By the method of integral and hybrid integrated transforms, in combination with the method of influence functions the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise homogeneous cylindrical-circular space is obtained for the first time. A mathematical model of free oscillation processes is a partial case of a considered problem.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugate conditions, integral transforms, the influence functions.*

Отримано: 27.03.2015

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ВІДСТАНІ ВІД ТОЧКИ ДО МНОЖИНИ РІВНОМІРНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ, ЗАДАНОЇ НЕТОЧНО З ДОПОМОГОЮ БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії оптимальності методу найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *найкраще у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірне відновлення; функціональна залежність, задана неточно; оптимальний метод відновлення; необхідні, достатні умови, критерій оптимальності методу рівномірного відновлення функціональної залежності.*

Вступ. У статті для задачі найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії оптимальності методу відновлення.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента x цього простору покладемо $E_F\left(x\right)=\inf_{y\in F}\left\|x-y\right\|$. Величину $E_F\left(x\right)$ називають найкращим наближенням елемента x множиною F або відстанню від цього елемента до множини F (див., наприклад, [1, с. 11]). Будемо позначати через $B(X)$ ($O(X)$) — сукупність довільних (опуклих) обмежених замкнених множин простору X, через $H(A,B)=$ $=\max\left\{\sup\limits_{x\in A}E_B(x),\sup\limits_{y\in B}E_A(y)\right\}$ — хаусдорфову відстань між множинами A, B із $B(X)$.

Нехай, крім того, S — компакт, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою: $\|g\|=\max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $C(S,B(X))$ ($C(S,O(X))$) — множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=B_s\in B(X)$ ($a(s)=O_s\in O(X)$) і вони є неперервними на S відносно метрики Хаусдорфа на $B(X)$ ($O(X)$), $a\in C(S,B(X))$ ($a\in C(S,O(X))$), $V\subset C(S,X)$, ω — додатна неперервна на S функція (вагова функція).

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(\omega,V)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|\right), \tag{1}$$

яку будемо називати задачею найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Твердження 1. Для будь-яких $a\in C(S,B(X))$, $g\in C(S,X)$ функція $E_{a(s)}^{\omega(s)}(g(s))=\omega(s)\inf\limits_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|$, $s\in S$, є неперервною по s на S.

Доведення. Переконаємося у неперервності по s на S функції $E_{a(s)}(g(s))=\inf\limits_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|$, $s\in S$. Нехай $s_0\in S$ і $\varepsilon>0$. Оскільки $a\in C(S,B(X))$, $g\in C(S,X)$, то існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакта S такий, що

$$\|g(s)-g(s_0)\|<\frac{\varepsilon}{3},\ s\in V(s_0), \tag{2}$$

$$a(s)\subset a(s_0)+U_{\frac{\varepsilon}{3}}(0),\ s\in V(s_0), \tag{3}$$

$$a\left(s_0\right) \subset a\left(s\right) + U_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(0\right),\ s \in V\left(s_0\right), \tag{4}$$

де $U_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(0\right)$ — окіл нуля простору X радіуса $\frac{\varepsilon}{3}$.

Нехай $y_0 \in a\left(s_0\right)$ і

$$\left\|g\left(s_0\right) - y_0\right\| < \inf_{y \in a\left(s_0\right)} \left\|g\left(s_0\right) - y\right\| + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

На підставі співвідношення (4) для кожного $s \in V\left(s_0\right)$ існують елементи $y_s \in a\left(s\right)$ та $z_s \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(0\right)$ такі, що $y_0 = y_s + z_s$.

З урахуванням цього та співвідношень (2), (5) одержимо, що для $s \in V\left(s_0\right)$

$$E_{a(s)}\left(g\left(s\right)\right) - E_{a(s_0)}\left(g\left(s_0\right)\right) = \inf_{y \in a\left(s\right)} \left\|g\left(s\right) - y\right\| - \inf_{y \in a\left(s_0\right)} \left\|g\left(s_0\right) - y\right\| <$$

$$< \left\|g\left(s\right) - y_s\right\| - \left\|g\left(s_0\right) - y_0\right\| + \frac{\varepsilon}{3} = \tag{6}$$

$$= \left\|g\left(s\right) - y_0 + z_s\right\| - \left\|g\left(s_0\right) - y_0\right\| + \frac{\varepsilon}{3} \le \left\|g\left(s\right) - g\left(s_0\right)\right\| + \left\|z_s\right\| + \frac{\varepsilon}{3} < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Нехай для $s \in V\left(s_0\right)$ $y_s \in a\left(s\right)$ і

$$\left\|g\left(s\right) - y_s\right\| < \inf_{y \in a\left(s\right)} \left\|g\left(s\right) - y\right\| + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

На підставі співвідношення (3) існують елемента $y_s^0 \in a\left(s_0\right)$ та $z_s^0 \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}\left(0\right)$ такі, що $y_s = y_s^0 + z_s^0$.

