The article specifies a notion of distance between elements, their norms and width that is included into the quasilinear space of linear interval constraints. The presence of such distance returns the quasilinear space into the metrical space. It is proved that this metrical space is full. Metrication makes this space a topological one. In this case a notion of convergence and continuity can be used in a common way as well as a metrical space is concerned.

The results got make it able to build and research effective methods of solving a big set of problems on the basis of mathematics of linear functional intervals.

Key words: *distance, norm, interval, interval width, quasilinear space, linear functional interval, constraint, set-theoretic operations, convergence.*

Отримано: 20.06.2014

УДК 519.2

Н. Ю. Щестюк, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Києво-Могилянська Академія», м. Київ

ОЦІНКА СПРАВЕДЛИВОЇ ЦІНИ ОПЦІОНІВ В МОДИФІКАЦІЯХ МОДЕЛІ ХЕЙДІ-ЛЕОНЕНКА

Знайдено формулу обрахунку справедливої ціни опціонів європейського типу для деяких моделей ціноутворення акцій, що використовують «ринковий» «активний» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю.

Ключові слова: *опціон, лог-дохідності, геометричний броунівський рух, дифузійний процес, обернений гамма-розподіл, розподіл Стьюдента.*

Вступ. На сьогоднішній день фінансові ринки та різні фінансові установи потребують досконалих методів та засобів для аналізу та передбачення цін на різні цінні папери. З однієї сторони — для оцінки їх справедливих цін (з можливістю отримання прибутку), та з іншої сторони — для хеджування власного портфелю цінних паперів, тобто для зниження ризиків можливих фінансових збитків. Цими засобами стають розроблені математичні моделі та відповідне програмне забезпечення, які дозволяють на основі всебічного аналізу статистичних даних, якісно моделювати та прогнозувати рух цінних паперів та оцінювати справедливу вартість деривативів.

У сучасній фінансовій математиці основною парадигмою ціноутворення акцій на фінансовому ринку та розрахунку справедливої ціни опціонів продовжує залишатись модель Блека-Шоулза-Мертона (1973), що базується на геометричному броунівському русі (в англомовній літературі модель GBM). Проте на «чорні дири» цієї моделі, яка дуже спрощує реальність вказував ще сам Ф. Блек [1]: «У простоті є і своя сила. Люди сприймають цю модель, оскільки легко можуть зрозуміти закладені у ній припущення. Ця модель досить гарна як перше наближення, а якщо Ви бачите «дири» у зроблених припущеннях, то Ви можете цю модель удосконалити, замінюючи її на більш витончену». До сих пір чимало дослідників у фінансовій математиці працюють над пошуком більш витончених моделей, що удосконалюють модель Блека-Шоулза.

Не зупиняючись на аналізі всіх альтернативних моделей, розглянемо лише модель, запропоновану у 1999 році С. Хейді [2] і надалі модифіковану С. Хейді та М. Леоненком ([3], 2005). Ця модель відома тим, що використовує броунівський рух, який залежить не від фізичного часу, а скоріше від так званого «ринкового» («операційного», «активного») часу та веде до узагальнених гіперболічних розподілів логарифмічних дохідностей. Тим самим модель стає більш узгодженою з реальними статистичними даними. Ідея виникнення нового часу інтуітивно зрозуміла, адже ціна базового активу може змінюватись в випадкові моменти часу, в залежності від тих чи інших раптових подій, які вплинули на ціну акцій, а не періодично з кроком в один біржовий день, як це було в моделі Блека-Шоулза. Не дивлячись на значну увагу до цієї ідеї з боку ряду дослідників в області фінансової математики, стохастичне диференціальне рівняння, що веде до моделі Хейді-Леоненка так і не було представлено.

У цій статті, завдяки появі деякого узагальнення теорії стохастичного числення Іто, запропонованої у роботі Кобояші [4], ми почнемо із стохастичного диференціального рівняння, що включає член, який породжується процесом «нового» часу

$$dP_t = \mu_1(t,T_t) + \mu_2(t,T_t)P_t dT_t + \sigma(t,T_t)P_t W(T_t),\ t > 0 \qquad (1)$$

