fects in the system of computer mathematics Mathematica 7.0. Solution obtained boundary value problems for differential equations obtained using direct and inverse Laplace transforms.

Key words: *mathematical model, point defects, self-consistent problem, the diffusion equation, boundary value problem, Laplace transform.*

Отримано: 10.07.2014

УДК 519.21:519.61

П. С. Сеньо, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

У статті у квазілінійному просторі лінійних інтервальних обмежників введене поняття віддалі між елементами, їх норми та ширини. Наявність віддалі перетворює його в метричний простір. Доведено, що цей метричний простір є повним. Введення метрики робить цей простір топологічним простором. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору.

Отримані висновки дають можливість на основі математики лінійних функціональних інтервалів будувати та досліджувати ефективні методи розв'язування широкого класу задач.

Ключові слова: *віддаль, норма, інтервал, ширина інтервалу, квазілінійний простір, лінійний функціональний інтервал, обмежник, теоретико-множинні операції, збіжність.*

1. Вступ. В [3] введені нові об'єкти дослідження — функціональні інтервали та арифметичні операції над ними. Показано, що у випадку, коли функціональні обмежники є лінійними функціональними інтервалами, так означені арифметичні операції над ними замкнені, тобто результат кожної такої операції є також деяким лінійним функціональним інтервалом. Лінійний функціональний інтервал, лінійний функціональний обмежник, або лінійний інтервальний обмежник $L(X) \equiv \equiv \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ функції $f(x)$ на інтервалі X це множина всіх точок координатної площини, що на проміжку X аргументу розташовані між графіками кусково-лінійних функцій $\underline{l}(x), \overline{l}(x)$, включно з ними, таких, що $\underline{l}(x) \le f(x) \le \overline{l}(x)$. Функції $\underline{l}(x), \overline{l}(x)$ називаються обмежуючими функціями функції $f(x)$ на інтервалі X. Перерізом лінійного функціонального обмежника $\{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ в точці $\tilde{x}$ називається інтервал $[\underline{l}(\tilde{x}), \overline{l}(\tilde{x})]$. Реалізацією лінійного функціонального інтервалу $\{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ називається кожна функція $g(x)$, графік якої на інтервалі X належить цьому обмежнику, тобто $\underline{l}(x) \le g(x) \le \overline{l}(x)$. Отже лінійні функціональні інтервали можна також інтерпретувати як множину всіх відповідних функцій — реалізацій. Множину всіх лінійних функціональних інтервалів, заданих на інтервалі X, позначатимемо $LI(X)$. Доведено, що множина таких елементів, визначених на одному й тому ж проміжку X аргументу, при означених у [3] арифметичних операціях. є квазілінійним простором.

Наведені вище інтерпретації означення лінійних функціональних інтервалів вказують на тісний зв'язок їх із стохастичними процесами [4, с. 11–14, 21–28]. Однак в цій роботі далі цей зв'язок не аналізується.

2. Формулювання задачі. Арифметичні операції над лінійними функціональними інтервалами, означені в [3] є узагальненнями арифметичних операцій над інтервалами. В цій же роботі також показано, що лінійні функціональні інтервали є узагальненнями відповідних інтервальних розширень функцій [1, с. 31–33]. Отже квазілінійний простір інтервалів є частинним випадком квазілінійного простору лінійних функціональних інтервалів. В квазілінійному просторі інтервалів введено поняття віддалі між інтервалами, їх норми та ширини. На цій основі природнім чином трактується збіжність послідовностей таких елементів. Це дає можливість будувати та досліджувати інтервальні методи розв'язування широкого кола задач. Тому виникає потреба відповідним чином ввести поняття віддалі між лінійними функціональними інтервалами, їх норми та ширини, що зокрема дасть змогу аналізувати збіжність послідовностей таких елементів. Вищий рівень абстракції простору лінійних функціональних інтервалів дає можливість будувати та досліджувати ефективніші методи розв'язування як таких же задач, так і значно ширшого кола задач. Для цього виходячи зі специфіки лінійних функціональних інтервалів потрібно попередньо відповідним чином означити теоретико-множинні операції над ними.

3. Теоретико-множинні операції над лінійними функціональними обмежниками. З означення лінійних інтервальних обмежників [3] випливає, що вони є параметризованими множинами інтервалів — своїх перерізів. З іншого боку, кожен замкнений інтервал є множиною — множиною чисел, що знаходяться між відомими межами (кінцями цього інтервалу). Тому теоретико-множинні операції над інтервалами є відповідними операціями над такими специфічними множинами. Результати цих операцій визначаються природнім чином через відповідні операції над межами інтервалів — операндів. Наприклад, якщо $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, то

$$A \bigcap B = [\max\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}]\,. \qquad (1)$$

Якщо ж в (1) ліва межа інтервалу більша за праву, то $A \bigcap B = \varnothing$. Аналогічно, якщо $A = [a, c]$, $B = [c, d]$, то

$$A \bigcup B = [a, d]\,. \qquad (2)$$

Однак перенести безпосередньо таку методику означення теоретико-множинних операцій на відповідні операції над лінійними інтервальними обмежниками неможливо не лише через те, що вони є відповідними двохвимірними множинами, але ще й суттєво залежними від інтервалів, на яких вони визначені.

