УДК 517.977.52

Г. А. Гусейнзаде[*]**,** докторант,
К. Б. Мансимов[**]**,** д-р физ.-мат. наук, профессор
[*]Институт систем управления НАН Азербайджана,
г. Баку, Азербайджан,
[**]Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется одна задача оптимального управления, описываемая дискретно-непрерывной моделью, и в приложениях моделирующих, например, процессы, протекающие в ректификационной колонке. Получены необходимые условия оптимальности, первого и второго порядков (случай квазиособых управлений).

Ключевые слова: *дискретно-непрерывная система, линеаризованное условие максимума, необходимое условие оптимальности, квазиособое управление.*

Введение. В теории оптимального управления наблюдается постоянный интерес к моделям управления системами с неоднородной структурой. В различных публикациях эти системы фигурируют под разными названиями: системы с переменной структурой, гибридные системы, дискретно-непрерывные системы и др. (см., например, [1–9]). Дискретно-непрерывные управляемые процессы, т.е. процессы с изменяющейся во времени структурой, вплоть до изменения природы переменных, участвующих в их описании на различных этапах являются удобной математической моделью для описания многих процессов и широко распространены в химическом производстве, динамике роботов, в процессе развития биологических процессов и др. (см., например, [1–9]). Модели подобного типа возникают, также например, при математическом моделировании ряда индустриальных процессов [4], и в частности, многократно повторяющиеся процессы проката бруска металла с целью получения нужного качества листовых металлов также являются таковыми.

Ректификационный процесс многокомпонентной смеси в многотарельчатой коленке также описывается дискретно-непрерывными системами [4–6]. Исходя из теоретических и практических потребностей, является очень важным исследования задач оптимального управления, описываемые различными дискретно-непрерывными системами. Ряд аспектов, задач оптимального управления, дискретно непрерывными системами, изучены например, в работах [1–9]. Исходя из этого, настоящая работа посвящена исследованию одного класса дискретно-непрерывной задачи оптимального управления.

Ряд линейных дискретно-непрерывных задач оптимального управления с квадратичным критерием качества изучены в работах [4–6].

В [4] в линейном случае исследован, также ряд аспектов задач оптимального управления линейными дискретно-непрерывными системами.

Предлагаемая работа посвящена исследованию одной дискретно-непрерывной задачи оптимального управления при предположении выпуклости области управления.

Доказан аналог линеаризованного условия максимума, а затем исследован случай вырождения этого условия оптимальности.

Постановка задачи. Допустим, что управляемый процесс описывается дискретно-непрерывной системой уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dx(k,t)}{dt} = A(k,t)x(k-1,t) + f\big(k,t,x(k,t),u(k,t)\big), \\ (k,t) \in D = \{(k,t): 1 \le k \le N;\ t_0 \le t \le t_1\},\end{gathered} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}x(0,t) = g(t),\ t \in [t_0, t_1] = T, \\ x(k,t_0) = h(k),\ 1 \le k \le N.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь k натуральное число, $A(k,t)$ — заданная непрерывная по t при каждом k $(n \times n)$ матричная функция, $f(k,t,x,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по (t,x,u) вместе с частными производными по (x,u) при каждом k до второго порядка включительно, N — заданное натуральное число, $h(k)$ — заданная дискретная вектор-функция, $g(t)$ — заданная непрерывная вектор-функция, $x(k,t) \in R^n$, $(k,t) \in D$ — вектор состояния процесса, а $u(k,t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) по t при каждом k вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(k,t) \in U,\ (k,t) \in D. \tag{3}$$

Каждую управляющую функцию $u(k,t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $u(k,t)$ соответствует единственное решение $x(k,t)$ задачи (1)–(2).

На решениях краевой задачи, порожденные всевозможными допустимыми управлениями, определим терминальный функционал (критерий качества)

$$S(u)=\varphi\left(x\left(N,t_1\right)\right). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x)$ заданная дважды непрерывна дифференцируемая, скалярная функция.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)–(3).

Допустимое управление, $u(k,t)$ доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u(k,t),x(k,t)\right)$ — оптимальным процессом.