і, розглянувши випадок, коли коефіцієнти $\mu_1(t,T_t) = \mu$, $\sigma(t,T_t) = \sigma$ є константами та $\mu_2(t,T_t) = \theta + \dfrac{\sigma^2}{2}$, отримаємо, що ціновий процес

$$P_t = \exp(\mu t + \theta T_t + \sigma W(T_t)),\ t \ge 0 \qquad (2)$$

який і представляє модель Хейді-Леоненка є строгим розв'язком розвязком (1). $W(t)$, $t \ge 0$, є стандартним броунівським рухом, T_t, $t \ge 0$ є процесом «нового» часу і являє собою додатній, неспадний стохастичний процес зі стаціонарними, але не обов'язково незалежними приростами. Для моделі (2) розглянемо послідовність приростів «нового» часу за одиничний проміжок: $\tau_t = T_t - T_{t-1}$, $t = 1,2,....$ Тоі лог-дохідності цієї моделі мають вигляд

$$X_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \mu + \theta\tau_t + \sigma(B(T_t) - B(T_{t-1}) = \mu + \theta\tau_t + \sigma\sqrt{\tau_t}B(1) \quad (3)$$

Для конструкції процесу «ринкового» «активного часу» у [3] було використано процес χ — квадрат. Тоді маргінальним розподілом для T_t виявився гамма-обернений розподіл $RG\left(\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right)$, а розподілом для лог-дохідностей — розподіл Стьюдента. Проте кореляційна структура цієї моделі могла бути визначеною лише для цілих $\nu \geq 4$. Цей недолік було подолано за допомогою нового підходу до конструкції стохастичного активного часу T_t, що був запропонований М. Леоненком. Новий підхід базувався на ідеї представлення T_t через суперпозицію процесів дифузії та спирався на статтю Б. Біблі [5] про побудову процесів дифузії з наперед заданими властивостями. У статтях [6–9] М. М. Леоненком разом із співавторами було розглянуто випадки, коли τ_t є стаціонарними процесами дифузії та мають обернену гаусівьку щільність та коли τ_t мають гамма щільність та деякі інші. Випадок представлення T_t через суперпозицію процесів дифузії з гамма-оберненою щільністю приростів раніше не розглядався.

У цій статті буде побудовано фрактальний «активний» час T_t:

$$T_0 = 0\,,\; T_t = \sum_{i=1}^{[t]} \tau_i + \tau_{[t]+1}(t - [t]), \quad (4)$$

де $\tau_s = \tau_s{}^{(m)}, s \geq 0$ є стаціонарним процесом з маргінальним розподілом, що представляє обернений гамма-розподіл для $m = 1$ та суму двох обернених гама-розподілів для $m = 2$. Далі буде розглянуто дві нові моделі, що утворюються при $m = 1$ та $m = 1$ і є модифікаціями моделі Хейді-Леоненка. Для обох моделей буде розглянуто теорію розподілів лог-дохідностей, а також буде виведено формулу для обрахунку справедливої ціни опціонів та перевірено її узгодженість з реальними статистичними даними.

2. Стохастичне диференціальне рівняння (СДР), що містить член, який породжується «новим» часом. Запропонована модель (1) належить до класу СДР Іто, що містять член, який породжується «активним» «новим» часом. Відомим є класичне СДР Іто у формі

$$dY(t) = b(t,Y)dt + y(t,Y_t)dW(t)$$

з початковою умовою $Y_0 = y_0$, де $W(t)$, $t \geq 0$, є стандартним броунівським рухом (Вінеровським процесом), $b(t,Y_t)$, $\sigma(t,Y_t)$ є дійснозначними функціями. Кобаяші [4] розробив стохастичне числення для більш широкого класу СДР у формі

$$dX\left(t\right) = \mu\left(t,T_t,X_t\right)dt + \rho\left(t,T_t,X_t\right)dT_t + y\left(t,T_t,X_t\right)dW\left(T_t\right) \qquad (5)$$

з $X_0 = x_0$, де W_t є (F_t) — семімартингал та T_t є неперервним (F_t) — новим часом. dT_t не може бути записано через dt, бо реалізації T_t не є обов'язково абсолютно неперервними по відношенню до міри Лебега в загальному випадку. Дійснозначні функції $\mu\left(t,T_t,X_t\right)$, $\rho\left(t,T_t,X_t\right)$, $y\left(t,T_t,X_t\right)$ мають задовольняти умову Ліпшиця та деяку технічну умову [4]. Якщо $\mu\left(t,T_t,X_t\right) = \mu\left(t,T_t,\right)X_t$, $\rho(t,T_t,X_t) = \rho(t,T_t)X_t$, $\sigma(t,T_t,X_t) = \sigma(t,T_t)$ то (5) буде однорідним лінійним СДР та буде мати єдиний строгий розв'язок (див. Proposition 4.4, Kobayashi [4]). Цей розв'язок може бути записаний у вигляді

$$X(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \mu(t,T_t)dt + \int_0^{T_t}\left(\rho(t,T_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T_t)\right)dt + \int_0^{T_t}\left(\sigma(t,T_t)\right)dW\right)_t. \qquad (6)$$