Означення 3.1. Результатом виконання теоретико-множинної операції $* \equiv \{\bigcup, \bigcap\}$ над лінійними інтервальними обмежниками $L_1(X) \equiv \{X_1, \underline{l}_1(x), \overline{l}_1(x)\}$ та $L_2(X) \equiv \{X_2, \underline{l}_2(x), \overline{l}_2(x)\}$ є лінійний обмежник $L(X) \equiv \{X_1 * X_2, \underline{l}(x), \overline{l}\,(x)\}$, де обмежуючі функції $\underline{l}(x)$, $\overline{l}\,(x)$ утворені відповідним чином з обмежуючих функцій $\underline{l}_1(x), \overline{l}_1(x)$ та $\underline{l}_2(x), \overline{l}_2(x)$ в результаті виконання цієї ж операції над множинами всіх точок обмежників $L_1(X)$ та $L_2(X)$.

Наприклад, якщо елементарні лінійні обмежники

$$L_1(X) = \left\{X, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\right\},$$

$$L_2(X) = \left\{X, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\right\}$$

такі, що $\overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)} \geq \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)} \geq \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)} \geq \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}$, то

$$L_1(X) \bigcap\ L_2(X)\ =\ \left\{X, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\right\}, \qquad (3)$$

$$L_1(X) \bigcup\ L_2(X)\ =\ \left\{X, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\right\}, \qquad (4)$$

а якщо ж

$$L_1(X_1) = \left\{X_1, \underline{k}^{(1)}\ x + \underline{m}^{(1)}, \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}\right\},$$

$$L_2(X_2) = \left\{X_2, \underline{k}^{(2)}\ x + \underline{m}^{(2)}, \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}\right\},$$

то

$$L_1(X_1) \bigcup\ L_2(X_2)\ =\ \left\{X_1 \bigcup X_2, \underline{l}(x), \overline{l}\,(x)\right\}, \qquad (5)$$

де

$$\overline{l}\,(x) = \begin{cases} \overline{k}^{(1)}\ x + \overline{m}^{(1)}, \text{якщо } x \in X_1, \\ \overline{k}^{(2)}\ x + \overline{m}^{(2)}, \text{якщо } x \in X_2, \end{cases} \qquad (6)$$

$$\underline{l}(x)=\begin{cases}\underline{k}^{(1)}\ x+\underline{m}^{(1)}, \text{якщо } x\in X_1,\\ \underline{k}^{(2)}\ x+\underline{m}^{(2)}, \text{якщо } x\in X_2,\end{cases} \tag{7}$$

тощо.

4. Віддаль, норма та ширина в $LI(X)$. Якщо у просторі $LI(X)$ ввести метрику, то цим ми зробимо його топологічним простором. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору.

Означення 4.1. Віддаль $d(L_1(X), L_2(X))$ між лінійними обмежниками $L_1(X)\equiv\left\{X, \underline{l}_1(x), \overline{l}_1(x)\right\}$ і $L_2(X)\equiv\left\{X, \underline{l}_2(x), \overline{l}_2(x)\right\}$ визначає рівність

$$d(L_1(X), L_2(X))=\max_{x\in X}\max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_2(x)\right|\right\}. \tag{8}$$

Легко переконатися, що у цьому випадку виконуються всі аксіоми віддалі. Для цього попередньо доведемо наступну лему, яка має і самостійне значення.

Лема 4.1. Для будь-яких дійсних чисел a_1, a_2, b_1, b_2 виконується нерівність

$$\max\left\{a_1+a_2, b_1+b_2\right\}\le\max\left\{a_1, b_1\right\}+\max\left\{a_2, b_2\right\}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки для будь-яких дійсних чисел c_1, c_2 виконується рівність $\max\{c_1, c_2\}=\max\{c_2, c_1\}$, то, для визначеності, будемо вважати, що

$$a_1\le b_1. \tag{10}$$

Отже

$$\max\{a_1, b_1\}=b_1. \tag{11}$$

Нехай

$$\max\{a_2, b_2\}=b_2. \tag{12}$$

Тоді з (10), (12) послідовно отримуємо

$$a_1\le b_1,\ a_1+a_2\le b_1+a_2\le b_1+b_2.$$

Отже, $\max\{a_1+a_2, b_1+b_2\}=b_1+b_2=\max\{a_1, b_1\}+\max\{a_2, b_2\}$.

Нехай

$$\max\{a_2, b_2\}=a_2. \tag{13}$$

Тоді з (10), (13) послідовно отримуємо

$$a_1\le b_1,\ a_1+a_2\le b_1+a_2=\max\{a_1, b_1\}+\max\{a_2, b_2\}$$

Але ж, згідно (13), також $b_1+b_2\le b_1+a_2$. Тому

$$\max\left\{a_1+a_2, b_1+b_2\right\}\le b_1+a_2=\max\left\{a_1, b_1\right\}+\max\left\{a_2, b_2\right\}.$$

Зауваження 4.1. Методом математичної індукції, послідовно використовуючи (9), легко довести, що

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\right\} \le \sum_{i=1}^{n} \max\{a_i, b_i\}, \tag{14}$$

а якщо ряди $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i, \sum_{i=1}^{\infty} \max\{a_i, b_i\}$ збіжні, то

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i\right\} \le \sum_{i=1}^{\infty} \max\{a_i, b_i\}. \tag{15}$$

Перевіримо коректність означення 4.1 довівши, що в цьому випадку виконуються всі аксіоми віддалі.

