УДК 519.85

О. А. Емец*, д-р физ.-мат. наук, професор,
Т. Н. Барболина**, канд. физ.-мат. наук

*Полтавский университет экономики и торговли, г. Полтава,
**Полтавский национальный педагогический университет имени В. Г. Короленко, г. Полтава

О ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ, ИНТЕРВАЛЬНОЙ ИЛИ НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для использования в постановках задач упаковки и покрытия формализовано взаимное расположение прямоугольников со стохастическими, интервальными или нечеткими параметрами. Предлагаемый подход основывается на установлении взаимного расположения отрезков, являющихся их проекциями на оси координат. Также построены комбинаторные математические модели оптимальной упаковки прямоугольников и покрытия прямоугольниками для случая, когда входные данные являются дискретными случайными величинами.

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, модели упаковки, параметры с неопределенностью, упаковка прямоугольников.*

Введение, постановка задачи. Применение аппарата комбинаторной оптимизации (см., например [1–6]) позволяет адекватно формализовать целый ряд практически значимых задач. Одной из таких задач евклидовой комбинаторной оптимизации является задача упаковки прямоугольников, которая в одном из простейших случаев формулируется следующим образом [2, с. 146]. Пусть есть полубесконечная полоса, разделенная на полоски одинаковой ширины H. Заданы также t прямоугольников ширины H с длинами $a_1,...,a_t$. Задача состоит в расположении прямоугольников без наложений в полосе таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимально возможной (под длиной занятой части полосы понимают максимальную из длин занятых частей отдельных полосок).

Следует отметить, что в случае наличия той или иной неопределенности входных данных (см., например, [5; 7]) возникает вопрос о формализации понятий взаимного расположения прямоугольников в полосе. Одним из возможных подходов к решению данной проблемы может быть использование введенного порядка на множестве соответствующих величин (нечетких чисел [8], центрированных интервалов [7], случайных величин [9]). Например, в [8], это было подробно сделано для прямоугольников с нечеткими параметрами. В данной статье предлагается подход, который идейно близок к жестким постановкам в задачах стохастического программирования [10; 11] и закрывает имеющийся в этом смысле пробел для учета стохастической неопределенности данных.

При этом для математической постановки задачи упаковки прямоугольников с неопределенными данными сначала необходимо определить, что понимать под различными способами размещения прямоугольников: попаданием прямоугольника в полосу; взаимным пересечением прямоугольников, размещенных в полосе; взаимным непересечением прямоугольников, размещенных в полосе; касанием прямоугольников, размещенных в полосе.

Формализация понятия прямоугольника с неопределенными параметрами. В данной статье будем рассматривать прямоугольники, по крайне мере один из размеров которых является центрированным интервалом, нечетким числом с дискретным носителем конечной мощности или конечнозначной дискретной случайной величиной. Такие параметры прямоугольников с неопределенностью (интервальной, нечеткой, стохастической) будем обозначать буквами полужирного начертания и называть ИНСН-параметрами. Для удобства изложения также будем говорить о возможных значениях ИНСН-параметров, под которыми будем понимать следующее:

- для центрированных интервалов — множество точек соответствующего интервала, в том числе концы интервала;
- для нечетких чисел — элементы носителя нечеткого числа;
- для дискретных случайных величин — в соответствии с общепринятым пониманием — множество тех значений, для которых соответствующая вероятность положительна.

Возможные значения ИНСН-параметров будем обозначать соответствующими буквами обычного начертания. Также для ИНСН-параметра **r** через $r^{\min}$ будем обозначать наименьшее, а через $r^{\max}$ наибольшее возможное значение (для рассматриваемых величин такие значения, очевидно, существуют).

Замечание 1. Отметим, что действительное число a может быть представлено как случайное с вероятностью 1, как нечеткое со значением функции принадлежности 1 или как центрированный интервал $(a;0)$. При этом $a^{\min} = a^{\max} = a$.