Специальное приращение критерия качества. Предположим, что $\left(u(k,t),x(k,t)\right)$ заданный допустимый процесс. Через ($\bar{u}(k,t)=$ $=u(k,t)+\Delta u(k,t),\bar{x}(k,t)=x(k,t)+\Delta x(k,t)$) обозначим, произвольный допустимый процесс.

Тогда ясно, что при заданном $\Delta u(k,t)$ $\Delta x(k,t)$ будет решением краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\Delta x(k,t)}{dt}=f\left(k,t,\bar{x}(k,t),\bar{u}(k,t)\right)-\\-f\left(k,t,x(k,t),u(k,t)\right)+A(k,t)\Delta x(k-1,t),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Delta x(0,t)=0,\quad t\in T,\\ \Delta x\left(k,t_0\right)=0,\quad 1\le k\le N,\end{gathered} \tag{6}$$

а приращение критерия качества имеет вид

$$\Delta S(u)=S(\bar{u})-S(u)=\varphi\left(\bar{x}\left(N,t_1\right)\right)-\varphi\left(x\left(N,t_1\right)\right). \tag{7}$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H\left(k,t,x,u,\psi(k,t)\right)=\psi'(k,t)\ f(k,t,x,u),$$

а также обозначения

$$H_x(k,t)\equiv H_x\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right),$$

$$H_u(k,t)\equiv H_u\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right),$$

$$H_{xx}(k,t)\equiv H_{xx}\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right),$$

$$H_{xu}(k,t) \equiv H_{xu}\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right),$$

$$H_{uu}(k,t) \equiv H_{uu}\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right),$$

$$f_x(k,t) \equiv f_x\left(k,t,x(k,t),u(k,t)\right),$$

$$f_u(k,t) \equiv f_u\left(k,t,x(k,t),u(k,t)\right),$$

где $(')$ — штрих означает транспонирование, а нижние индексы при $H(k,t,x,u,\psi)$, $f(k,t,x,u)$ означают частные производные по соответствующим переменным.

Здесь $\psi(k,t)$ n-мерный вектор сопряженных переменных являющийся решением сопряженной системы

$$\frac{d\psi(k,t)}{dt} = -A'(k+1,t)\psi(k+1,t) - H_x\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right), \quad 1 \le k \le N-1, \tag{8}$$

$$\frac{d\psi(N,t)}{dt} = -H_x\left(N,t,x(N,t),u(N,t),\psi(N,t)\right),$$

$$\psi(N,t_1) = -\varphi_x\left(x(N,t_1)\right),\ \psi(k,t_1) = 0,\ 1 \le k \le N-1. \tag{9}$$

Умножая обе части равенства (5) слева скалярно на $\psi(k,t)$, а затем интегрируя по t от t_0 до t_1, суммируя по k от 1 до N и учитывая вид функции Гамильтона-Понтрягина будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\psi'(k,t)\frac{d\Delta x(k,t)}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\psi'(k,t)A(k,t)\Delta x(k-1,t)dt +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(k,t,\bar{x}(k,t),\bar{u}(k,t),\psi(k,t)\right) - H\left(k,t,x(k,t),u(k,t),\psi(k,t)\right)\right]dt. \tag{10}$$

Тогда используя формулу Тейлора, и учитывая формулу (10), при помощи метода приращений (см. напр. [10–12]) формула приращения (7) представляется в виде

$$\Delta S(u) = \frac{\partial\varphi'\left(x(N,t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(N,t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(N,t_1)\frac{\partial^2\varphi\left(x(N,t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(N,t_1) +$$
$$+o_1\left(\left\|\Delta x(N,t_1)\right\|^2\right) + \sum_{k=1}^{N}\psi'(k,t_1)\Delta x(k,t_1) - \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\psi'(k,t)}{dt}\Delta x(k,t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\psi'(k,t)A(k,t)\Delta x(k-1,t)dt - \tag{11}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\left[H_x'\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+H_u'\left(k,t\right)\Delta u\left(k,t\right)\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\left[\Delta x'\left(k,t\right)H_{xx}\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+2\,\Delta u'\left(k,t\right)H_{ux}\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+\right.$$

$$\left.+\Delta u'\left(k,t\right)H_{uu}\left(k,t\right)\Delta u\left(k,t\right)\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}o_2\left(\left\|\Delta x\left(k,t\right)\right\|^2,\left\|\Delta u\left(k,t\right)\right\|^2\right)dt.$$