1. Оскільки $|a-b| = |b-a|$ для будь-яких чисел a, b, то з формули (9) означення 4.1 віддалі між лінійними функціональними обмежниками $L_1(X), L_2(X)$ безпосередньо випливає, що $d(L_1(X), L_2(X)) = d(L_2(X), L_1(X))$.

2. З формули (9) врахувавши те, що $|c| \ge 0$ для будь-якого числа c, отримуємо нерівність $d(L_1(X), L_2(X)) \ge 0$. Доведемо, що $d\big(L_1(X), L_2(X)\big) = 0$ тоді і лише тоді, коли $L_1(X) = L_2(X)$.

Нехай $d(L_1(X), L_2(X)) = 0$. Тоді

$$\max_{x\in X} \max\{|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)|, |\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)|\} = 0.$$

Оскільки $|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)| \ge 0$ і $|\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)| \ge 0$, то $|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)| = 0$ і $|\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)| = 0$. Отже $\underline{l}_1(x) = \underline{l}_2(x)$ і $\overline{l}_1(x) = \overline{l}_2(x)$, тобто $L_1(X) = L_2(X)$.

Нехай $L_1(X) = L_2(X)$. Тоді $\underline{l}_1(x) = \underline{l}_2(x)$ і $\overline{l}_1(x) = \overline{l}_2(x)$, тобто $|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)| = 0$ і $|\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)| = 0$. Отже

$$\max_{x\in X} \max\left\{|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)|, |\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)|\right\} = 0,$$

тобто $d(L_1(X), L_2(X)) = 0$.

3. Доведемо, що для будь-якого $L_2(X) \in LI(X)$ виконується нерівність $d(L_1(X), L_3(X)) \le d(L_1(X), L_2(X)) + d(L_2(X), L_3(X))$. Для цього застосуємо лему 4.1 при $a_1 = |\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)|$, $a_2 = |\underline{l}_2(x) - \underline{l}_3(x)|$, $b_1 = |\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)|$, $b_2 = |\overline{l}_2(x) - \overline{l}_3(x)|$ і послідовно отримаємо

$$d(L_1(X), L_3(X)) = \max_{x\in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_3(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_3(x)\right|\right\} \le$$

$$\max_{x\in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_2(x)\right|+\left|\underline{l}_2(x)-\underline{l}_3(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_2(x)\right|+\left|\overline{l}_2(x)-\overline{l}_3(x)\right|\right\} \le$$

$$\le \max_{x\in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_2(x)\right|\right\} +$$

$$+\max_{x\in X} \max\{\left|\underline{l}_2(x)-\underline{l}_3(x)\right|, \left|\overline{l}_2(x)-\overline{l}_3(x)\right|\} = d(L_1(X), L_2(X)) + d(L_2(X), L_3(X)).$$

Зауваження 4.2. Нехай $\underline{M}_1$, $\overline{M}_1$ — множини точок кінців інтервалів інтервалу X, на яких графіки нижньої та верхньої обмежуючих функцій $\underline{l}_1(x)$, $\overline{l}_1(x)$, відповідно, лінійного обмежника $L_1(X)$ кожен є відрізком лише однієї якоїсь прямої лінії, а $\underline{M}_2$, $\overline{M}_2$ — множини точок кінців інтервалів інтервалу X такої ж природи лише для нижньої та верхньої обмежуючих функцій $\underline{l}_2(x)$, $\overline{l}_2(x)$, відповідно, лінійного обмежника $L_2(X)$. Утворимо множину точок

$$M = \underline{M}_1 \cup \overline{M}_1 \cup \underline{M}_2 \cup \overline{M}_2 . \qquad (16)$$

Тоді, оскільки обмежуючі функції лінійних інтервальних обмежників $L_1(X)$, $L_2(X)$ є кусково-лінійними функціями, то у формулі (8) максимум достатньо шукати не на всьому інтервалі X, а лише на скінченній множині точок M.

Аналогічно до попереднього, визначимо відповідні множини $\underline{M}_i$, $\overline{M}_i$ точок для кожного лінійного інтервального обмежника $L_i(X)$ послідовності лінійних обмежників $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$, множину

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{M}_i \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{M}_j , \qquad (17)$$

та множини $\underline{M}$, $\overline{M}$ точок граничного лінійного обмежника $L(X)$. Тоді безпосередньо з означення 4.1 віддалі між лінійними обмежниками з врахуванням зауваження 4.2 та того, що кожен лінійний функціональний інтервал є параметризованою сукупністю інтервалів — його перерізів, а обмежуючі функції його є кусково-лінійними функціями, аналогічно доведенням відповідних тверджень [1, с. 24–25] у просторі інтервалів, легко довести наступні три теореми.