Запропоноване рівняння (1) може бути отримано з (5), якщо $\mu(t,T_t,X_t) = \mu X_t$, $\rho(t,T_t,X_t) = \theta + \dfrac{\sigma^2}{2}$, $\sigma(t,T_t,X_t) = \sigma$. Точний розв'язок (1) знаходиться згідно з (6) і дорівнює (порівняємо з (2)):

$$X_t = \exp\left(\mu t + \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)T_t + \sigma W(T_t)\right),\ t \geq 0\,. \qquad (7)$$

Таким чином було показано зв'язок між моделлю Хейді-Леоненка і СДР, що її породжує. Зауважимо, що при $T_t = t$ (1) стає моделлю Блека-Шоулза $dP(t) = b(t,P_t)\cdot dt + \sigma(t,P_t)\cdot dW(t)$ з $P_0 = p_0$, де $b = \mu + \theta + \dfrac{\sigma^2}{2}$. Розв'язок СДР Блека-Шоулза дорівнює

$$P_t = \exp(\mu t + \sigma W_t),\ t \geq 0\,.$$

Асимптотичну поведінку розв'язку (7) досліджено в [4], звідки випливає, що як тільки ринковий час T_t прискорює швидкість, з якою тече фізичний час, то залежність поведінки розв'язку P_t від μ зменшується, а від θ збільшується.

3. Запропоновані моделі ціноутворення акцій. В якості першої моделі ми розглянемо випадок, коли $\tau_i = \tau_i^{(m)}$ складаються з одного доданку та підкорюються оберненому гамма розподілу.

Модель 1: $m=1$, $\tau_i=\tau_i^{(1)}=Y_t$, $t=1,2,3...$, а Y_t задовольняє рівнянню дифузії з наперед заданим маргінальним (гамма-оберненим) розподілом

$$dY(t)=-\theta(Y(t)-\frac{\nu}{\delta^2-2})dt+\sqrt{\frac{4\theta}{\delta^2-2}Y^2(t)}dW(t),\quad t\geq 0\,,$$

де $\theta>0$ та W_t є стандартним Броунівським рухом (Вінерівським процесом). Тоді «активний час» T_t набуває вигляду:

$$T_t=T_t^1=\sum_{i=1}^{t}\tau_i 1.$$

А щільність τ_i виражається як щільність оберненого гамма-розподілу $R\Gamma\left(\frac{\nu}{2},\frac{\delta^2}{2}\right)$, де $\delta,\nu>0$:

$$f_{R\Gamma}(x)=\frac{\left(\delta^2/2\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}x^{-\frac{\nu}{2}-1}e^{\frac{-\delta^2}{2x}},x>0\,. \tag{8}$$

Момент *k*-го порядку для гамма-оберненої випадкової змінної з параметрами α,β виражається формулою:

$$E[\tau_t^k]=\frac{\beta^k}{(\alpha-1)...(\alpha-k)},\alpha>k\,.$$

В частковому випадку для $R\Gamma\left(\frac{\nu}{2},\frac{\delta^2}{2}\right)$ математичне очікування та дисперсія τ_t дорівнюватимуть:

$$E[\tau_t]=\frac{\delta^2}{\nu-2},\nu>2,\ Var[\tau_t]=\frac{2\delta^2}{(\nu-2)^2(\nu-4)},\nu>4\,,$$

Якщо розглянути характеристичну функцію випадкової величини $X=\mu+b\varepsilon$, де незалежні випадкові величини ε та b^2 мають стандартний нормальний розподіл *N*(0, 1) та обернений гамма розподіл $R\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{\delta^2}{2})$ відповідно, то можна показати [7], що лог-дохідності X_t будуть Стьюдент типу $T(\mu,\delta,\nu)$ з ймовірнісною функцією щільності

$$f(x) = c(\nu,\delta)\frac{1}{\left[1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right]^{\frac{\nu+1}{2}}}, x \in R,$$

де $\mu \in R$ — параметр зсуву, $\delta > 0$ — параметр масштабування, $\nu > 0$ степінь свободи, та $c(\nu,\delta) = \frac{\Gamma\left((\nu+1)/2\right)}{\delta\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}$.

