname{Erf}(\sqrt{\theta}) \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^m}{b^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} p_i e_i \theta^k \Phi_3(\hat{x}, \theta, k),
 \end{aligned} \tag{25}$$

де

$$\Phi_3(\hat{x}, \theta, k) = - \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{3}{2}, -\frac{e_i^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, -\frac{e_i^2}{4\theta}\right)}{e_i \Gamma(k+1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\hat{a}}{\sqrt{H_2}} \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, -\frac{e_i^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} e_i \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(1-k, \frac{3}{2}, -\frac{e_i^2}{4\theta}\right)}{\theta \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}; \\
 p_1 & = \beta \sqrt{H_2} (\sqrt{H_3} - \sqrt{H_2}); \quad p_1 = \beta \hat{a} (\sqrt{H_2} - \sqrt{H_3}); \quad p_3 = -\frac{p_2 \hat{a}}{\sqrt{H_2}}; \\
 p_4 & = -\beta \sqrt{H_3} (\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}); \quad p_5 = -\frac{p_2 \hat{a}}{\sqrt{H_3}}; \\
 p_6 & = \beta \sqrt{H_1} (\sqrt{H_2} - \sqrt{H_3}); \\
 e_1 & = -\frac{\hat{x} + \hat{a}}{\sqrt{H_2}} + \frac{4\hat{a}(m+1)}{\sqrt{H_2}}; \quad e_2 = -\frac{\hat{x} + \hat{a}}{\sqrt{H_2}} + \frac{2\hat{a}(2m+1)}{\sqrt{H_2}}; \\
 e_3 & = \frac{\hat{x} - \hat{a}}{\sqrt{H_2}} + \frac{4\hat{a}(m+1)}{\sqrt{H_2}}; \quad e_4 = \frac{\hat{x} - \hat{a}}{\sqrt{H_2}} + \frac{2\hat{a}(2m+1)}{\sqrt{H_2}}. \\
 Z_3(\hat{x}, \theta) & = \frac{1}{b} \left( e^\theta - 1 + e^\theta \frac{\hat{a}}{\sqrt{H_2}} \operatorname{Erf}(\sqrt{\theta}) \right) l_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^m}{b^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} l_{2i-1} r_{2i-1} \theta^k \Phi_4(\hat{x}, \theta, k) + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^m}{b^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} l_2 r_2 \theta^k \Phi_5(\hat{x}, \theta, k), \tag{26}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(\hat{x}, \theta, k) & = -\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{r_{2i-1} \Gamma(k+1)} + \\
 & + \frac{\hat{a}}{\sqrt{H_2}} \left( \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} r_{2i-1} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(1-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_{2i-1}^2}{4\theta}\right)}{\theta \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right); \\
 \Phi_5(\hat{x}, \theta, k) & = -\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k, \frac{3}{2}, -\frac{r_2^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\theta} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(-k, \frac{1}{2}, -\frac{r_2^2}{4\theta}\right)}{r_2 \Gamma(k+1)};
 \end{aligned}$$

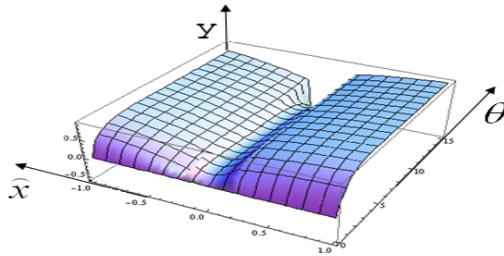
$$\begin{aligned}
 l_1 &= \beta \sqrt{H_2} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}); \quad l_2 = -\frac{l_1 \hat{a}}{\sqrt{H_2}}; \quad l_3 = \beta \sqrt{H_2} (\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}); \\
 l_4 &= \frac{l_3 \hat{a}}{\sqrt{H_2}}; \quad r_1 = \frac{\hat{x} - \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{4 \hat{a} (m+1)}{\sqrt{H_2}}; \quad r_2 = \frac{\hat{x} - \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{2 \hat{a} (2m+1)}{\sqrt{H_2}}; \\
 r_3 &= \frac{\hat{x} - \hat{a}}{\sqrt{H_1}} + \frac{4 \hat{a} m}{\sqrt{H_2}}.
 \end{aligned}$$

У системі комп'ютерної математики Mathematica 7.0 розроблена програма розв'язування диференційних рівнянь (19) з крайовими умовами (20) з використанням прямих та обернених перетворень Лапласа. Проведені чисельні дослідження отриманих розв'язків крайової задачі для диференційних рівнянь при різних вхідних параметрах.