Теорема 4.1. Послідовність лінійних інтервальних обмежників $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до лінійного обмежника $L(X)$ тоді і лише тоді, коли

1) $\underline{M} \subseteq M$, $\overline{M} \subseteq M$,

2) всі послідовності значень у всіх точках множини M верхніх та нижніх обмежуючих функцій інтервальних обмежників послідовності $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$ збігаються до значень у всіх відповідних тих же точках множини M верхньої та нижньої обмежуючих функцій, відповідно, лінійного обмежника $L(X)$, тобто

$$(\lim_{i\to\infty} L_i(X) = L(X)) \Leftrightarrow (\lim_{i\to\infty} \underline{l}_i(x) = \underline{l}(x),\ \lim_{i\to\infty} \overline{l}_i(x) = \overline{l}(x),\ \forall x \in M). \quad (18)$$

Теорема 4.2. Метричний простір ($LI(X), d$) з метрикою із означення 4.1, є повним метричним простором.

Теорема 4.3. Кожна послідовність лінійних інтервальних обмежників $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$, для якої виконується співвідношення

$$L_1(X) \supseteq L_2(X) \supseteq L_3(X) \supseteq \cdots,$$

збігається до лінійного обмежника $L(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i(X)$.

Використавши теорему 4.2 та означення арифметичних операцій над лінійними інтервальними обмежниками за аналогією з [1, с. 25], легко довести наступну теорему.

Теорема 4.4. Всі арифметичні операцій над лінійними інтервальними обмежниками неперервні.

Означення 4.2. Нормою лінійного інтервального обмежника $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ називається число

$$\begin{gathered} \|L(X)\| = d\left(L(X), \{X, 0, 0\}\right) = \\ = \max_{x\in X} \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\} = \max_{x_k\in M} \max\left\{\left|\underline{l}(x_k)\right|, \left|\overline{l}(x_k)\right|\right\}, \end{gathered} \quad (19)$$

де множина точок M визначається аналогічно як у зауваженні 4.2.

Норму лінійного інтервального обмежника $L(X)$ можна записати і у наступному вигляді:

$$\|L(X)\| = \max_{x\in X} \max_{f(x)\in L(X)} \left|f(x)\right|, \quad (20)$$

де $f(x)$ — реалізація лінійного інтервального обмежника $L(X)$. Очевидно, що якщо $L_1(X)$, $L_2(X) \in LI(X)$, то

$$(L_1(X) \subseteq L_2(X)) \Leftrightarrow (\|L_1(X)\| \le \|L_2(X)\|). \quad (21)$$

Перевіримо коректність означення 4.2 довівши, що в цьому випадку виконуються всі аксіоми норми.

1. З формули (19) врахувавши те, що $|c| \ge 0$ для будь — якого числа c, отримуємо нерівність $\|L(X)\| \ge 0$. Доведемо, що $\|L(X)\| = 0$ тоді і лише тоді, коли $L(X) \equiv 0$.

Нехай $\|L(X)\| = 0$, де $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$. Тоді, згідно (19),

$$\max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\} = 0. \tag{22}$$

Оскільки $\left|\underline{l}(x)\right| \geq 0$ і $\left|\overline{l}(x)\right| \geq 0$ для будь-якого $x \in X$, то з (22) випливає, що $\max_{x \in X}\left|\underline{l}(x)\right| = 0$ і $\max_{x \in X}\left|\overline{l}(x)\right| = 0$. Отже $\underline{l}(x) \equiv 0$ і $\overline{l}(x) \equiv 0$, тобто $L(X) \equiv 0$.

Нехай $L(X) \equiv 0$. Отже $\underline{l}(x) \equiv 0$ і $\overline{l}(x) \equiv 0$. Оскільки, згідно (19), $\|L(X)\| = \max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\}$, то в цьому випадку

$$\|L(X)\| = \max_{x \in X} \max\left\{|0|, |0|\right\} = 0.$$

2. Нехай $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$, а c — будь-яка константа. Тоді (див. [3])

$$c \cdot L(X) = \{X, c, c\} \cdot \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\} = \begin{cases} \left\{X, c \cdot \underline{l}(x), c \cdot \overline{l}(x)\right\}, \text{ якщо } c \geq 0, \\ \left\{X, c \cdot \overline{l}(x), c \cdot \underline{l}(x)\right\}, \text{ якщо } c < 0. \end{cases}$$

Отже

$$\|c \cdot L(X)\| = \max_{x \in X} \max\left\{|c| \cdot \left|\underline{l}(x)\right|, |c| \cdot \left|\overline{l}(x)\right|\right\} =$$
$$= |c| \cdot \max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\} = |c| \cdot \|L(X)\|.$$

3. Нехай $L_1(X) = \{X, \underline{l}_1(x), \overline{l}_1(x)\}$, $L_2(X) = \{X, \underline{l}_2(x), \overline{l}_2(x)\}$. Тоді (див. [3])

$$L_1(X) + L_2(X) = \{X, \underline{l}_1(x) + \underline{l}_2(x), \overline{l}_1(x) + \overline{l}_2(x)\}.$$

Отже

$$\|L_1(X) + L_2(X)\| = \max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x) + \underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x) + \overline{l}_2(x)\right|\right\} \leq$$
$$\max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x)\right| + \left|\underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)\right| + \left|\overline{l}_2(x)\right|\right\}.$$