Дійсно,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{it\mu}\int_0^\infty e^{-(\frac{t^2}{2})u} f_{b^2}(u)du = e^{it\mu}\int_0^\infty e^{-(\frac{t^2}{2})u} rg\left(\frac{\nu}{2},\frac{\delta^2}{2}\right)du =$$

$$= e^{it\mu}\frac{K_{\upsilon/2}\left(\delta|t|\right)\left(\delta|t|\right)^{\frac{\upsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} 2^{-\left(\frac{\nu}{2}\right)+1}, t \in R$$

Це є бажаним результатом, бо загальновідомим є факт, що розподіл Стьюдента точніше описує розподіл лог-дохідностей (враховує «важкі хвости»). Використовуючи формулу

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{\left(1+x\right)^\mu}dx = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu-\lambda)}{\Gamma(\mu)}, 0 < \lambda < \mu$$

ми можемо отримати формулу для непарних та центральних моментів X_t. Моменти X_t (як це було показано в статті [5]) в цьому випадку дорівнюватимуть:

$$EX_t = \mu, E(X_t-\mu)^n = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-n}{2}\right)\delta^{n+1}c(\nu,\delta)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, n = 2k < \mu, \\ 0, n = 2k-1. \end{cases}$$

І в результаті набудуть вигляду:

$$\mu_2 = E(X_t-\mu)^2 = \frac{\delta^2}{\nu-2}, \nu > 2, \mu_3 = 0, \mu_4 = \frac{3\delta^4}{(\nu-4)(\nu-2)}, \nu > 4.$$

В якості другої моделі ми розглядаємо випадок, коли τ_i^m складаються з двох доданків, кожен з яких підкорюються оберненому гамма розподілу:

Модель 2: $m=2$, $\tau_i^2 = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$, $t = 1,2,3,\dots$, а $Y_t^{(1)}$ та $Y_t^{(2)}$ є незалежними процесами, які задовольняють

$$dY(t) = -\theta^{(j)}(Y^{(j)}(t) - \frac{\nu^{(j)}}{\delta^{(j)2}-2})dt +$$
$$+\sqrt{\frac{4\theta^{(j)}}{\delta^{(j)2}-2}Y^{(j)2}(t)dW(t)}, \quad j=1,2,\, t\geq 0.$$

Для цієї моделі «активний час» T_t набуває вигляду:

$$T_t = T_t^2 = \sum_{i=1}^{t}\tau_i^2 = \sum_{i=1}^{t} Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}.$$

В даній моделі щільність суміші буде виражатись наступним чином:

$$f_{R\Gamma_1 + R\Gamma_2} = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i f_{R\Gamma}\left(x, \frac{\nu_i}{2}, \frac{\delta^2}{2}\right), \tag{9}$$

де n та m параметри з розподілів компонент, тобто $Y_t^{(1)} \sim$ $\sim Ga^{-1}(n+1/2, \alpha_1)$ і $Y_t^{(2)} \sim Ga^{-1}(m+1/2, \alpha_2)$, $n, m \in N$, $m \geq n$. А згортка гамма — обернених розподілів, як показали Ф. Джирон та К. Кастіліо [10] за деяких обмежень на параметр форми — а саме, за умови, що він є напівцілим, розподілена як суміш скінченної кількості гамма — обернених розподілів, що всі мають однаковий параметр масштабу:

$$Y_1 + Y_2 \sim \sum_{i=1}^{m+1} p_i \cdot rg\left(\left(\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2, n - \frac{1}{2} + i\right),$$

де ваги $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1$ знаходяться рекурсивно з формул:

$$p_{m+1} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^n \left(\sqrt{\alpha_2}\right)^m}{\left(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}\right)^{n+m}},$$

$$p_{j+1} = 2^{2j+2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+j\right)\left(\frac{c\gamma_{n+j}}{2^{2j+2}\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}\right)^{n+j}}\right. -$$
$$\left. - \sum_{i=j+2}^{m+1} \frac{p_i}{2^{2i}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+i\right)} \cdot \frac{(n+2i-2-j)!}{(n+j)!(i-1-j)!}\right), \quad j = 0,1,\dots m-1,$$

де

$$c=\frac{\pi}{2^{2(n+m)}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\gamma_k = 2^{2k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\cdot\frac{(2m-k+i)!}{(k-i)!(m-k+i)!}\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^i\left(\sqrt{\alpha_2}\right)^{k-i},\ k=0,1,...,n.$$

$$\gamma_{n+k} =$$

$$2^{2(n+k)}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\cdot\frac{(2m-n-k+i)!}{(n+k-i)!(m-n-k+i)!}\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^i\left(\sqrt{\alpha_2}\right)^{n+k-i}$$

$$\gamma_{m+k} = 2^{2(m+k)}\sum_{i=k}^{n}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\cdot\frac{(m-k+i)!}{(m+k-i)!(i-k)!}\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^i\left(\sqrt{\alpha_2}\right)^{m+k-i},$$

$$k=0,1,...,n$$

Доведення цього факту приводиться в статті [10].