З урахуванням цього та співвідношень (2), (7) одержимо, що для $s \in V\left(s_0\right)$

$$E_{a(s_0)}\left(g\left(s_0\right)\right) - E_{a(s)}\left(g\left(s\right)\right) = \inf_{y \in a\left(s_0\right)} \left\|g\left(s_0\right) - y\right\| - \inf_{y \in a\left(s\right)} \left\|g\left(s\right) - y\right\| <$$

$$< \left\|g\left(s_0\right) - y_s^0\right\| - \left\|g\left(s\right) - y_s\right\| + \frac{\varepsilon}{3} = \left\|g\left(s_0\right) - y_s^0\right\| - \left\|g\left(s\right) - y_s^0 - z_s^0\right\| + \frac{\varepsilon}{3} \le \tag{8}$$

$$\le \left\|g\left(s\right) - g\left(s_0\right)\right\| + \left\|z_s^0\right\| + \frac{\varepsilon}{3} < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Внаслідок (6), (8)

$$\left|E_{a(s)}\left(g\left(s\right)\right) - E_{a(s_0)}\left(g\left(s_0\right)\right)\right| < \varepsilon ,\ s \in V\left(s_0\right).$$

Це й означає, що функція $E_{a(s)}\left(g(s)\right)$, $s \in S$, є неперервною в точці $s_0 \in S$.

Оскільки точку s_0 вибрано довільно із S, то функція $E_{a(s)}\left(g(s)\right)$, $s \in S$, є неперервною на S.

Внаслідок того, що функція $\omega(s)$, $s \in S$, є неперервною по s на S за припущенням, а функція $E_{a(s)}\left(g(s)\right)$, $s \in S$, є неперервною по s на S за доведеним вище, робимо висновок, що функція $E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g(s)\right) = \omega(s) E_{a(s)}\left(g(s)\right)$, $s \in S$, є неперервною по s на S, як добуток двох неперервних на S функцій.

Твердження доведено.

З твердження 1 та узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [2, с. 28]) випливає, що задачу відшукання величини (1) можна подати у такій формі

$$\alpha_a^*(\omega, V) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} E_{a(s)}^{\omega(s)} = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \left(\omega(s) \inf_{y\in a(s)} \left\| g(s) - y \right\| \right). \quad (10)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(\omega, V) = \max_{s\in S} \left(\omega(s) \inf_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \right),$$

то його будемо називати оптимальним методом найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою багатозначного відображення, або просто екстремальним елементом для величини (10).

Актуальність теми. В багатьох практичних задачах функціональні залежності, які характеризують досліджувані процеси, не означені точно, а лише відомо, що вони є селекторами деякого багатозначного відображення, тобто їх значення належать відповідним значенням цього багатозначного відображення (знаходяться в деякому діапазоні можливих значень).

Робота з такими функціональними залежностями пов'язана з низкою труднощів.

У зв'язку з цим виникає проблема найкращого у деякому розумінні їх відновлення однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу.

Слід зазначити, що з середини шістдесятих років двадцятого століття задачам відновлення функціоналів приділяється велика увага (див., наприклад, [3–5]).

У роботі розглядається задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Цю задачу можна розглядати як задачу найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного наближення багатозначного відображення $a \in C\left(S, B\left(X\right)\right)$ ($a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$ множиною V неперервних однозначних відображень простору $C\left(S, X\right)$.

Частковим випадком розглядуваної задачі, коли V є множиною сталих відображень із S в X, є задача про відносну чебишовську точку системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються, основні результати дослідження якої встановлені у праці [6].

Результати загального характеру, отримані при дослідженні величини (10), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при побудові та обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв'язання цих задач.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремального елемента для величини (10) (оптимального методу відновлення).

Допоміжні твердження.

Теорема 1. Нехай *K* — компакт, *Y* — лінійний простір (дійсний або комплексний), $\left\{\varphi_\alpha\right\}_{\alpha \in K}$ — сім'я заданих на *Y* опуклих функцій, для кожного $x \in Y$ відображення $\alpha \in K \to \varphi_\alpha\left(x\right)$ півнеперервне зверху на *K*, $\varphi\left(x\right) = \max\limits_{\alpha \in K} \varphi_\alpha\left(x\right)$, $x \in Y$,

$$K\left(x\right) = \left\{\alpha :\ \alpha \in K,\ \varphi_\alpha\left(x\right) = \varphi\left(x\right) = \max_{\alpha \in K} \varphi_\alpha\left(x\right)\right\}.$$

Тоді для будь-яких $x, y \in Y$:

$\left(i_1\right)$ $K\left(x\right)$ є замкненою і, отже, компактною підмножиною компакта *K*;

$\left(i_2\right)$ відображення $\alpha \in K\left(x\right) \to \varphi'_\alpha\left(x, y\right)$ є півнеперервним зверху на $K\left(x\right)$;

$\left(i_3\right)$ існує точка $\alpha_y \in K\left(x\right)$, для якої

$$\varphi'_{\alpha_y}\left(x, y\right) = \max_{\alpha \in K\left(x\right)} \varphi'_\alpha\left(x, y\right); \tag{11}$$

(i_4) для кожного $\alpha \in K(x)$ справедлива нерівність

$$\varphi'_\alpha(x,y) \le \varphi'(x,y);$$

(i_5) для кожного $\alpha_y \in K(x),$ що задовольняє (11), виконується рівність $\varphi'_{\alpha_y}(x,y) = \max\limits_{\alpha \in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y) = \varphi'(x,y).$

Доведення. Перш за все зазначимо, що функція φ є опуклою на *Y* (див., наприклад, [2, с. 180]). Переконаємося, що $K(x)$ є замкненою множиною *K*. Нехай $\alpha_0 \in K \setminus K(x).$ Тоді $\varphi_{\alpha_0}(x) < \varphi(x).$ Оскільки відображення $\alpha \in K \to \varphi_\alpha(x)$ півнеперервне зверху на *K*, то існує окіл $O(\alpha_0)$ точки α_0 компакта *K* такий, що $\varphi_\alpha(x) < \varphi(x)$ для всіх $\alpha \in O(\alpha_0).$ Звідси випливає, що $O(\alpha_0) \subset K \setminus K(x).$ Тому $K \setminus K(x)$ є відкритою, а $K(x)$ — замкненою множиною.