Застосувавши лему 4.1 при $a_1 = \left|\underline{l}_1(x)\right|$, $a_2 = \left|\underline{l}_2(x)\right|$, $b_1 = \left|\overline{l}_1(x)\right|$, $b_2 = \left|\overline{l}_2(x)\right|$, отримаємо

$$\|L_1(X) + L_2(X)\| \leq \max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}_1(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)\right|\right\} +$$
$$+ \max_{x \in X} \max\left\{\left|\underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_2(x)\right|\right\} = \|L_1(X)\| + \|L_2(X)\|.$$

Означення 4.3. Шириною лінійного функціонального інтервалу обмежника $L(X)=\left\{X,\underline{l}(x),\overline{l}(x)\right\}$ будемо називати число

$$\omega(L(X))=\max_{x\in X}(\overline{l}(x)-\underline{l}(x))=\max_{x_k\in M}(\overline{l}(x_k)-\underline{l}(x_k)),\tag{23}$$

де множина точок M визначається аналогічно як у зауваженні 4.2.

Очевидно, що якщо $L_1(X)$, $L_2(X)\in LI(X)$, то

$$(L_1(X)\subseteq L_2(X))\Leftrightarrow(\omega(L_1(X))\le\omega(L_2(X))).\tag{24}$$

Безпосередньо з означення 4.3 випливає, що

$$\omega(L_1(X)\pm L_2(X))\le\omega(L_1(X))+\omega(L_2(X)).\tag{25}$$

З означень 4.2, 4.3 норми та ширини, відповідно. лінійного інтервального обмежника випливає, що

$$\omega(L(X))=\left\|L(X)-L(X)\right\|.\tag{26}$$

Тому збіжність послідовності лінійних інтервальних обмежників, зокрема і в теоремах 1-4, можна відповідним чином трактувати в термінах віддалі, норми, або ширини.

Зауваження 4.3. Віддаль, норма, та ширина, визначені за (8), (19), (23), відповідно, є рівномірними. Тому і збіжність послідовності лінійних інтервальних обмежників в таких термінах є рівномірною. Можна розглядати збіжність таких послідовностей в середньому, якщо ввести в розгляд осереднені віддаль, норму, та ширину, означені так:

$$d\left(L_1(X),L_2(X)\right)=(1/(b-a))\int_a^b\max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_2(x)\right|,\left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_2(x)\right|\right\}dx,\tag{27}$$

$$\left\|L(X)\right\|=(1/(b-a))\int_a^b\max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|,\left|\overline{l}(x)\right|\right\}dx,\tag{28}$$

$$\omega(L(X))=(1/(b-a))\int_a^b\left(\overline{l}(x)-\underline{l}(x)\right)dx,\tag{29}$$

де $X=[a,b]$, або так:

$$\begin{aligned}&d\left(L_1(X),L_2(X)\right)=\\&=(1/N)\sum_{x_k\in M}\max\left\{\left|\underline{l}_1(x_k)-\underline{l}_2(x_k)\right|,\left|\overline{l}_1(x_k)-\overline{l}_2(x_k)\right|\right\}.\end{aligned}\tag{30}$$

$$\left\|L(X)\right\|=(1/N)\sum_{x_k\in M}\max\left\{\left|\underline{l}(x_k)\right|,\left|\overline{l}(x_k)\right|\right\},\tag{31}$$

$$\omega(L(X))=(1/N)\sum_{x_k\in M}\left(\overline{l}(x_k)-\underline{l}(x_k)\right),\tag{32}$$

де N — кількість точок у множині M, яка визначається аналогічно, як у зауваженні 4.2.

Для аналізу динаміки збіжності послідовностей лінійних функціональних інтервалів одночасно у всіх точках інтервалу X їх визначення часто доцільно використовувати інші числові характеристики.

Означення 4.4. Функціональною, або параметризованою віддаллю між лінійними обмежниками $L_1(X) \equiv \left\{X, \underline{l}_1(x), \overline{l}_1(x)\right\}$ і $L_2(X) \equiv \equiv \left\{X, \underline{l}_2(x), \overline{l}_2(x)\right\}$ називаємо невід’ємнозначну функцію $D(x) \equiv \equiv d_x\left(L_1(X), L_2(X)\right)$, яка при кожному фіксованому значенні аргументу $\tilde{x} \in X$ є віддалю між інтервалами $[\underline{l}_1(\tilde{x}), \overline{l}_1(\tilde{x})]$ і $[\underline{l}_2(\tilde{x}), \overline{l}_2(\tilde{x})]$ — перерізами цих лінійних обмежників при значенні $x = \tilde{x}$.

З цього означення та означення віддалі між інтервалами [1, с. 23] випливає, що

$$D(x) \equiv d_x(L_1(X), L_2(X)) = \max\left\{\left|\underline{l}_1(x) - \underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x) - \overline{l}_2(x)\right|\right\}. \quad (33)$$

Означення 4.5. Функціональною, або параметризованою нормою лінійного інтервального обмежника $L(X) \equiv \left\{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\right\}$ називаємо невід’ємнозначну функцію $N(x) \equiv \left\|L(X)\right\|_x$, яка при кожному фіксованому значенні аргументу $\tilde{x} \in X$ є нормою інтервалу $[\underline{l}(\tilde{x}), \overline{l}(\tilde{x})]$ — перерізу цього лінійного інтервального обмежника при значенні $x = \tilde{x}$.