Прямоугольником Π, у которого хотя бы один из размеров задан ИНСН-параметром, назовем множество реализаций прямоугольников, размеры которых принимают одно из возможных значений соответствующих ИНСН-параметров. Например, если длина **d** и ширина **h** — дискретные случайные величины с возможными реализациями d_j с вероятностью p_j и h_j с вероятностью q_j соответственно, то прямоугольник Π' с размерами d_i и h_j с вероятностью реализации $p_i q_j$ — один из заданного множества Π прямоугольников; $\Pi' \subset \Pi$. Определение прямоугольника с нечеткими параметрами дано в [8, с. 61]. Если размеры прямоугольника Π заданы как центрированные интервалы: длина $(d;\sigma)$, ширина $(h;\delta)$, — то Π' имеет размеры $d' \in [d-\sigma; d+\sigma], h \in [h-\delta; h+\delta]$ и это — один из обычных прямоугольников, которые образуют множество $\Pi : \Pi' \subset \Pi$.

Пусть на плоскости задана декартова система координат xOy. Будем рассматривать расположения прямоугольников из Π, стороны которых параллельны осям координат. Тогда расположение прямоугольника относительно системы координат может быть определено такими ИНСН-параметрами:

- **(ζ, υ)** — соответственно абсцисса и ордината левого нижнего угла при каждой реализации прямоугольника из Π в системе координат xOy;
- **h** и **d** — ширина (высота) и длина прямоугольника.

Прямоугольник с указанными ИНСН-параметрами будем обозначать через Π **(ζ, υ, h, d)**. Также через $\tau(\eta,\theta)$ будем обозначать отрезок с координатами концов η и θ (ИНСН-параметрами или действительными числами). Полагаем, что конец с координатой η расположен левее (начало отрезка), то есть $\eta \le \theta$ для действительных чисел и $\eta^{\min} \le \theta^{\min}$, если **η** и **θ** — ИНСН-параметры. Будем говорить, что отрезок τ(**η**, **θ**) $\tau(\eta,\theta)$ удовлетворяет *условию определенности концов* отрезка, если для ИНСН-параметров **η** и **θ** выполняется неравенство $\eta^{\max} \le \theta^{\min}$.

Введем проекции Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ, υ, h, d)** прямоугольника Π **(ζ, υ, h, d)** на оси Ox и Oy соответственно. Назовем проекциями Π_x **(ζ, υ, h, d)** = τ(**ζ**, **ζ + d**) и Π_y **(ζ, υ, h, d)** = τ(**υ**, **υ + h**). Операции суммы для нахождения **ζ + d**, **υ + h** для нечетких чисел рассмотрены в [8, с. 30], для центрированных интервалов — в [7, с. 44], а для случайных величин — классические. В дальнейшем будем полагать, что для отрезков Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ, υ, h, d)** выполняется условие определенности концов отрезка.

Формализация взаимного расположения прямоугольников в описанном выше понимании может быть осуществлена на основе установления взаимного расположения их проекций на оси координат. Поэтому рассмотрим детальнее вопрос о взаимном расположении двух отрезков, лежащих на одной прямой, если координаты концов отрезка являются ИНСН-параметрами.

Формализация в условиях неопределенности взаимного расположения отрезков. Рассмотрим отрезки τ(**p**, **q**) и τ(**r**, **s**), для которых $p^{\min} \le r^{\min}$ (назовем это условие *упорядочением начал отрезков*). Тогда при возможных значениях p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s** отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$, очевидно, не имеют общих точек тогда и только тогда, когда $q < r$.

Определение 1. Отрезок τ(**r**, **s**) будем называть безусловно *принадлежащим* отрезку τ(**p**, **q**), если при любых возможных значениях p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s** все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$.

Пример 1. Рассмотрим отрезки τ(**p**, **q**) и τ(**r**, **s**), где p,q,r,s являются центрированными интервалами, которые будем обозначать (α,σ), понимая под этим интервал числовой оси $(\alpha-\sigma;\alpha+\sigma)$ ($\alpha,\sigma \in R^1$, $\sigma \ge 0$). Пусть $\mathbf{p}=(2;1)$, $\mathbf{q}=(9;0,5)$, $\mathbf{r}=(4;0,5)$, $\mathbf{s}=(7,5;1)$. Так как $p^{\max}=3 \le q^{\min}=8,5$ и $r^{\max}=4,5 \le s^{\min}=6,5$, то для заданных отрезков выполняется условие определенности концов. Также выполняется условие упорядочения начал отрезков: $p^{\min}=1 \le r^{\min}=3,5$. Как легко видеть из рис. 1, отрезок τ(**r**, **s**) является безусловно принадлежащим отрезку τ(**p**, **q**) (на рис. 1 заштрихованы те промежутки числовой прямой, которые принадлежат соответствующему отрезку при любых возможных значениях интервальных параметров).