Доведемо справедливість твердження $(i_2).$ Нехай $\alpha_0 \in K(x)$ і число *A* таке, що $\varphi'_{\alpha_0}(x,y) < A.$ Оскільки функція φ_{α_0} є опуклою на *Y*, то існує $t^y_{\alpha_0} > 0$ таке, що

$$\varphi'_{\alpha_0}(x,y) \le \frac{\varphi_{\alpha_0}\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) - \varphi_{\alpha_0}(x)}{t^y_{\alpha_0}} < A \qquad (12)$$

(див., наприклад, [7, с. 328]).

З (12) та рівності $\varphi_{\alpha_0}(x) = \varphi(x)$ випливає, що

$$\varphi_{\alpha_0}\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) < \varphi(x) + A t^y_{\alpha_0}.$$

Оскільки відображення $\alpha \in K \to \varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right)$ є півнеперервним зверху на *K*, то існує окіл $O(\alpha_0)$ точки α_0 компакта *K* такий, що

$$\varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) < \varphi(x) + A t^y_{\alpha_0}. \qquad (13)$$

Ураховуючи те, що $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$ для всіх $\alpha \in K(x),$ з (13) одержимо

$$\frac{\varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) - \varphi_\alpha(x)}{t^y_{\alpha_0}} < A,\ \alpha \in O(\alpha_0) \cap K(x). \qquad (14)$$

Оскільки $\varphi'_\alpha(x,y) \le \dfrac{\varphi_\alpha\left(x+t^y_{\alpha_0}y\right)-\varphi_\alpha(x)}{t^y_{\alpha_0}}$ (див., наприклад, [7, с. 328]), то з (14) випливає, що $\varphi'_\alpha(x,y) < A$ для всіх $\alpha \in O(\alpha_0) \bigcap K(x)$. Це й означає, що відображення $\alpha \in K(x) \to \varphi'_\alpha(x,y)$ є півнеперервним зверху в точці $\alpha_0 \in K(x)$.

Оскільки точку α_0 вибрано довільно з $K(x)$, то звідси робимо висновок про півнеперервність зверху відображення $\alpha \in K(x) \to \varphi'_\alpha(x,y)$ на $K(x)$.

Твердження (i_2) доведено.

Оскільки $K(x)$ є компактом, то, згідно з твердженням (i_2) та узагальненою теоремою Вейєрштрасса (див., наприклад, [2, с. 28]), існує $\alpha_y \in K(x)$ таке, що має місце рівність (11).

Твердження (i_3) доведено.

Переконаємося у справедливості твердження (i_4). Нехай $\alpha \in K(x)$. Тоді $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$. З урахуванням цього для $t > 0$ будемо мати

$$\frac{\varphi_\alpha(x+ty)-\varphi_\alpha(x)}{t} \le \frac{\max\limits_{\alpha\in K}\varphi_\alpha(x+ty)-\varphi(x)}{t} = \frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t}.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $t \to 0,\ t > 0,$ одержимо, що $\varphi'_\alpha(x,y) \le \varphi'(x,y)$.

Справедливість твердження (i_4) доведено.

Переконаємося у справедливості твердження (i_5). Згідно з твердженнями (i_3) та (i_4),

$$\max_{\alpha\in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y) \le \varphi'(x,y). \tag{15}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки (див., наприклад, [7, с. 328])

$$\varphi'(x,y) = \inf_{t>0}\frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} > \varphi'(x,y)-\varepsilon,$$

то для будь-якого $t > 0$ виконуються співвідношення

$$\frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} \ge \varphi'(x,y) > \varphi'(x,y)-\varepsilon.$$

Звідси випливає, що для всіх $t > 0$

$$\sup_{\alpha\in K}\frac{\varphi_\alpha\left(x+ty\right)-\varphi\left(x\right)}{t}\geq\varphi'\left(x,y\right)>\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon.$$

Тоді для кожного $t>0$ існує таке $\alpha\in K,$ що

$$\frac{\varphi_\alpha\left(x+ty\right)-\varphi\left(x\right)}{t}\geq\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon.$$

Для кожного $t>0$ позначимо через

$$K_t=\left\{\alpha:\ \alpha\in K,\ \frac{\varphi_\alpha\left(x+ty\right)-\varphi\left(x\right)}{t}\geq\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon\right\}. \tag{16}$$

Згідно з попередніми міркуваннями, K_t є непорожньою множиною для всіх $t>0.$ З (16) випливає, що для $t>0$

$$K_t=\left\{\alpha:\ \alpha\in K,\ \varphi_\alpha\left(x+ty\right)\geq\varphi\left(x\right)+t\left(\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon\right)\right\}. \tag{17}$$

Оскільки за умовою відображення $\alpha\in K\to\varphi_\alpha\left(x+ty\right)$ є півнеперервним зверху на *K*, то з (17) випливає, що для кожного $t>0$ K_t є непорожньою і замкненою множиною компакта *K*.