З цього означення та означення норми інтервалу [1, с. 25] випливає, що

$$N(x) \equiv \left\|L(X)\right\|_x = d_x(L(X), \{X, 0, 0\}) = \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\}. \quad (34)$$

Означення 4.6. Функціональною, або параметризованою шириною лінійного інтервального обмежника $L(X) \equiv \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ називаємо невід’ємнозначну функцію $\Omega(x) \equiv \omega_x(L(X))$, яка при кожному фіксованому значенні аргументу $\tilde{x} \in X$ є шириною інтервалу $[\underline{l}(\tilde{x}), \overline{l}(\tilde{x})]$ — перерізу цього лінійного інтервального обмежника при значенні $x = \tilde{x}$.

З цього означення та означення ширини інтервалу [1, с. 27] випливає, що

$$\Omega(x) \equiv \omega_x(L(X)) = \overline{l}(x) - \underline{l}(x). \quad (35)$$

5. Результати обчислювальних експериментів.

Приклад 1. Обчислити віддаль та функціональну віддаль між лінійними функціональними інтервалами на інтервалі $X = [-2, 6]$ функцій $y = x^2 - 8x + 7$ та $y = \ln(2x + 4.5) + 1$.

Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ — множина точок x_i інтервалу X розбиття лінійного інтервального обмежника $L(X)$ відповідної елементарної функції на елементарні лінійні інтервальні обмежники; $\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\overline{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{n}$ — множини кутових коефіцієнтів $\underline{k}_i, \overline{k}_i$ та зміщень $\underline{m}_i, \overline{m}_i$ нижніх та верхніх їх обмежуючих функцій, відповідно; на інтервалах $[x_i, x_{i+1}]$, а $\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$, $\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$ — множини нижніх та верхніх значень, відповідно, її обмежуючих функцій у точках x_i. Тоді (див. [3]) для функції $y = x^2 - 8x + 7$

$$\{x_i\}_{i=1}^{9} = \{-2, -0.5, 1, 2.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6\},$$

$$\{\overline{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{-10.5, -7.5, -4.5, -1.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5\},$$

$$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{-12, -6, -6, 0, 0, 2, 2, 4\},$$

$$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{6, 7.5, 4.5, -3, -11, -15.5, -20.5, -26\},$$

$$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{3, 6, 6, -9, -9, -18, -18, -29\},$$

$$\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{27, 11.25, 0, -6.75, -9, -8.75, -8, -6.75, -5\},$$

$$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{27, 9, 0, -9, -9, -9, -8, -7, -5\};$$

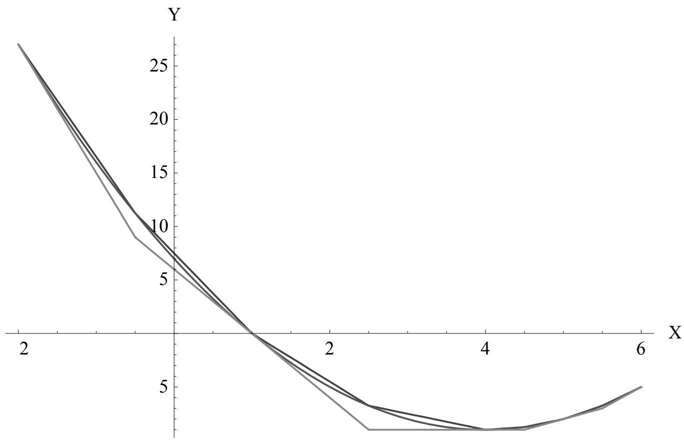

Рис. 1. *Графіки функції* $y = x^2 - 8x + 7$ *(середній графік) та обмежуючих функцій її лінійного інтервального обмежника*

для функції $y = \ln(2x + 4.5)$

$$\{x_i\}_{i=1}^{9} = \{-2, -1.81153, -1.375, -1.11811, -0.75, 0.303752, 2.625, 4.01928, 6\},$$

$$\{\overline{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{4, 1.14286, 1.14286, 0.666667, 0.666667, 0.205128, 0.205128, 0.121212\},$$

$$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{8} = \{2.98102, 1.58279, 1.00206, 0.764924,$$
$$0.504956, 0.278538, 0.18041, 0.138612\},$$
$$\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{7.30685, 2.13104, 2.13104, 1.59861,$$
$$1.59861, 1.73881, 1.73881, 2.07609\},$$
$$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{8} = \{5.26889, 2.73595, 1.93745, 1.6723,$$
$$1.47733, 1.5461, 1.80369, 1.97169\},$$
$$\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{-0.693147, 0.060721, 0.559616,$$
$$0.853207, 1.09861, 1.80111, 2.27727, 2.56327, 2.80336\}$$
$$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{9} = \{-0.693147, -0.131323, 0.559616,$$
$$0.817038, 1.09861, 1.63071, 2.27727, 2.52881, 2.80336\}$$