Здесь величины $o_i\left(\cdot\right)$, $i=1,2$ определяются соответственно из разложений

$$\varphi\left(x\left(N,t_1\right)+\Delta x\left(N,t_1\right)\right)-\varphi\left(x\left(N,t_1\right)\right)=\frac{\partial\varphi'\left(x\left(N,t_1\right)\right)}{\partial x}\Delta x\left(N,t_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(N,t_1\right)\frac{\partial\varphi^2\left(x\left(N,t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(N,t_1\right)+o_1\left(\left\|\Delta x\left(N,t_1\right)\right\|^2\right),$$

$$H\left(k,t,\overline{x}\left(k,t\right),\overline{u}\left(k,t\right),\psi\left(k,t\right)\right)-H\left(k,t,x\left(k,t\right),u\left(k,t\right),\psi\left(k,t\right)\right)=$$

$$=H_x'\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+H_u'\left(k,t\right)\Delta u\left(k,t\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta x'\left(k,t\right)H_{xx}\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+2\Delta u'\left(k,t\right)H_{ux}\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+\right.$$

$$\left.+\Delta u'\left(k,t\right)H_{uu}\left(k,t\right)\Delta u\left(k,t\right)\right]+o_2\left(\left\|\Delta x\left(k,t\right)\right\|^2,\left\|\Delta u\left(k,t\right)\right\|^2\right).$$

Далее ясно, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\psi'\left(k,t\right)A\left(k,t\right)\Delta x\left(k-1,t\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N-1}\psi'\left(k+1,t\right)A\left(k+1,t\right)\Delta x\left(k,t\right)dt.$$

Поэтому формула приращения (11) записывается в виде

$$\Delta S\left(u\right)=\frac{\partial\varphi'\left(x\left(N,t_1\right)\right)}{\partial x}\Delta x\left(N,t_1\right)+\frac{1}{2}\Delta x'\left(N,t_1\right)\frac{\partial^2\varphi\left(x\left(N,t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(N,t_1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\psi'\left(k,t_1\right)\Delta x\left(k,t_1\right)-\sum_{k=1}^{N}\frac{d\psi'\left(k,t\right)}{dt}\Delta x\left(k,t\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N-1}\psi'\left(k+1,t\right)A\left(k+1,t\right)\Delta x\left(k,t\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\left[H_x'\left(k,t\right)\Delta x\left(k,t\right)+H_u'\left(k,t\right)\Delta u\left(k,t\right)\right]dt- \tag{12}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}\Big[\Delta x'(k,t)H_{xx}(k,t)\Delta x(k,t)+2\Delta u'(k,t)H_{ux}(k,t)\Delta x(k,t)+$$

$$+\Delta u'(k,t)H_{uu}(k,t)\Delta u(k,t)\Big]dt+o_1\left(\left\|\Delta x(N,t)\right\|^2\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{N}o_2\left(\left\|\Delta x(k,t)\right\|^2,\left\|\Delta u(k,t)\right\|^2\right)dt.$$

Поскольку $\psi(k,t)$ является решением задачи (8)–(9), то формула приращения (12) функционала качества принимает вид

$$\Delta S(u)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}H_u'(k,t)\Delta u(k,t)\,dt-\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'(k,t)H_{xx}(k,t)\Delta x(k,t)+$$

$$+2\Delta u'(k,t)H_{ux}(k,t)\Delta x(k,t)+\Delta u'(k,t)H_{uu}(k,t)\Delta u(k,t)\Big]dt- \quad (13)$$

$$\left.-\Delta x'(N,t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(N,t_1))}{\partial x^2}\Delta x(N,t_1)\right\}+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta x(N,t_1)\right\|^2\right)-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}o_2\left(\left\|\Delta x(k,t)\right\|^2,\left\|\Delta u(k,t)\right\|^2\right)dt.$$

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, а $v(k,t)\in U$, $(k,t)\in D$ произвольное допустимое управление. По предположению множество U выпуклое. Поэтому специальное приращение допустимого управления $u(k,t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\mu(k,t)=\mu\left[v(k,t)-u(k,t)\right]. \quad (14)$$

Через, $\Delta x_\mu(k,t)$ обозначим, специальное приращение состояния $x(k,t)$. Соответствующее специальному приращению (14) управления $u(k,t)$.