Переконаємося, що $K_{t_1}\subset K_{t_2}$, якщо $0<t_1<t_2$. Дійсно, якщо $\alpha\in K_{t_1}$, то

$$\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon\leq\frac{\varphi_\alpha\left(x+t_1y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_1}=\frac{1}{t_1}\left(\varphi_\alpha\left(x+t_1y\right)-\varphi\left(x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{t_1}\left(\varphi_\alpha\left(\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)x+\frac{t_1}{t_2}\left(x+t_2y\right)\right)-\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\varphi\left(x\right)-\frac{t_1}{t_2}\varphi\left(x\right)\right)\leq \tag{18}$$

$$\leq\frac{1}{t_1}\left(\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\left(\varphi_\alpha\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)+\frac{t_1}{t_2}\left(\varphi_\alpha\left(x+t_2y\right)-\varphi\left(x\right)\right)\right)\leq\frac{\varphi_\alpha\left(x+t_2y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_2},$$

оскільки φ_α є опуклою на *X* функцією та $\varphi_\alpha\left(x\right)\leq\varphi\left(x\right)$. З (18) випливає, що $\dfrac{\varphi_\alpha\left(x+t_2y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_2}\geq\varphi'\left(x,y\right)-\varepsilon.$ Тому $\alpha\in K_{t_2}$. Оскільки α вибрано з K_{t_1} довільно, то $K_{t_1}\subset K_{t_2}$.

Переконаємося далі, що система замкнених множин $K_t,\ t>0,$ є центрованою системою компакта *K*. Нехай $K_{t_1},\ldots,K_{t_n}$, де $t_1>0,\ldots,t_n>0$, — будь-яка скінченна кількість множин цієї системи. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $t_1<t_2<\ldots<t_n$. З

урахуванням встановленого вище маємо, що $K_{t_1} \subset K_{t_2} \subset ... \subset K_{t_n}$. Тому $\bigcap_{i=1}^{n} K_{t_i} = K_{t_1} \neq \varnothing$. Оскільки K — компакт, то $\bigcap_{t>0} K_t = K_0 \neq \varnothing$ (див., наприклад, [8, с. 60]).

Нехай $\alpha \in K_0$. Тоді $\alpha \in K_t$, $t > 0$. Звідси випливає, що

$$\frac{\varphi_\alpha(x+ty) - \varphi_\alpha(x)}{t} \geq \frac{\varphi_\alpha(x+ty) - \varphi(x)}{t} \geq \varphi'(x,y) - \varepsilon, \ t > 0. \quad (19)$$

Тому

$$\varphi'_\alpha(x,y) = \lim_{\substack{t \to 0, \\ t>0}} \frac{\varphi_\alpha(x+ty) - \varphi_\alpha(x)}{t} \geq \varphi'(x,y) - \varepsilon. \quad (20)$$

Переконаємося, що $K_0 \subset K(x)$. З урахуванням (19) для $\alpha \in K_0$ будемо мати, що

$$\varphi_\alpha(x+ty) \geq \varphi(x) + t(\varphi'(x,y) - \varepsilon), \ t > 0. \quad (21)$$

Розглянемо функцію $\psi(t) = \varphi_\alpha(x+ty)$, $t \in R$. Відомо (див., наприклад, [2, с. 199]), що ця функція є опуклою та неперервною на R.

Внаслідок (21)

$$\lim_{\substack{t \to 0, \\ t>0}} \psi(t) = \psi(0) = \varphi_\alpha(x) = \lim_{\substack{t \to 0, \\ t>0}} \varphi_\alpha(x+ty) \geq \varphi(x).$$

Оскільки $\varphi(x) \geq \varphi_\alpha(x)$, $\alpha \in K$, то $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$. Отже, $\alpha \in K(x)$ для всіх $\alpha \in K_0$. Це й означає, що $K_0 \subset K(x)$.

Зі співвідношення (20) випливає, що тоді

$$\varphi'_\alpha(x,y) \geq \varphi'(x,y) - \varepsilon, \ \alpha \in K_0 \subset K(x).$$

Внаслідок цього і (15) робимо висновок, що

$$\max_{\alpha \in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y) = \varphi'(x,y). \quad (22)$$

Якщо $\alpha_y \in K(x)$ і $\varphi'_{\alpha_y}(x,y) = \max_{\alpha \in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y)$, то, з урахуванням (22),

$$\varphi'_{\alpha_y}(x,y) = \max_{\alpha \in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y) = \varphi'(x,y).$$

Теорему доведено.

Для кожного $s \in S$ покладемо

$$\varphi_s(g) = E_{a(s)}^{\omega(s)}(g(s)) = \omega(s) \inf_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|, \ g \in C(S,X).$$

Твердження 2. Нехай $a \in C(S, O(X))$. Для кожного $s \in S$ функція $\varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, є опуклою та неперервною на $C(S,X)$.

Для кожного $g \in C(S,X)$ відображення $s \in S \to \varphi_s(g)$ є неперервним на S.

Функція $\varphi(g) = \max\limits_{s\in S} \varphi_s(g) = \max\limits_{s\in S} E_{a(s)}^{\omega(s)}(g(s))$, $g \in C(S,X)$, є опуклою і неперервною на $C(S,X)$.