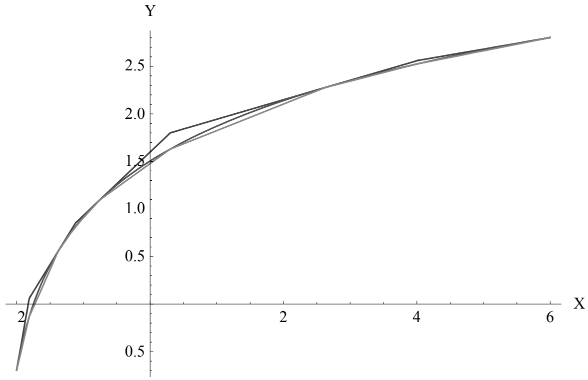

Рис. 2. *Графіки функції* $y = \ln(2x + 4.5)$ *(середній графік) та обмежуючих функцій її лінійного інтервального обмежника*

Об'єднане розбиття інтервалу $X = [-2, 6]$, тобто множина точок M, є таким

$$\{x_i\}_{i=1}^{16} = \{-2, -1.81153, -1.375, -1.11811, -0.75, -0.5,$$
$$0.303752, 1, 2.5, 2.625, 4, 4.01928, 4.5, 5, 5.5, 6\}.$$

Тому адаптовані до такого розбиття значення обмежуючих функцій цих лінійних функціональних інтервалів у точках x_i є відповідно такими:

$$\{\overline{l}_1(x_i)\}_{i=1}^{16} = \{27, 25.0211, 20.4375, 17.7401, 13.875, 11.25, 5.22186, 0,$$
$$-6.75, -6.9375, -9, -8.99036, -8.75, -8, -6.75, -5\},$$
$$\{\underline{l}_1(x_i)\}_{i=1}^{16} = \{27, 24.7384, 19.5, 16.4173, 12, 9, 4.17749, 0,$$
$$-9, -9, -9, -9, -9, -8, -7, -5\},$$
$$\{\overline{l}_2(x_i)\}_{i=1}^{16} = \{-0.693147, 0.060721, 0.559616, 0.853207,$$
$$1.09861, 1.26528, 1.80111, 1.94393, 2.25163, 2.27727, 2.55932,$$
$$2.56327, 2.62154, 2.68215, 2.74275, 2.80336\},$$

$$\{\underline{l}_2(x_i)\}_{i=1}^{16} = \{-0.693147, -0.131323, 0.559616, 0.817038, 1.09861, 1.22485, 1.63071, 1.82464, 2.24245, 2.27727, 2.52533, 2.52881, 2.59544, 2.66475, 2.73405, 2.80336\}.$$

Отже,

$$\left\{\left|\overline{l}_1(x_i)-\overline{l}_2(x_i)\right|\right\}_{i=1}^{16} = \{27.6931, 24.9604, 19.8779, 16.8869, 12.7764, 9.98472, 3.42074, 1.94393, 9.00163, 9.21477, 11.5593, 11.5536, 11.3715, 10.6821, 9.49275, 7.80336\},$$

$$\left\{\left|\underline{l}_1(x_i)-\underline{l}_2(x_i)\right|\right\}_{i=1}^{16} = \{27.6931, 24.8697, 18.9404, 15.6002, 10.9014, 7.77515, 2.54677, 1.82464, 11.2425, 11.2773, 11.5253, 11.5288, 11.5954, 10.6647, 9.73405, 7.80336\}.$$

Тому

$$\max_{x\in[-2,6]}\max\left\{\left|\underline{l}_1(x)-\underline{l}_2(x)\right|, \left|\overline{l}_1(x)-\overline{l}_2(x)\right|\right\} =$$
$$=\left|\overline{l}_1(x_1)-\overline{l}_2(x_1)\right| = \left|\underline{l}_1(x_1)-\underline{l}_2(x_1)\right| = 27.6931,$$

тобто віддаль $d(L_1([-2,6]), L_2([-2,6])) = 27.6931$. Функціональною ж віддаллю $d_x\left(L_1([-2,6]), L_2([-2,6])\right)$ є кусково-лінійна функція, графік якої проходить через точки

$$(x,y)\in\{(-2, 27.6931), (-1.81153, 24.9604), (-1.375, 19.8779), (-1.11811, 16.8869), (-0.75, 12.7764), (-0.5, 9.98472), (0.303752, 3.42074), (1, 1.94393), (2.5, 11.2425), (2.625, 11.2773), (4, 11.5593), (4.01928, 11.5536), (4.5, 11.5954), (5, 10.6821), (5.5, 9.73405), (6, 7.80336)\},$$

Приклад 2. Обчислити норму, функціональну норму, ширину та функціональну ширину лінійного функціонального інтервалу на інтервалі $X=[-2, 6]$ функції $y = x^2 - 8x + 7$. ▪