Используя краевую задачу (5)–(6) доказывается

Лемма. Для специального приращения $\Delta x_\mu(k,t)$ состояния $x(k,t)$ имеет место разложение

$$\Delta x_\mu(k,t)=\mu\,\ell(k,t)+o(k,t;\mu), \quad (15)$$

где $\ell(k,t)$ есть решение задачи

$$\frac{d\ell(k,t)}{dt} = f_x(k,t)\ell(k,t) + A(k,t)\ell(k-1,t) + f_u(k,t)\big(v(k,t) - u(k,t)\big),$$
$$(k,t) \in D, \tag{16}$$

$$\ell(0,t) = 0, \quad t \in T,$$
$$\ell(k,t_0) = 0, \ \ 1 \le k \le N. \tag{17}$$

Здесь $o(k,t;\mu)/\mu \to 0$ при $\mu \to 0$, для всех k, равномерно по t.

Доказательство. Из краевой задачи (5)–(6) следует, что $\Delta x(k,t;\,\varepsilon)$ является решением линеаризованной задачи

$$\frac{d\Delta x(k,t;\,\mu)}{dt} = f_x(k,t)\Delta x(k,t;\,\mu) + \mu f_u(k,t)\big(v(k,t) - u(k,t)\big) +$$
$$+o_3\big(\|\Delta x(k,t;\,\mu)\| + \|\Delta u(k,t;\,\mu)\|\big) + A(k,t)\Delta x(k-1,t;\,\mu), \tag{18}$$

$$\Delta x(0,t;\,\mu) = 0, \quad t \in T,$$
$$\Delta x(k,t_0;\,\mu) = 0, \ \ 1 \le k \le N.$$

Далее из (5)–(6) ясно также, что

$$\|\Delta x(k,t;\,\mu)\| \le \int_{t_0}^{t} \big\| f\big(k,\tau,x(k,\tau) + \Delta x(k,t;\,\mu), u(k,\tau) + \Delta u(k,t;\,\mu)\big) -$$
$$- f\big(k,\tau,x(k,\tau),u(k,\tau)\big)\big\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|A(k,\tau)\| \, \|\Delta x(k-1,\tau;\mu)\| d\tau.$$

Отсюда используя условию Липшица имеем

$$\|\Delta x(k,t;\,\mu)\| \le L_1 \int_{t_0}^{t} \|\Delta x(k,\tau;\,\mu)\| + \|\Delta u(k,\tau;\,\mu)\| d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t} \|A(k,\tau)\| \|\Delta x(k-1,\tau;\,\mu)\| d\tau, \tag{19}$$

где $L_1 = const > 0$.

Из (19) используя лемму Гронуолла-Беллмана, после некоторых преобразований получаем, что

$$\|\Delta x(k,t;\,\mu)\| \sim \mu. \tag{20}$$

С учетом (20) из (18) переходя к эквивалентному интегральному уравнению имеем

$$\Delta x(k,t;\,\mu) = \int_{t_0}^{t} \big[f_x(k,\tau)\Delta x(k,\tau;\,\mu) + A(k,\tau)\Delta x(k-1,\tau;\,\mu)\big] d\tau +$$

$$+\mu\int_{t_0}^{t} f_u(k,\tau)\big[v(k,\tau)-u(k,\tau)\big]d\tau+\int_{t_0}^{t} o_3(k,\tau;\mu)\,d\tau.$$