У межах запропонованої нестационарної моделі самоузгодженого деформаційно-дифузійного перерозподілу дефектів у тришарових напружених гетероструктурах простежимо за впливом напруженого шару  $\text{In}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{As}$  та точкових дефектів виду центрів розтягу ( $\theta_d^{(i)} > 0$ , міжвузлових атомів та домішок впровадження) або стиску ( $\theta_d^{(i)} < 0$ , вакансії та домішок заміщення з ковалентно-іонним радіусом, меншим за радіус атома матриці) на профіль нестационарного розподілу дефектів у гетероструктурі  $\text{GaAs} / \text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As} / \text{GaAs}$  з такими параметрами:  $a=10 \text{ \AA}$ ;  $L = 1 \text{ мкм}$ . Домішки кремнію в гетеросистемі  $\text{GaAs} / \text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As} / \text{GaAs}$  є дефектами виду центру розтягу [3].

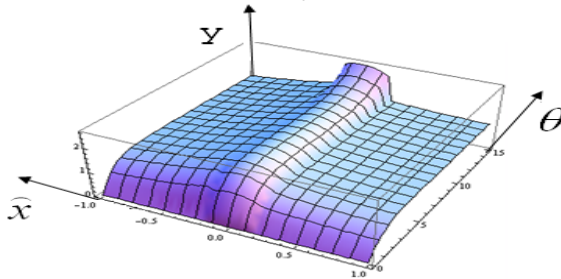
Як показує профіль нестационарного розподілу концентрації дефектів виду центрів стиску (рис. 1) або розтягу (рис. 2) розрахований при різних середніх значеннях концентрації дефектів у шарах ( $\frac{N_{do}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} = 0,4$ ;  $\frac{N_{do}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} = 0,3$ ;  $\frac{N_{do}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} = 0,7$  відповідно), у випадку, коли внутрішній епітаксійний шар буде зазнавати деформації стиску ( $\varepsilon_0 < 0$ ) за рахунок неузгодження параметрів ґраток контактуючих епітаксійних шарів буде спостерігатись збільшення (зменшення) концентрації міжвузлових атомів (вакансій) у цьому шарі, тоді у випадку розтягу ( $\varepsilon_0 > 0$ ) внутрішнього епітаксійного шару буде спостерігатись зменшення (збільшення) концентрації міжвузлових атомів (вакансій). Такий ефект спостерігався в експериментальних роботах [6; 10] по дослідженню спектрів фотолумінесценції напружених гетероструктур, де було показано, що напружені гетерошари  $\text{GaAs} / \text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  затримують дифузію водню та дефектів у об'єм кристалічної системи.

У випадку відсутності дефектів ( $N_{d0}^{(i)} = 0$ ) у контактуючих матеріалах створюється неоднорідна деформація тільки за рахунок неузгодження параметрів ґраток контактуючих матеріалів ( $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_0 \frac{x^2}{a^2}, i=2$ ), а при відсутності неузгодження параметрів ґраток ( $\varepsilon_0 = 0$ ) деформація ( $U^{(i)} = \frac{\theta^{(i)}}{K^{(i)}} N_d^{(i)}$ ) зумовлена тільки точковими дефектами.



**Рис. 1.** Профіль нестационарного розподілу концентрації вакансій у тришаровій напруженій наногетеросистемі з неоднорідно-стиснутим

внутрішнім шаром  $\frac{N_{do}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} = 0,4; \frac{N_{do}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} = 0,3; \frac{N_{do}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} = 0,7; \beta = 10.2$



**Рис. 2.** Профіль нестационарного розподілу концентрації міжвузлових атомів у тришаровій напруженій наногетеросистемі з неоднорідно-стиснутим

внутрішнім шаром  $\frac{N_{do}^{(1)}}{N_{dc}^{(1)}} = 0,4; \frac{N_{do}^{(2)}}{N_{dc}^{(2)}} = 0,3; \frac{N_{do}^{(3)}}{N_{dc}^{(3)}} = 0,7; \beta = -10.2$

**Висновки.** Побудовано з врахуванням самоузгодженої деформаційно-дифузійної взаємодії математичну модель просторово-часового розподілу точкових дефектів (міжвузлових атомів, вакансій) у тришаровій напруженій наногетеросистемі. Встановлено, що концеп-

нтраційний профіль точкових дефектів при  $N_{d0}^{(i)} < N_{dc}^{(i)}$  має немонотонний характер з мінімумом в середині внутрішнього шару  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  ( $\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ ), який збіднюється точковим дефектами виду центрів стиску, коли внутрішній шар гетероструктури  $\text{GaAs}$  /  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  /  $\text{GaAs}$  ( $\text{ZnTe}$  /  $\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$  /  $\text{ZnTe}$ ) зазнає неоднорідного стиску, а у випадку неоднорідного розтягу має місце обернений ефект.