Доведення. Переконаємося, що для кожного $s \in S$ функція $\varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, є опуклою та ліпшіцевою з константою $\|\omega\| = \max\limits_{s\in S} \omega(s)$ функцією.

Опуклість функції $\varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, випливає з опуклості функції $x \in X \to \inf\limits_{y\in a(s)} \|x-y\|$ (див., наприклад, [9]). Для $g_1, g_2 \in C(S,X)$ будемо мати

$$|\varphi_s(g_1) - \varphi_s(g_2)| = \left|\omega(s) \inf_{y\in a(s)} \|g_1(s)-y\| - \omega(s) \inf_{y\in a(s)} \|g_2(s)-y\|\right| \le$$

$$\le \|\omega\| \left|\inf_{y\in a(s)} \|g_1(s)-y\| - \inf_{y\in a(s)} \|g_2(s)-y\|\right| \le$$

$$\le \|\omega\| \sup_{y\in a(s)} \left|\|g_1(s)-y\| - \|g_2(s)-y\|\right| \le \|\omega\| \|g_1(s)-g_2(s)\| \le \|\omega\| \|g_1-g_2\|.$$

Це означає, що для кожного $s \in S$ функція $\varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, задовольняє умові Ліпшіца з константою $\|\omega\| = \max\limits_{s\in S} \omega(s)$.

Неперервність на S відображення $s \in S \to \varphi_s(g)$ для кожного $g \in C(S,X)$ встановлена у твердженні 1.

Оскільки функція $\varphi(g) = \max\limits_{s\in S} \varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, є точною верхньою гранню опуклих функцій $\varphi_s(g)$, $g \in C(S,X)$, то $\varphi(g)$, $g \in C(S,X)$,– є опуклою на $C(S,X)$ функцією (див., наприклад, [2, с. 180]). Маємо, що для будь-яких $g_1, g_2 \in C(S,X)$

$$|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)| = \left|\max_{s\in S} \varphi_s(g_1) - \max_{s\in S} \varphi_s(g_2)\right| \le$$

$$\le \max_{s\in S} |\varphi_s(g_1) - \varphi_s(g_2)| \le \|\omega\| \|g_1 - g_2\|.$$

Це й означає, що функція $\varphi(g)$, $g \in C(S,X)$,задовольняє умові Ліпшіца з константою $\|\omega\|$ і, отже, є неперервною на $C(S,X)$.

Твердження доведено.

Нехай, як і вище, X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, спряжений з простором X_R, p — функція, задана на X і, отже, на X_R. Елемент $f \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $g_0 \in X_R$, якщо

$$p(g) - p(g_0) \geq f(g - g_0),\ g \in X_R.$$

Множину субградієнтів функції p в точці $g \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці g і позначають $\partial p(g)$.

Відомо, що функція найкращого наближення $E_F(g)$, $g \in X$, є неперервною на X_R для будь-якої множини F (див., наприклад, [1, с. 17]) та, крім того, опуклою на X_R за умови, що F є опуклою множиною (див., наприклад, [9]). Тому у випадку опуклої множини F для кожної точки $g \in X$ $\partial E_F(g)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [7, с. 327]).

Твердження 3 (див., наприклад, [6]). Нехай F — опукла замкнена множина простору X, g — довільна точка цього простору. Тоді має місце співвідношення двоїстості

$$E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right),$$

де $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \|f\| \leq 1 \right\}$ — одинична куля простору X^*.

Твердження 4 (див., наприклад, [6]). Нехай для опуклої замкненої множини F простору X та елемента g цього простору

$$B^*(g,F) = \left\{ f : f \in B^*, E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right) = \right.$$

$$\left. = \operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right\},\ \operatorname{Re}\left(B^*(g,F)\right) = \left\{ \operatorname{Re} f : f \in B^*(g,F) \right\}.$$

Тоді має місце рівність

$$\partial E_F(g) = \operatorname{Re}\left(B^*(g,F)\right),\ g \in X.$$

Необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для величини (10) (оптимального методу відновлення).

У подальшому будемо вважати, що $a \in C(S, O(X))$. Для $a \in C(S, O(X))$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|\right)=$$

$$=\max_{s\in S} E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g^*(s)\right)=\max_{s\in S}\varphi_s\left(g^*\right)=\varphi\left(g^*\right),$$

$$C_a^{g^*}=\left\{g:\ g\in C(S,X),\ \max_{s\in S}E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g(s)\right)=\max_{s\in S}\varphi_s\left(g\right)=\varphi\left(g\right)<\right.$$

$$\left.<\max_{s\in S}\varphi_s\left(g^*\right)=\varphi\left(g^*\right)=\max_{s\in S}E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g^*(s)\right)=\alpha_a^{g^*}\right\},$$

$$S_a^{g^*}=\left\{s:\ s\in S,\ E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g^*(s)\right)=\right.$$

$$\left.=\max_{s\in S}E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g*(s)\right)=\max_{s\in S}\varphi_s\left(g^*\right)=\varphi_s\left(g^*\right)=\alpha_a^{g^*}\right\},$$

$$B^*\left(g^*(s),a(s)\right)=\left\{f: f\in B^*,\ E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)=\inf_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|=\right.$$

$$\left.=\max_{f\in B^*}\left(\operatorname{Re}f\left(g^*(s)\right)-\sup_{y\in a(s)}\operatorname{Re}f\left(y\right)\right)=\operatorname{Re}f\left(g^*(s)\right)-\sup_{y\in a(s)}\operatorname{Re}f\left(y\right)\right\},\ s\in S;$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)\right)=\left\{\operatorname{Re}f: f\in B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)\right\},\ s\in S.$$