Отсюда с учетом (15) имеем

$$\mu\,\ell(k,t)+o(k,t;\,\mu)=\mu\int_{t_0}^{t}\big[f_x(k,\tau)\ell(k,\tau)+A(k,\tau)\ell(k-1,\tau)\big]d\tau+$$

$$+\mu\int_{t_0}^{t} f_u(k,\tau)\big(v(k,\tau)-u(k,\tau)\big)d\tau+o_4(k,t;\,\mu).$$

Разделяя обе части последнего соотношения на μ и переходя к пределу при $\mu\to 0$ получим, что $\ell(k,t)$ является решением следующего линейного интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\ell(k,t)=\int_{t_0}^{t}\Big[f_x(k,\tau)\ell(k,\tau)+A(k,\tau)\ell(k-1,\tau)+f_u(k,\tau)\big(v(k,\tau)-u(k,\tau)\big)\Big]d\tau.$$

Из последнего следует, что $\ell(k,t)$ является решением краевой задачи (16)–(17). Лемма доказана.

С учетом соотношений (14), (15), из формулы приращения (13) получаем справедливость разложения

$$S(u+\Delta u_\mu)-S(u)=-\mu\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1} H_u'(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)dt+$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\Bigg\{\ell'(N,t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(N,t_1))}{\partial x^2}\ell(N,t_1)-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(k,t)H_{xx}(k,t)\ell(k,t)+ \tag{21}$$

$$+2\big(v(k,t)-u(k,t)\big)'H_{ux}(k,t)\ell(k,t)+$$

$$+\big(v(k,t)-u(k,t)\big)'H_{uu}(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)\Big]dt\Bigg\}+o(\mu^2).$$

Здесь $o(\mu^2)/\mu^2\to 0$ при $\mu\to 0$.

Необходимые условия оптимальности. Из разложения (21) следует

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(k,t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1} H_u'(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)dt\le 0 \tag{22}$$

выполнялось для всех $v(k,t) \in U$, $(k,t) \in D$.

Неравенство (22) есть общее необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума. Из него можно получить более легко проверяемые необходимые условия оптимальности.

Приведем некоторые из них.

Следствие 1. Для оптимальности допустимого управления $u(k,t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} H'_u(k,t)\big(w(t)-u(k,t)\big)dt \le 0 \tag{23}$$

выполнялось для всех кусочно-непрерывных вектор-функций $w(t) \in U$, $t \in T$, $1 \le k \le N$.

Следствие 2. Если $u(k,t)$ оптимальное управление в задаче (1)–(4), то вдоль процесса $\big(u(k,t), x(k,t)\big)$ неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} H'_u(k,\theta)\big(w(k)-u(k,\theta)\big) \le 0 \tag{24}$$

выполняется для всех $w(k) \in U$, $1 \le k \le N$, $\theta \in [t_0, t_1)$.

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$ — произвольная точка непрерывности управления $u(k,t)$ по второму аргументу.

Линеаризованные необходимые условия оптимальности типа (22)–(24) для других классов задач оптимальности управления выведены, например, в работах [11–18]. Исходя из них можно аналогично работам [14–16] и др. предлагать различные градиентного типа алгоритмы.

Теперь изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (22).

Определение 1. Если для всех $v(k,t) \in U$, $(k,t) \in D$

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} H'_u(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)dt = 0, \tag{25}$$

то следуя, например [12; 13], допустимое управление $u(k,t)$ назовем квазиособым управлением, а соответствующий случай квазиособым случаем.

Ясно, что для квазиособых управлений линеаризованное условие максимума (25) теряет свое содержательное значение. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности (условия оптимальности второго порядка), позволяющие хотя бы в принципе выявлять неоптимальность квазиособых управлений.

В квазиособом случае из разложения (21) следует общее, но неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Теорема 2. Для оптимальности квазиособого управления $u(k,t)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\ell'(N,t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(N,t_1))}{\partial x^2}\ell(N,t_1)-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(k,t)H_{xx}(k,t)\ell(k,t)+$$
$$+2\big(v(k,t)-u(k,t)\big)'H_{ux}(k,t)\ell(k,t)+ \qquad (26)$$
$$+\big(v(k,t)-u(k,t)\big)'H_{uu}(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)\Big]dt\ge 0$$

выполнялось для всех $v(k,t)\in U$, $(k,t)\in D$.