В свою чергу математичне сподівання для приростів «нового часу» обчислюється як:

$$E_{\tau_1+\tau_2}=\sum_{i=1}^{n+1}p_i\frac{\delta^2}{\nu_i-2}.$$

А для визначення розподілу лог-дохідностей цієї моделі обчислимо характеристичну функцію випадкової величини $X=\mu+b\varepsilon$, де випадкові величини ε та b^2 незалежні, ε має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$ а b^2 розподілено як суміш $Y_1+Y_2\sim$ $\sim\sum_{i=1}^{m+1}p_i\cdot rg\left(\left(\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2, n-\frac{1}{2}+i\right)$. Тоді

$$\varphi_X(\varsigma)=e^{i\varsigma\mu}\int_0^{\infty}e^{-(\varsigma^2/2)x}\times\sum_{i=1}^{m+1}p_i f_{R\Gamma}(((\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2, n-\frac{1}{2}+i))dx,$$

де якщо ввести $\left(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}\right)^2=\frac{\delta^2}{2}$ та $n-\frac{1}{2}+i=\frac{\nu_i}{2}, i=1,2,...,m+1$, то характеристична функція набуде вигляду:

$$\varphi_X(\varsigma)=e^{i\varsigma\mu}\sum_{i=1}^{m+1}p_i\varphi_T(\varsigma,\delta,\nu_i),$$

де $\varphi_T(\varsigma,\delta,\nu_i), i=1,2,...,m+1$ є характеристичними функціями симетричного розподілу Стьюдента. Моменти X_t матимуть вигляд:

$$\mu_2=E(X_t-\mu)^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{3}p_i\frac{\delta^2}{\nu_i-2},$$

$$\mu_4 = E(X_t - \mu)^4 = \sigma^4 \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{3\delta^2}{(\nu_i - 2)(\nu_i - 4)} .$$

4. Оцінювання справедливої ціни опціонів та перевірка моделі на узгодженість з реальними фінансовими даними. Розглянемо Європейський опціон зі страйковою ціною K та часом до його виконання Y. Нехай $C(Y, K)$ — ціна Європейського опціону купівлі та r — річна процентна ставка. До цінового процесу акцій P_t застосуємо ризик-нейтральний підхід, згідно якого $e^{-rt}P_t$ є мартингалом та існування еквівалентної мартингальної міри є наслідком відсутності арбітражу. Розглянемо фільтрацію σ-алгебр, тобто потік інформації, доступної до моменту t: $F_t = \sigma\left(\left\{B(u), u \le T_t\right\}, \left\{T_u, u \le t\right\}\right)$ і $F^*_{s,t} = \sigma\left(\left\{B(u), u \le T_s\right\}, \left\{T_u, u \le s, s \le t\right\}\right)$. Тоді, згідно Finlay and Seneta ([11], 2006)

$$E\left(e^{-rt}P_t \middle| F_s\right) = e^{-rs}P_s e^{(\mu - r)(t-s)} E\left(e^{\left(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(T_s - T_s\right)} \middle| F_s \right).$$

Якщо вибрати згідно цього підходу $\mu = r$ та $\theta = -\frac{1}{2}\sigma^2$, тоді $E\left(e^{-rt}P_t \middle| F_s\right) = e^{-rs}P_s$ і $e^{-rs}P_s$ є мартингалом. Це так званий ``skew-correcting" мартингал, бо θ визначає коефіцієнт асиметрії. Далі, згідно ризик-нейтрального підходу, справедлива ціна європейського опціону купівлі визначається як дисконтоване математичне сподівання платіжної функції:

$$C(Y, K) = e^{-rY} E\left(P_Y - K\right)^+ =$$

$$= E\left(e^{-rY}P_Y - Ke^{-rY}\right)^+ = E\left(e^{-rY}P_0 e^{\mu Y + \theta T_Y + \sigma B(T_Y)} - Ke^{-rY}\right)^+ =$$

$$= E\left(P_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T_Y + \sigma B(T_Y)} - Ke^{-rY} \right)^+ =$$

$$= E\left(E\left(\left(P_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T_Y + \sigma\sqrt{T_Y}Z} - Ke^{-rY} \right) I_{Z > -\bar{d}_2} \middle| T_Y \right) \right) =$$

$$= E\left(P_0 \Phi\left(\bar{d}_1\right) - Ke^{-rY}\Phi\left(\bar{d}_2\right)\right),$$

