УДК 517.947

А. П. Громик*, канд. техн. наук, доцент,
І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наук

* Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам’янець-Подільський,
** Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В НЕОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом функцій впливу вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі. Частковим випадком розглянутої задачі є математична модель вільних коливних процесів.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, функції впливу.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [3], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Громяка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (гіперболічних, параболічних, еліптичних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [5; 12].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4; 6–7].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом функцій впливу побудовано інтегральне зображення точного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, R_{n+1} = +\infty;$$

$$\varphi \in [0; 2\pi); z \in (-\infty; +\infty)\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \tag{1}$$

$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}; \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0,1; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0; \quad \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0,1 \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0;\ j = 1,2;\ k = \overline{1,n}, \quad (5)$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j,}$ a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;\ \ c_{1k} c_{2k} > 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z) = \{f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \ldots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};$$

$$g^1(r,\varphi,z) = \left\{g_1^1(r,\varphi,z), g_2^1(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z) = \left\{g_1^2(r,\varphi,z), g_2^2(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\} \ —$$

задані обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \ldots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\} \ —$$

шукана двічі неперервно-диференційовна функція.

Основна частина. Припустимо, що розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [14; 15; 8].

До задачі (1)–(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-i\sigma z) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \ \ i = \sqrt{-1}\ , \quad (6)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \exp(i\sigma z) d\sigma \equiv g(z), \quad (7)$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (8)$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (6) внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \left\{(t,r,\varphi); t > 0; r \in I_n^+; \varphi \in [0;2\pi)\right\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]\tilde{u}_j + \left(a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_j = \quad (9)$$

$$= \tilde{f}_j(t,r,\varphi,\sigma);\ r \in I_j;\ j = \overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r,\varphi,\sigma); \ \left.\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r,\varphi,\sigma); \ \ r \in I_j; \ j = \overline{1,n+1}; \quad (10)$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s \tilde{u}_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0; \ \left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; \ \ s = 0,1 \quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\right|_{r=R_k} = 0; \ j = 1,2; \ k = \overline{1,n}. \quad (12)$$

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right] = \int_0^{2\pi} g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi \equiv g_m, \ \ i = \sqrt{-1}\,, \quad (13)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{\text{Re}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \quad (14)$$

$$F_m\left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2}\right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_{m,} \quad (15)$$

де $\text{Re}(\cdots)$ — дійсна частина виразу $(\cdots)$ щодо φ; $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$; $k = 1,2,3\ldots$

Інтегральний оператор F_m, який діє за формулою (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \left\{(t,r); t > 0; r \in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm}^2}{r^2}\right)\tilde{u}_{jm} + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm} = \quad (16)$$
$$= \tilde{f}_{jm}(t,r,\sigma); \ r \in I_j; \ j = \overline{1,n+1}; \ \nu_{jm} = a_{\varphi j} m / a_{rj}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r,\sigma); \ \left.\frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r,\sigma); \ \ r \in I_j; \ j = \overline{1,n+1}, \quad (17)$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m}}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0,1 \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1,m}\right]\right|_{r=R_k} = 0; \ j = 1,2; \ k = \overline{1,n}. \tag{19}$$

До задачі (16)–(19) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Бесселя на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [8]:

$$H_{(n)}\left[f(r)\right] = \int_0^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{20}$$

$$H_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \tag{21}$$

$$H_{(n)}\left[B_{(m)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k rdr; \quad R_0 = 0, \ R_{n+1} = +\infty. \tag{22}$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані в [8], спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}^2\theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)B_{\nu_{km}} + a_{r,n+1}^2\theta(r - R_n)B_{\nu_{n+1,m}},$$

де $B_{\nu_{km}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\nu_{km}^2}{r^2}$ — диференціальний оператор Бесселя, $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо сепаратну систему диференціальних рівнянь (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{f}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{f}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^1_{1m}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^1_{2m}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{g}^1_{n+1,m}(r,\sigma) \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^2_{1m}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^2_{2m}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{g}^2_{n+1,m}(r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2;\;\; j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr$$
$$\int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \int_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr \Bigg] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm}(\lambda,\sigma);\;\; \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^2_{jm}(\lambda,\sigma), \tag{27}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\;\; j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{f}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr,\;\; j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}^s_{jm}(\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}^s_{jm}(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\;\; s = 1,2;\;\; j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2$; $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\sigma), \tag{28}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma); \quad \frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\Bigg|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma), \tag{29}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma); \quad \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma),$$

$$\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^1(\lambda,\sigma), \quad \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^2(\lambda,\sigma),$$

$$\Delta^2(\lambda,\sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі (28), (29) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) &= \frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) + \\ &+ \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\sigma)d\tau.\end{aligned} \tag{30}$$

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $H_{(n)}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}\left[\cdots\right] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty}\cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int_0^{+\infty}\cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)$

визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)=\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma)\right]\times$$

$$\times V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\sigma)\times \tag{32}$$

$$\times V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (32), обернені оператори F^{-1} та F_m^{-1}, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\times \tag{33}$$

$$\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho+\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho;$$

$$j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left(\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\times\right.$$

$$\left.\times V_j(r,\lambda)V_k(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\cos(\sigma z)d\lambda d\sigma\right)\cos(m\varphi)$$

матриці впливу (функції впливу) розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (33) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності функцій впливу.

Методами з [2; 17] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$ задовольняють умови:

1) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty;+\infty)$;
4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r) = r\sigma(r)$ за змінною r на множині I_n^+;
5) справджують умови спряження, то

гіперболічна початково-крайова задача (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}^2 = a_{\varphi j}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі.

Зауваження 2. Аналіз розв'язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 3. У випадку $\chi_j^2 \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 4. У випадку $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга ($k = \overline{1,n},$) умови спряження (5) збігаються з умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках (при $f_j(t,r,\varphi,z) \equiv 0$) розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вільних коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука. 1978. — 352 с.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
3. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. — М. : ИЛ, 1961. — 122 с.
4. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
7. Конет І. М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
8. Ленюк М. П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя / М. П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. — К. : Ін-т математики АН України, 1993. — Вип. 2. — Ч. 1. — С. 89–101.
9. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — К. : Наук. думка. 1991. — 232 с.
10. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
11. Самойленко А. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А. М. Самойленко, Б. П. Ткач. — К. : Наук. думка, 1992. — 208 с.
12. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
13. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1962. — 292 с.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
16. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : Изд-во МГУ, 1991. — 112 с.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

By the method of integral and hybrid integrated transforms, in combination with the method of influence functions the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise homogeneous cylindrical-circular space is obtained for the first time. A mathematical model of free oscillation processes is a partial case of a considered problem.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugate conditions, integral transforms, the influence functions.*

Отримано: 27.03.2015

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ВІДСТАНІ ВІД ТОЧКИ ДО МНОЖИНИ РІВНОМІРНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ, ЗАДАНОЇ НЕТОЧНО З ДОПОМОГОЮ БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії оптимальності методу найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *найкраще у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірне відновлення; функціональна залежність, задана неточно; оптимальний метод відновлення; необхідні, достатні умови, критерій оптимальності методу рівномірного відновлення функціональної залежності.*

Вступ. У статті для задачі найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії оптимальності методу відновлення.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента x цього простору покладемо $E_F(x) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$. Величину $E_F(x)$ називають