Используя это неявное необходимое условие оптимальности, получим конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности квазиособых управлений

Уравнение (16) является линейной неоднородной системой уравнений. Поэтому его решение, удовлетворяющее краевому условию (17) допускает представление [19]

$$\ell(k,t)=\sum_{s=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}F(k,t;s,\tau)f_u(s,\tau)\big(v(s,\tau)-u(s,\tau)\big)d\tau, \qquad (27)$$

где $F(k,t;s,\tau)$ — $(n\times n)$ матричная функция являющаяся решением системы

$$F_\tau(k,t;s,\tau)=-F(k,t;\tau,s)f_x(s,\tau)+F(k,t;s+1,\tau)A(s+1,\tau),$$
$$1\le s\le k-1,$$
$$F_\tau(k,t,k,\tau)=-F(k,t;k,\tau)f_x(k,\tau),$$
$$F(k,t;s,t)=0,\ 1\le s\le k-1,\ F(k,t;k,t)=E,$$

(E — $(n\times n)$ единичная матрица).

Используя представление (27) займемся преобразованием слагаемых неравенства (26).

Имеем

$$\ell'(N,t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(N,t_1))}{\partial x^2}\ell(N,t_1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(v\left(\alpha,\tau\right)-u\left(\alpha,\tau\right)\right)' f_u'\left(\alpha,\tau\right)F'\left(N,t_1;\alpha,\tau\right)\times \tag{28}$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi\left(x\left(N,t_1\right)\right)}{\partial x^2}F\left(N,t_1;\beta,\gamma\right)f_u\left(\beta,\gamma\right)\left(v\left(\beta,\gamma\right)-u\left(\beta,\gamma\right)\right)d\tau\, d\gamma,$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\left(v\left(k,t\right)-u\left(k,t\right)\right)' H_{ux}\left(k,t\right)\ell\left(k,t\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\left(v\left(k,t\right)-u\left(k,t\right)\right)' H_{ux}\left(k,t\right)\times\right. \tag{29}$$

$$\left.\times F\left(k,t;s,\tau\right)f_u\left(s,\tau\right)\left(v\left(s,\tau\right)-u\left(s,\tau\right)\right)d\tau\right]dt.$$

Наконец, следуя, например [12; 17–18] получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\ell'\left(k,t\right)\, H_{ux}\left(k,t\right)\ell\left(k,t\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\int_{t_0}^{t}F\left(k,t;\alpha,\tau\right)f_u\left(\alpha,\tau\right)\left(v\left(\alpha,\tau\right)-u\left(\alpha,\tau\right)\right)\right)\times$$

$$\times H_{xx}\left(k,t\right)\left(\sum_{\beta=1}^{k}\int_{t_0}^{t}F\left(k,t;\beta,\gamma\right)f_u\left(\beta,\gamma\right)\left(v\left(\beta,\gamma\right)-u\left(\beta,\gamma\right)\right)\right)= \tag{30}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(v\left(\alpha,\tau\right)-u\left(\alpha,\tau\right)\right)' f_u'\left(\alpha,\tau\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=\max(\alpha,\beta)}^{N}\int_{\max(\tau,\gamma)}^{t_1}F'\left(k,t;\alpha,\tau\right)H_{xx}\left(k,t\right)F\left(k,t;\beta,\gamma\right)dt\right\}\times$$

$$\times f_u\left(\beta,\gamma\right)\left(v\left(\beta,\gamma\right)-u\left(\beta,\gamma\right)\right)d\tau\, d\gamma.$$

Введем обозначение

$$M\left(\alpha,\beta,\tau,\gamma\right)=-F'\left(N,t_1;\alpha,\tau\right)\varphi_{xx}\left(x\left(N,t_1\right)\right)\,F\left(N,t_1;\beta,\gamma\right)+$$

$$+\sum_{k=\max(\alpha,\beta)}^{N}\int_{t=\max(\tau,\gamma)}^{t_1}F'\left(k,t;\alpha,\tau\right)H_{xx}\left(k,t\right)F\left(k,t;\beta,\gamma\right)dt. \tag{31}$$