де

$$\overline{d}_1 = \frac{\ln\frac{P_0}{K} + rY + \frac{1}{2}\sigma^2 T_Y}{\sigma\sqrt{T_Y}}, \quad \overline{d}_2 = \frac{\ln\frac{P_0}{K} + rY - \frac{1}{2}\sigma^2 T_Y}{\sigma\sqrt{T_Y}},$$

$\Phi(.)$ є інтегральною функцією стандартного нормального розподілу. Оскільки $T(Y)$ є випадковою величиною з щільністю розподілу f_{T_Y}, формулу оцінювання можна записати у вигляді:

$$C = C(Y,K) = \int_0^{\infty}\left(P_0\Phi\left(\overline{d}_1(t)\right) - Ke^{-rY}\Phi\left(\overline{d}_2(t)\right)\right) f_{T_Y}(t)\,dt. \qquad (10)$$

Отже для відомих S_0, K, Y, r та f_{T_Y}, математичне сподівання (10) може бути обчислено наближеними методами. Відкритим залишилось питання де взяти f_{T_Y}, адже при побудові моделей ми визначали розподіл тільки для приростів процесу ринкового часу. Один з підходів — скористатись асимптотичним розподілом $T(Y)$. З твердження про асимптотичну самоподібність розподілу $T(Y)$ наших моделей, яку доведено в [12] випливає, що $T_Y = E_{\tau_1}(Y - \sqrt{Y}) + \tau_1\sqrt{Y}$. Тоді щільність f_{T_Y} може бути апроксимована щільністю $YE_{\tau_1} + \sqrt{Y}\left(T_1 - E_{\tau_1}\right)$ як щільність лінійного перетворення випадкової величини $T_1 = \tau_1$. Для нашої моделі 1 розподілом $T_1 = \tau_1^{(1)}$ є $R\Gamma\left(x, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\upsilon}{2}\right)$. Таким чином

$$f_{T_Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{Y}} f_{R\Gamma}\left(\frac{u - E\left(\tau_1^{(1)}\right)\left(Y - \sqrt{Y}\right)}{\sqrt{Y}}, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\upsilon}{2}\right).$$

Щільність оберненого гамма-розподілу задається формулою (8). Математичне сподівання $E_{\tau_1} = E(\tau_1^{(1)}) = \frac{\delta^2}{\nu - 2}$. Для другої моделі щільність розподілу $T_1 = \tau_1^{(2)}$ задається як суміш (9), а отже

$$f_{T_Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{R\Gamma}\left(\frac{u - E\left(\tau_1^{(1)}\right)\left(Y - \sqrt{Y}\right)}{\sqrt{Y}}, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\upsilon_i}{2}\right),$$

де математичне сподівання приростів $\tau_1^{(2)}$ обчислюється як $E(\tau_1^{(2)}) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i \dfrac{\delta^2}{\nu_i - 2}$. Отже було виведено справедливу ціну Європейського опціону купівлі (10) як інтеграл за мірою, яка є щільністю розподілу $T(Y)$, та показано, як знаходиться ця щільність для двох розглянутих моделей.

5. Порівняння моделей з моделлю блека-шоулза та перевірка на узгодженність з реальними фінансовими даними. Для перевірки моделей на узгодженість було розглянуто ціни акцій таких фірм як Stock index S\&P 500 (USA), Stock index MICEX O\&G (Russia), MICEX TLC (Russia), MICEX M\&M (Russia), Kraft Fooda Inc., Coca-cola Inc., Google Inc. та деяких інших. Загалом, було досліджено більше 20 масивів щоденних цін закриття на протязі року.

Проілюструємо алгоритм обчислення справеливої ціни опціонів на прикладі фінансових даних компанії Google Inc. Ціни акцій було взято із сайту www.nasdag.com за період з 24.07.2012 по 24.07.2013. На цьому сайті можна отримати як річну статистику цін акцій цих компаній, так і ціни кол та пут опціонів за різних страйків для певних дат в майбутньому. Ціна закриття акцій в цей день була на рівні 901,05.