Згідно з твердженням 4 $\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s),a(s)\right)\right)=\partial E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)$, $s\in S$. Зрозуміло, що множини $S_a^{g^*}$, $B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)$, $s\in S_a^{g^*}$, не є порожніми. Непорожність множини $S_a^{g^*}$ випливає з компактності S та неперервності функції

$$s\in S\to E_{a(s)}^{\omega(s)}\omega(s)\left(g^*(s)\right)=\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|=\varphi_s\left(g^*\right)$$

(див. твердження 1), а непорожність множини $B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)$, $s\in S_a^{g^*}$, випливає з твердження 4. Якщо вважати, що обмеження $g\in V$ в задачі відшукання величини (10) є істотним, тобто $\alpha_a^*(\omega)<\alpha_a^*(\omega,V)$, де

$$\alpha_a^*(\omega)=\inf_{g\in C(S,X)}\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|\right),$$

то непорожньою також буде множина $C_a^{g^*}$.

В подальших міркуваннях будемо використовувати техніку конусів допустимих напрямків. При цьому конусом внутрішніх напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y із $y_0 \in Y$ називають множину $\Gamma(M, y_0)$ всіх точок $y \in Y$ для яких існує окіл $O(y)$ точки y та число $\varepsilon > 0$ такі, що $y_0 + th \in M$ для всіх $t \in (0, \varepsilon)$ і для всіх $h \in O(y)$ (див., наприклад, [7, с. 12]).

Конусом граничних напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y із $y_0 \in Y$ називають множину $\Gamma^*(M, y_0)$ таких точок $y \in Y,$ що для довільного околу $O(y)$ точки y та довільного числа $\varepsilon > 0$ існують $h \in O(y)$ та $t \in (0, \varepsilon),$ що $y_0 + th \in M$ (див., наприклад, [7, с. 13]).

Теорема 2. Нехай, як і вище, $a \in C(S,\ O(X)),$ для кожного $s \in S$

$$\varphi_s(g) = E_{a(s)}^{\omega(s)}(g(s)) = \omega(s) \inf_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|,\ g \in C(S, X),$$

$$\varphi(g) = \max_{s \in S} \varphi_s(g) = \max_{s \in S} \left(\omega(s) \inf_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| \right),\ g \in C(S, X).$$

Якщо $g^*,\ z \in C(S, X),$ то

$$\varphi'(g^*, z) = \max_{s \in S_a^{g^*}} \left(\omega(s) \max_{f \in B^*(g^*(s),\, a(s))} \operatorname{Re} f(z(s)) \right).$$

Доведення. Маємо, що для кожного $g \in C(S, X)$

$$\varphi(g) = \max_{s \in S} \varphi_s(g) = \max_{s \in S} \left(\omega(s) \inf_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| \right).$$

Оскільки S — компакт, $C(S, X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір, $\{\varphi_s\}_{s \in S}$ — сім'я опуклих на $C(S, X)$ функцій (див. твердження 2), для кожного $g \in C(S, X)$ відображення $s \in S \to \varphi_s(g)$ півнеперервне зверху на S (див. твердження 2),

$$S_a(g^*) = \Big\{ s :\ s \in S,\ \varphi_s(g^*) = \max_{s \in S} \varphi_s(g^*) =$$

$$= \varphi(g^*) = \max_{s \in S} \left(\omega(s) \inf_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\| \right) \Big\},$$

то згідно з теоремою 1

$$\varphi'(g^*, z) = \max_{s \in S_a^{g^*}} \varphi_s'(g^*, z). \tag{23}$$

Оскільки для $s \in S$ φ_s є опуклою та неперервною на $C(S, X)$ функцією, то має місце рівність

$$\varphi_s'\left(g^*,z\right)=\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{\varphi_s\left(g^*+tz\right)-\varphi_s\left(g^*\right)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g^*(s)+tz(s)\right)-E_{a(s)}^{\omega(s)}\left(g^*(s)\right)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{\omega(s)E_{a(s)}\left(g^*(s)+tz(s)\right)-\omega(s)E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)}{t}= \tag{24}$$
$$=\omega(s)\lim_{t\to 0,\ t>0}\frac{E_{a(s)}\left(g^*(s)+tz(s)\right)-E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)}{t}=\omega(s)E_{a(s)}'\left(g^*(s),\ z(s)\right).$$

Оскільки, як зазначалось вище, для $s\in S$ функція $x\in X\to E_{a(s)}(x)$ є опуклою та неперервною на X, то має місце рівність

$$E_{a(s)}'\left(g^*(s),\ z(s)\right)=\max_{f\in\partial E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)} f\left(z(s)\right) \tag{25}$$

(див., наприклад, [7, с. 318]).