### Список використаних джерел:

1. Гетероструктуры с квантовыми точками: получение, свойства, лазеры. Обзор / Н. Н. Леденцов, В. М. Устинов, В. А. Щукин и др. // ФТП. — 1998. — Т. 32, № 4. — С. 385–410.
2. Козловський В. И. Разрыв зон в структурах с одиночной квантовой ямой  $\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}/\text{ZnTe}$ , выращенных на  $\text{GaAs}$  (001) эпитаксией из молекулярных пучков / В. И. Козловський, В. Г. Литвинов, Ю. Г. Садофьев // ФТП. — 2000. — Т. 34, № 8. — С. 998–1003.
3. Легирование слоев  $\text{GaAs}$  кремнием в условиях низкотемпературной молекулярно-лучевой эпитаксии / М. Д. Вилисова, А. Е. Куницын, Л. Г. Лаврентьева и др. // ФТП. — 2002. — Т. 14, № 11. — С. 3157–3161.
4. Структура и свойства слоев  $\text{InGaAs}$ , выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии при низкой температуре / М. Д. Вилисова, И. В. Ивонин, Л. Г. Лаврентьева и др. // ФТП. — 1999. — Т. 33, № 8. — С. 900–905.
5. Влияние несогласования параметров решеток на структурные, оптические и транспортные свойства слоев  $\text{InGaAs}$ , выращиваемых методом молекулярно-пучковой эпитаксии на подложках  $\text{InP}$  (100) / А. Е. Жуков, А. Ю. Егоров, В. М. Устинов и др. // ФТП. — 1997. — Т. 31, № 1. — С. 19–22.
6. Карпович И. А. Образование и пассивация дефектов в гетероструктурах с напряженными квантовыми ямами  $\text{GaAs}/\text{InGaAs}$  при обработке в водородной плазме / И. А. Карпович, А. В. Аншон, Д. О. Филатов // ФТП. — 1998. — Т. 32, № 9. — С. 1089–1093.
7. Пелешак Р. М. Самоорганизований дифузійно-деформаційний розподіл точкових дефектів у напружених гетеросистемах / Р. М. Пелешак, О. В. Кузик // УФЖ. — 2007. — Т. 52, № 7. — С. 689–694.
8. Кузик О. В. Деформацію ґратки та просторовий перерозподіл точкових дефектів у напруженому епітаксійному шарі / О. В. Кузик, Р. М. Пелешак // УФЖ. — 2006. — Т. 51, № 4. — С. 404–407.
9. Emel'yanov V. I. A Hierarchy of the formation of nanometer clusters and periodic structures of laser-induced defects / V. I. Emel'yanov, I. M. Panin // Laser Physics. — 1996. — Vol. 6, № 5. — P. 971–978.
10. Chen Y. C. Suppression of defect propagation in semiconductors by pseudomorphic layers / Y. C. Chen, J. Singh, P. K. Bhattacharya // J. Appl. Phys. — 1993. — Vol. 74, № 6. — P. 3800–3804.

Constructed taking into account the self-consistent deformation-diffusion interaction mathematical model of spatial-temporal distribution of point defects (interstitial atoms, vacancies) in a three-layer hard nanoheterosystem. Implemented computer simulation redistribution of point de-

fects in the system of computer mathematics Mathematica 7.0. Solution obtained boundary value problems for differential equations obtained using direct and inverse Laplace transforms.

**Key words:** *mathematical model, point defects, self-consistent problem, the diffusion equation, boundary value problem, Laplace transform.*

Отримано: 10.07.2014

УДК 519.21:519.61

**П. С. Сеньо**, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

### **ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ**

У статті у квазілінійному просторі лінійних інтервальних обмежників введено поняття віддалі між елементами, їх норми та ширини. Наявність віддалі перетворює його в метричний простір. Доведено, що цей метричний простір є повним. Введення метрики робить цей простір топологічним простором. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору.

Отримані висновки дають можливість на основі математики лінійних функціональних інтервалів будувати та досліджувати ефективні методи розв'язування широкого класу задач.

**Ключові слова:** *віддаль, норма, інтервал, ширина інтервала, квазілінійний простір, лінійний функціональний інтервал, обмежник, теоретико-множинні операції, збіжність.*

**1. Вступ.** В [3] введені нові об'єкти дослідження — функціональні інтервали та арифметичні операції над ними. Показано, що у випадку, коли функціональні обмежники є лінійними функціональними інтервалами, так означені арифметичні операції над ними замкнені, тобто результат кожної такої операції є також деяким лінійним функціональним інтервалом. Лінійний функціональний інтервал, лінійний функціональний обмежник, або лінійний інтервальний обмежник  $L(X) \equiv \{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$  функції  $f(x)$  на інтервалі  $X$  це множина всіх точок координатної площини, що на проміжку  $X$  аргументу розташовані між графіками кусково-лінійних функцій  $\underline{l}(x), \bar{l}(x)$ , включно з ними, таких, що  $\underline{l}(x) \leq f(x) \leq \bar{l}(x)$ . Функції  $\underline{l}(x), \bar{l}(x)$  називаються обмежувачами функції  $f(x)$  на інтервалі  $X$ . Перерізом лінійного функціонального обмежника  $\{X, \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$  в точці  $\tilde{x}$  називається інтер-