Першим кроком було визначення параметрів розподілу лог-повернень методом моментів. Вибіркові значення середнього, дисперсії та центрального четвертого моменту виявились рівними $\mu_1 = -0{,}001047$, $\mu_2 = 1{,}87 \cdot 10^{-4}$, $\mu_4 = 3{,}12 \cdot 10^{-7}$ відповідно. Оскільки для першої моделі теоретичні значення моментів для лог-повернень (3) мають вигляд $\mu_2 = \dfrac{\sigma^2\delta^2}{\nu - 2}$, $\mu_4 = \dfrac{3\delta^4\sigma^4}{(\nu-2)(\nu-4)} = \dfrac{3\sigma^2\delta^2\mu_2}{\nu - 4}$, $\sigma^2 = \dfrac{\mu_2}{1/252}$,

то оцінки для параметрів розподілу Стьюдента дорівнюють $\widehat{\mu} = -0{,}001047$, $\widehat{\delta} = 0{,}08929$, $\widehat{\upsilon} = 4{,}0329$. Отже, для першої моделі математичне сподівання приростів нового «ринкового» часу виявилось рівним $E_{\tau_1} = E(\tau_1^{(1)}) = 0{,}0039$. Тепер для відомих S_0, K, Y, r інтеграл в (10) може бути обчисленим наближеними методами. Для другої моделі для $m = 1$, $n = 1$ маємо $n - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{\nu_1}{2}$, $n - \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{\nu_2}{2}$, отже, $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 5$. Використавши метод моментів, отримаємо

$$\mu_2 = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 \sum_1^2 p_i \frac{\delta^2}{\nu_i - 2} = \sigma^2\delta^2\left(\frac{p_1}{1} + \frac{p_2}{3}\right) = \widehat{\mu}_2,$$

$$\mu_4 = E(X_t - \mu)^4 = \sigma^4 \sum_1^2 p_i \frac{3\delta^4}{(\nu_i - 2)(\nu_i - 4)} = 3\sigma^4 \delta^4 \left(\frac{p_1}{-1} + \frac{p_2}{3} \right) = \hat{\mu}_4 \,,$$

де $\sigma^2 = \dfrac{\mu_2}{1/252}$, $p_1 + p_2 = 1$.

Звідси знаходимо $\hat{\delta} = 0{,}10824$, $p_1 = 0{,}0021$, $p_2 = 0{,}9979$. Для обчислення щільності маємо

$$f_{RG1+RG2}(x) = \sum_1^3 p_i f_{RG}\left(n - \frac{1}{2} + i, \left(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}\right)^2, x\right) = \sum_1^3 p_i f_{RG}\left(\frac{\nu_i}{2}, \delta^2, x\right),$$

математичне сподівання приростів $E_{\tau_2} = \sum_1^2 p_i \dfrac{\delta^2}{\nu_i - 2}$. Отже ціна опціону (10) може бути наближено обчислена також і для другої моделі.

Залишилось порівняти розраховані ціни опціонів із значеннями, отриманими за формулою Блека-Шоулза та із значеннями, за якими реально можна було купити (продати) опціон купівлі.

Наступна таблиця містить порівняльні значення цін опціонів, обрахованих за моделлю 1, моделлю 2, за формулою Блека-Шоулза, та реальні біржові ціни, що утворились як баланс попиту та пропозиції для різних цін виконання (страйків). Для даних $S_0 = 901.05$, $Y = 0.17(1/6)$, $r = 0.0229$, $\sigma = 0.218$ представлено серію колопціонів з часом до виконання 2 місяці (1/6 року) , що здійсниться 21 вересня 2013.

Таблиця 1

Страйк	**Ціна закриття**	**Ціна пропозиції**	**Ціна попиту**	**Модель 1**	**Модель 2**	**Модель Б-Ш**
815	103,51	89,1	91,4	89,94	101,39	93,94
820	95	84,4	86,8	84,92	95,73	89,66
825	67,19	79,8	82,3	79,9	90,07	85,46
830	79,9	75,5	76,9	74,88	84,41	81,34
835	59,23	71,3	73,3	69,85	78,75	77,31
840	70,8	67	68	64,84	73,09	73,37
845	64,3	60,7	63,7	60	67,43	69,53
850	65,3	58,5	59,7	54,8	61,77	65,79
855	55,33	54,5	55,7	50	56,11	62,16
860	53,9	50,6	51,6	44,76	50,45	58,63
865	55,2	46,9	47,7	39,94	44,79	55,22
870	50,1	43,2	44,19	34,72	39,14	51,92
875	40	39,9	40	29,71	33,48	48,74

Таблиця 1 показує досить близькі значення цін, обрахованих за різними моделями та представленими на ринку. Моделі, що запропоновано у цій статті як і модель Блека-Шоулза використовуються для обчислення справедливої ціни опціонів. Трейдер, знаючі теоретичну (справедливу)

ціну опціону шукає «недооцінені» опціони. При порівнянні теоретичних (справедливих) цін опціонів, обчислених за різними моделями, трейдер сам повинен прийняти рішення щодо купівлі цього деривативу. Якщо перевірка розподілу лог-дохідностей є на користь розподілу Стьюдента, то варто віддати перевагу моделям Хейді-Леоненка.