Згідно з твердженням 4, співвідношеннями (23)–(25)

$$\varphi'\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a^{g^*}}\left(\omega(s)\max_{f\in\partial E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)} f\left(z(s)\right)\right)=$$
$$=\max_{s\in S_a^{g^*}}\left(\omega(s)\max_{f\in\mathrm{Re}\left(B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)\right)} f\left(z(s)\right)\right)=$$
$$=\max_{s\in S_a^{g^*}}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*\left(g^*(s),\ a(s)\right)}\mathrm{Re}\,f\left(z(s)\right)\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $a\in C\left(S,O(X)\right)$, $g^*\in V$ і обмеження $g\in V$ в задачі відшукання величини (10) є істотним. Тоді має місце рівність

$$\Gamma\left(C_a^{g^*},g^*\right)=\bigcap_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcap_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\left\{g:g\in C(S,X),\mathrm{Re}\,f\left(g(s)\right)<0\right\}. \tag{26}$$

Доведення. Маємо, що $C_a^{g^*}=\left\{g:\ g\in C(S,X),\ \varphi(g)<\varphi\left(g^*\right)\right\}$ і $C_a^{g^*}\neq\varnothing$. Оскільки функція $\varphi(g)$, $g\in C(S,X)$, є опуклою та неперервною на $C(S,X)$, то $C_a^{g^*}$ є опуклою відкритою множиною простору $C(S,X)$. Нехай $g\in\Gamma\left(C_a^{g^*},g^*\right)$. Згідно з теоремою 1.3.4 [7, с. 19] $g=\lambda\left(g_1-g^*\right)$, де $\lambda>0$, а $g_1\in C_a^{g^*}$.

З урахуванням цього одержимо, що

$$\varphi'\left(g^*,g\right)=\inf_{t>0}\frac{\varphi\left(g^*+tg\right)-\varphi\left(g^*\right)}{t}\le\lambda\left(\varphi\left(g^*+\frac{1}{\lambda}g\right)-\varphi\left(g^*\right)\right)=$$

$$=\lambda\left(\varphi\left(g^*+\left(g_1-g^*\right)\right)-\varphi\left(g^*\right)\right)=\lambda\left(\varphi\left(g_1\right)-\varphi\left(g^*\right)\right)<0\,.$$

Звідси і з теореми 2 випливає, що

$$\max_{s\in S_a^{g^*}}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\operatorname{Re}f\left(g(s)\right)\right)<0\,.$$

Тому

$$g\in\bigcap_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcap_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\left\{g:g\in C(S,X),\operatorname{Re}f\left(g(s)\right)<0\right\}.$$

Отже,

$$\Gamma\left(C_a^{g^*},g^*\right)\subset\bigcap_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcap_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\left\{g:g\in C(S,X),\operatorname{Re}f\left(g(s)\right)<0\right\}. \qquad (27)$$

Нехай тепер

$$g\in\bigcap_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcap_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\left\{g:g\in C(S,X),\operatorname{Re}f\left(g(s)\right)<0\right\}.$$

З урахуванням цього та теореми 2 робимо висновок, що $\varphi'\left(g^*,g\right)=\inf_{t>0}\dfrac{\varphi\left(g^*+tg\right)-\varphi\left(g^*\right)}{t}<0$. Тоді існує $t>0$ таке, що $\varphi\left(g^*+tg\right)<\varphi\left(g^*\right)$. Звідси отримуємо, що $g^*+tg=g_1\in\operatorname{int}C_a^{g^*}$. Отже, $g=\dfrac{1}{t}\left(g_1-g^*\right)$, де $\dfrac{1}{t}>0$, $g_1\in\operatorname{int}C_a^{g^*}$.

Внаслідок теореми 1.3.4 [7, с. 19] робимо висновок, що $g\in\Gamma\left(C_a^{g^*},g^*\right)$. Тому

$$\bigcap_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcap_{f\in B^*\left(g^*(s),a(s)\right)}\left\{g:g\in C(S,X),\operatorname{Re}f\left(g(s)\right)<0\right\}\subset\Gamma\left(C_a^{g^*},g^*\right). \qquad (28)$$

З (27) та (28) випливає рівність (26).

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $a\in C\left(S,O(X)\right)$, V — довільна множина простору $C(S,X)$. Якщо g^* є екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення), то для будь-якого

$z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ існують елементи $s_z \in S$, $f_z \in B^*$ такі, що для них мають місце співвідношення

$$\max_{s \in S}\left(\omega(s) \inf_{y \in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|\right)=\omega(s_z) \inf_{y \in a(s_z)}\left\|g^*(s_z)-y\right\|=$$

$$=\omega(s_z) \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*(s_z)\right)-\sup_{y \in a(s_z)} \operatorname{Re} f(y)\right)= \tag{29}$$

$$=\omega(s_z)\left(\operatorname{Re} f_z\left(g^*(s_z)\right)-\sup_{y \in a(s_z)} \operatorname{Re} f_z(y)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_z\left(z(s_z)\right) \geq 0 . \tag{30}$$

Доведення. Нехай g^* є екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення). Тоді $\inf\limits_{g \in V} \varphi(g)=\varphi\left(g^*\right)$. Якщо обмеження $g \in V$ не є істотним для задачі відшукання величини (10), то тоді $\varphi\left(g^*\right)=\inf\limits_{g \in C(S, X)} \varphi(g)$. Звідси випливає, що для будь-якого $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ матимемо, що $\varphi'\left(g^*, z\right) \geq 0$. Внаслідок теореми 2 робимо висновок, що існують елементи $s_z \in S$, $f_z \in B^*$ для яких виконуються співвідношення (29), (30).