Тогда с учетом тождеств (28)–(29) и обозначения (31) неравенство (26) примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\alpha,\tau)-u(\alpha,\tau)\big)' f_u'(\alpha,\tau)\times$$
$$\times M(\alpha,\beta,\tau,\gamma) f_u(\beta,\gamma)\big(v(\beta,\gamma)-u(\beta,\gamma)\big)d\tau\, d\gamma+$$
$$+2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\big(v(k,t)-u(k,t)\big)' H_{ux}(k,t)\times\right. \tag{32}$$
$$\left.\times F(k,t;s,\tau) f_u(s,\tau)\big(v(s,\tau)-u(s,\tau)\big)d\tau\right]dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(k,t)-u(k,t)\big)' H_{uu}(k,t)\big(v(k,t)-u(k,t)\big)dt\le 0.$$

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления $u(k,t)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство (32) выполнялось для всех $v(k,t)\in U$, $(k,t)\in D$.

Неравенство (32) есть интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, и носит довольно общий характер. Выбирая $v(k,t)$ специальным образом из него можно получить более легко проверяемые необходимые условия оптимальности.

Выводы. Рассматривается задача оптимального управления для одного класса дискретно-непрерывных систем. Применяя модифицированный вариант метода приращений, основанный на явной линеаризации рассматриваемой системы, получен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка. Далее изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлено довольно общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Список использованной литературы:

1. Расина И. В. Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов / И. В. Расина // Программные системы: Теория и приложения. — 2012. — № 5 (9). — С. 45–72.
2. Гурман В. И. Линейно-квадратичные дискретно-непрерывные системы / В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Батурина // Материалы XII Всероссийской совещании по проблемам управления. — М., 2014. — С. 166–172.
3. Расина И. В. Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов / И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 10. — С. 3–17.
4. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Мн. : БГЭУ, 2005. — 363 с.

5. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes / M. Dymkov, E. Pogers, S. Dymkov, K. Golkowski // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47, № 1. — P. 396–420.
6. Optimal control on non-stationary differential linear repetitive processes / S. Dymkov, M. Dymkov, E. Pogers, K. Golkowski // Inteqr. Equation oper. Theory. — 2008. — Vol. 60, № 1. — P. 201–216.
7. Control theory for a class of 2 D continuous-discrete linear systems / M. Dymkov, I. Gaishun, E. Rogers, K. Golkowski, D. H. Owens // Int. J. Control. — 2004. — Vol. 77, № 9. — P. 847–860.
8. Kaczorek T. Stability of continuous- discrete linear systems described by general model / T. Kaczorek // Bull Pol. Acad. Sci. Tech. — 2011. — Vol. 59, № 2. — P. 189–183.
9. Xiao Y. Stability, controllability and absorbability of 2 D continuous-discrete linear systems / Y. Xiao // Proc. Int. Symp. on Circuits and Systems. — 2003. — Vol. 4. — P. 468–471.
10. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем / Л. И. Розоноэр // Автоматика и телемеханика. — 1959. — № 10-12.
11. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Изд-во «Наука и техника», 1974. — 272 с.
12. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов. — Баку : ЭЛМ, 1999. — 164 с.
13. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
14. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
15. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1988.
16. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов. — Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. — 180 с.
17. Мансимов К. Б. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу / К. Б. Мансимов, М. Дж. Марданов. — Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. — 363 с.
18. Марданов М. Дж. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием / М. Дж. Марданов, К. Б. Мансимов, Т. К. Меликов. — Баку : ЭЛМ, 2013. — 361 с.
19. Гусейнзаде Г. А. Об интегральном представлении решений одной линейной дискретно-непрерывной системы / Г. А. Гусейнзаде, К. Б. Мансимов // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 2013. — № 6. — С. 15–20.

In this work the is considered an optimal control problem for continuous- discrete systems. The first and second order necessary optimality conditions are derived.

Key words: *discrete-continuous system, the linearized maximum condition, necessary, optimality conditions, guasisingular control.*

Отримано: 29.04.2015