Висновки. Розглянуто нові різновиди моделі Хейда-Леоненка для ціноутворення ризикованих активів, що використовують «ринковий» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю і веде до Стьюдент — розподілу лог-дохідностей у першій моделі або до суміші розподілів Стьюдента — у другій. Показано, що процес «ринкового часу» є асимптотично-самоподібним, що дає змогу запропонувати формулу для обрахунку справедливої ціни опціонів та перевірити її узгодженість з реальними статистичними даними. Проте розподіл приростів нового часу у моделі 2 було розглянуто лише для часткового випадку, коли параметр форми є напівцілим. Доцільно було б розглянути більш широкий випадок, коли параметри оберненого гамма розподілу є довільними. Також цікаво було б узагальнити модель 2, розглянувши суму будь-якої скінченної кількості доданків, розподілених за оберненим гамма-розподілом.

На завершення статті висловлюється подяка проф. М. М. Леоненку за постановку задачі та співпрацю над матеріалом цієї статті.

Список використаних джерел:

1. Black F. The holes in Black-Scholes / F. Black // RISK-magazin. — 1988. — Vol. 26. — P. 47–51.
2. Heyde C. C. A risky asset model with strong dependence through fractal activity time / C.C. Heyde // J. Applied Probability. — 1999. — Vol. 36. — P. 1234–1239.
3. Heyde C. C. Student Processes / C. C. Heyde, N. N. Leonenko // J. Applied Probability. — 2005. — Vol. 37. — P. 342–365.
4. Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations / K. Kobayashi // J. of Theoret. Probability. — 2011. — Vol. 24,3. — P. 789–820.
5. Bibby B.M. Diffusion-type models with given martingal distribution and autocorrelation function / B. M. Bibby, M. I. Skovgaard, M. Sorensen // Bernoulli 11. — 2005. — P. 191–220.
6. Leonenko N. N. Statistical inference for reciprocal gamma diffusion process / N. N. Leonenko, N. Suvak // J. of Statistical Planning and Inference. — 2010. — Vol. 140. — P. 30–51.
7. Leonenko N. N. The Student subordinator model with dependence for risky asset returns / N. N. Leonenko, S. Petherick, A. Sikorskii // J. Commun. Stat.-Theory Methods. — 2011. — Vol. 40. — P. 1–15.
8. Leonenko N. N. Normal Inverse Gaussian model for risky asset with dependence / N. N. Leonenko, S. Petherick and A. Sikorskii // Statistics and Probability Letters. — 2012. — Vol. 82, № 1. — P. 109–115.

9. Leonenko N. N. Fractal Activity Time Models for Risky Asset with Dependence and Generalized Hyperbolic Distributions / N. N. Leonenko, S. Petherick, A. Sikorskii // Stochastic Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 30:3. — P. 476–492.
10. Giron F. J. A note on the convolution of inverted-gamma distributions with applications to the Behrens-Fisher distribution / F. J. Giron, C. del Castilo // Statistic and Operations Research. — 2001. — Vol. 95. — P. 39–44.
11. Finlay R. Option pricing with VD-like models / R. Finlay, E. Seneta // Int. J. Theor. Appl. Finance. — 2008. — Vol. 11, № 8. — P. 943–955.
12. Щестюк Н. Ю. Гамма-обернені дифузійні моделі ціноутворення акцій / Н. Ю. Щестюк // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 113. — Р. 23–26.
13. Щестюк Н. Ю. Справедлива ціна Європейських опціонів для гамма-обернених дифузійних моделей ціноутворення акцій / Н. Ю. Щестюк, А. А. Фарфур // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 113. — Р. 23–26.

A fair pricing formula for european options for risky asset models of the stock price with the dependence through activity time are described. The construction of activity time uses superpositions of diffusion processes with given marginal reciprocal gamma distribution.

Key words: *options, log-returns, GBM, diffusion processes, reciprocal gamma distribution, Student distribution.*

Отримано: 17.09.2014