Якщо ж обмеження $g \in V$ є істотним для задачі відшукання величини (10), то згідно з теоремою 1.4.1 [7, с. 22] $\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \cap \Gamma^*\left(V, g^*\right)=\varnothing$. Звідси та з теореми 3 випливає, що для будь-якого $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ існують елементи $s_z \in S_a^{g^*}$, $f_z \in$ $\in B^*\left(g^*(s), a(s)\right)$ такі, що має місце (30). Оскільки $s_z \in S_a^{g^*}$, $f_z \in B^*\left(g^*(s), a(s)\right)$, то $s_z \in S$, $f_z \in B^*$ і справедлива рівність (29).

Теорему доведено.

Теорема 5. Нехай $a \in C\left(S, O(X)\right)$, V – довільна множина простору $C(S, X)$, $g^* \in V$.

Якщо для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що для них мають місце співвідношення

$$\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|\right)=\omega\left(s_g\right)\inf_{y\in a\left(s_y\right)}\left\|g^{*}\left(s_g\right)-y\right\|=$$

$$=\omega\left(s_g\right)\max_{f\in B^{*}}\left(\operatorname{Re} f\left(g^{*}\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f(y)\right)= \tag{31}$$

$$=\omega\left(s_g\right)\left(\operatorname{Re} f_g\left(g^{*}\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f_g(y)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)-g^{*}\left(s_g\right)\right)\ge 0\,, \tag{32}$$

то g^{*} є екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення).

Доведення. Нехай g є довільним елементом множини V. Згідно з умовою теореми існують $s_g\in S$, $f_g\in B^{*}$, для яких мають місце (31) та (32). З урахуванням співвідношень (31) та (32) одержимо, що

$$0\le\omega\left(s_g\right)\left(\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)-g^{*}\left(s_g\right)\right)\right)=$$

$$=\omega\left(s_g\right)\left(\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f_g(y)\right)-$$

$$-\omega\left(s_g\right)\left(\operatorname{Re} f_g\left(g^{*}\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f_g(y)\right)\le$$

$$\le\omega\left(s_g\right)\max_{f\in B^{*}}\left(\operatorname{Re} f\left(g\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f(y)\right)-$$

$$-\omega\left(s_g\right)\left(\operatorname{Re} f_g\left(g^{*}\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f_g(y)\right)\le$$

$$\le\omega\left(s_g\right)\max_{f\in B^{*}}\left(\operatorname{Re} f\left(g\left(s_g\right)\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f(y)\right)-$$

$$-\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|\right)=\omega\left(s_g\right)\inf_{y\in a(s)}\left\|g\left(s_g\right)-y\right\|-$$

$$-\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|\right)\le$$

$$\le \max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|\right)-\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|\right).$$

Отже, $\max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|\right)\ge \max_{s\in S}\left(\omega(s)\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|\right)$ для всіх $g\in V$.

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення).

Теорему доведено.

Згідно з [10] множину M лінійного нормованого простору Y будемо називати Γ^* — множиною відносно точки $y_0\in M$, якщо $y-y_0\in\Gamma^*(M,y_0)$ для всіх $y\in M$.

Прикладом Γ^* — множин є, зокрема, зіркові відносно g^*, в тому числі опуклі множини.

Теорема 6. Нехай $a\in C\big(S,O(X)\big)$, $g^*\in V$, V є Γ^* — множиною відносно g^*. Для того, щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g\in V$ існували елементи $s_g\in S$, $f_g\in B^*$, для яких виконуються співвідношення (31), (32).

Доведення. Необхідність. Нехай g^* є екстремальним елементом для величини (10) (оптимальним методом відновлення) і V є Γ^*-множиною відносно g^*. Тоді $g-g^*\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$. Згідно з теоремою 4 існують елементи $s_g\in S$, $f_g\in B^*$, для яких виконуються співвідношення (31), (32).

Необхідність доведено.

Достатність випливає з теореми 5.

Наслідок 1. Нехай $a\in C\big(S,O(X)\big)$, $g^*\in V$, V є підпростором простору $C(S,X)$. Для того, щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (10), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g\in V$ існували елементи $s_g\in S$, $f_g\in B^*$, для яких виконуються співвідношення (31) та $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right)\ge 0$.

Висновки. Для задачі найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремального елемента (оптимального методу відновлення).

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
2. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
3. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В. Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — С.3–20.
4. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко// Матем. заметки. — 1991. — Т. 50. — № 6. — С. 85–93.
5. Магарил-Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения/ Г. Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.
6. Гнатюк Ю. В. Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 2010. — Вип. 63. — № 7. — С. 889–903.
7. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
8. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа/ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Высшая школа, 1982. — 271 с.
9. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — Вип. 4. — №5. — С. 608–613.
10. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57. — № 12. — С. 1601–1619.

The necessary and sufficient conditions and criteria of the optimal method of the best at sense of the weighting distance from point to set of uniform reconstitution of the functional dependence that is defined inaccurately by means of the continuous compact-valued maps by elements of the set of single-valued maps are proved in the article.

Key words: *the best at sense of the weighting distance from point to set of uniform reconstitution; the functional dependence that is defined inaccuratel; the optimal method of reconstitution; the necessary and sufficient conditions and criteria.*

Отримано: 15.04.2015