Розбиття інтервалу $X=[-2, 6]$ та обмежуючі функції цього лінійного функціонального інтервалу отримані при розв'язуванні попереднього прикладу:

$$\{x_i\}_{i=1}^{9} = \{-2, -0.5, 1, 2.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6\},$$

$$\{\overline{l}(x_i)\}_{i=1}^{9} = \{27, 11.25, 0, -6.75, -9, -8.75, -8, -6.75, -5\},$$

$$\{\underline{l}(x_i)\}_{i=1}^{9} = \{27, 9, 0, -9, -9, -9, -8, -7, -5\}.$$

Отже

$$\{|\overline{l}(x_i)|\}_{i=1}^{9} = \{27, 11.25, 0, 6.75, 9, 8.75, 8, 6.75, 5\},$$

$$\{|\underline{l}(x_i)|\}_{i=1}^{9} = \{27, 9, 0, 9, 9, 9, 8, 7, 5\},$$

$$\{\overline{l}(x_i)-\underline{l}(x_i)\}_{i=1}^{9} = \{0, 2.25, 0, 2.25, 0, 0.25, 0, 0.25, 0\}.$$

Тому

$$\|L([-2,6])\| = \max_{x\in X} \max\left\{\left|\underline{l}(x)\right|, \left|\overline{l}(x)\right|\right\} = 27,$$

$$\omega(L([-2,6])) = \max_{x\in X}\left(\overline{l}(x) - \underline{l}(x)\right) = 2.25.$$

Функціональною нормою $N(x) \equiv \|L([-2,6])\|_x$ цього лінійного функціонального інтервалу є кусково-лінійна функція, графік якої проходить через точки

$$(x, y) \in \{(-2, 0), (-0.5, 2.25), (1, 0), (2.5, 2.25),$$
$$(4, 0), (4.5, 0.25), (5, 0), (5.5, 0.25), (6, 0)\}.$$

Функціональною шириною $\Omega(x) \equiv \omega_x(L([-2,6]))$. цього лінійного функціонального інтервалу є кусково-лінійна функція, графік якої проходить через точки

$$(x, y) \in \{(-2, 27), (-0.5, 11.25), (1, 0), (2.5, 9),$$
$$(4, 9), (4.5, 9), (5, 8), (5.5, 7), (6, 5)\}.$$

6. Висновки. Наведені теоретичні дослідження дають підставу стверджувати коректність всіх трьох варіантів введених числових характеристик (віддалі, норми і ширини) у квазілінійному просторі $LI(X)$ лінійних функціональних інтервалів. Показано, що метричний простір $LI(X)$ повний. Введена метрика перетворює його в топологічний простір. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору. Отримані необхідні і достатні умови збіжності послідовності $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$ до відповідного граничного лінійного функціонального інтервалу. Доведена збіжність послідовності вкладених лінійних функціональних інтервалів до лінійного функціонального інтервалу їх граничного перетину, а також замкненість арифметичних операцій над лінійними функціональними інтервалами, означених в [3]. Отримані результати дають можливість будувати та досліджувати алгоритми розв'язування широкого кола задач.

Список використаних джерел:

1. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления: монография / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер ; пер. с англ. Г. Е. Минда, А. Г. Яковлева. — М. : Мир. ред. лит. по мат. наукам, 1987. — 358 с.
2. Калмыков С. А. Методы интервального анализа: монография / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1986. — 222 с.
3. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2014. — Вип. 20. — С. 48–67.
4. Сеньо П. С. Випадкові процеси : підручник / П. С. Сеньо. — Львів : Компакт-ЛВ, 2006. — 288 с.

The article specifies a notion of distance between elements, their norms and width that is included into the quasilinear space of linear interval constraints. The presence of such distance returns the quasilinear space into the metrical space. It is proved that this metrical space is full. Metrication makes this space a topological one. In this case a notion of convergence and continuity can be used in a common way as well as a metrical space is concerned.

The results got make it able to build and research effective methods of solving a big set of problems on the basis of mathematics of linear functional intervals.

Key words: *distance, norm, interval, interval width, quasilinear space, linear functional interval, constraint, set-theoretic operations, convergence.*

Отримано: 20.06.2014

УДК 519.2

Н. Ю. Щестюк, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Києво-Могилянська Академія», м. Київ

ОЦІНКА СПРАВЕДЛИВОЇ ЦІНИ ОПЦІОНІВ В МОДИФІКАЦІЯХ МОДЕЛІ ХЕЙДІ-ЛЕОНЕНКА

Знайдено формулу обрахунку справедливої ціни опціонів європейського типу для деяких моделей ціноутворення акцій, що використовують «ринковий» «активний» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю.

Ключові слова: *опціон, лог-дохідності, геометричний броунівський рух, дифузійний процес, обернений гамма-розподіл, розподіл Стьюдента.*

Вступ. На сьогоднішній день фінансові ринки та різні фінансові установи потребують досконалих методів та засобів для аналізу та передбачення цін на різні цінні папери. З однієї сторони — для оцінки їх справедливих цін (з можливістю отримання прибутку), та з іншої сторони — для хеджування власного портфелю цінних паперів, тобто для зниження ризиків можливих фінансових збитків. Цими засобами стають розроблені математичні моделі та відповідне програмне забезпечення, які дозволяють на основі всебічного аналізу статистичних даних, якісно моделювати та прогнозувати рух цінних паперів та оцінювати справедливу вартість деривативів.

У сучасній фінансовій математиці основною парадигмою ціноутворення акцій на фінансовому ринку та розрахунку справедливої ціни