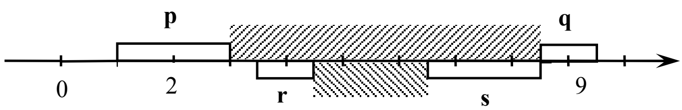

Рис. 1. *Иллюстрация к примеру 1*

Определение 2. Отрезок τ(**r**, **s**) будем называть *возможно принадлежащим* отрезку τ(**p**, **q**), если при отсутствии безусловной принадлежности существуют такие возможные значения p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s**, при которых все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$.

Определение 3. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *безусловно непересекающимися*, если при любых возможных значениях p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s** отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ не имеют общих точек.

Определение 4. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *возможно непересекающимися*, если выполняются следующие условия:

а) существуют возможные значения p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s**, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют больше одной общей точки;

б) существует такое возможное значение $\overline{r}$ ИНСН-параметра **r**, что при любых возможных значениях ИНСН-параметров **p, q, s** отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(\overline{r},s)$ не имеют общих точек.

Определение 5. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *внешне касающимися*, если существует единственная пара возможных значений $\overline{q},\overline{r}$ ИНСН-параметров **q, r**, при которых независимо от возможных значений p,s ИНСН-параметров **p, s** отрезки $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(\overline{r},s)$ имеют одну общую точку, а при всех остальных возможных значениях ИНСН-параметров отрезки не имеют общих точек.

Определение 6. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *внутренне касающимися*, если для любых возможных значений p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s** отрезки $\tau(r,s)$ и $\tau(p,q)$ имеют различные (необщие) точки и при этом существует единственная пара возможных значений $\overline{q},\overline{r}$ ИНСН-параметров **q, r**, такая, что независимо от возможных значений p,s ИНСН-параметров **p, s** отрезки $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(\overline{r},s)$ имеют одну общую точку, а при всех остальных возможных значениях ИНСН-параметров отрезки имеют больше одной общей точки.

Определение 7. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *безусловно пересекающимися*, если $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ не является безусловно или возможно принадлежащим $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и при любых возможных значениях p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s** отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют больше одной общей точки.

Определение 8. Отрезки $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ будем называть *возможно пересекающимися*, если выполняются следующие условия:

а) отрезок $\tau(\mathbf{r},\ \mathbf{s})$ не является возможно принадлежащим отрезку $\tau(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$;

б) существуют возможные значения p,q,r,s ИНСН-параметров **p, q, r, s**, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ не имеют общих точек;

в) существует такое возможное значение $\overline{q}$ ИНСН-параметра **q**, что при любых возможных значениях ИНСН-параметров **p, r, s** отрезки $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(r,s)$ имеют по крайней мере одну общую точку.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 (*о полноте введенной системы взаимного расположения отрезков в условиях неопределенности*). Для любых двух отрезков τ(**p, q**) и τ(**r, s**), для которых выполнено условия определенности концов $p^{\max} \le q^{\min}$ и упорядочения начал $p^{\min} \le r^{\min}$, имеет место одно из соотношений, введенных в определениях 1–8.

Замечание 2. В случае, когда неопределенность имеет вероятностный характер, целесообразно также ставить вопрос о вероятности касания (пересечения, непересечения) отрезков.

Формализация взаимного расположения прямоугольников.

Определение 9. Прямоугольник Π **(ζ, υ, h, d)** будем называть *безусловно размещающимся* в прямоугольнике Π **(ζ', υ', h', d')**, если отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ, υ, h, d)** безусловно принадлежат отрезкам Π_x **(ζ', υ', h', d')** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** соответственно.

Определение 10. Прямоугольник Π **(ζ, υ, h, d)** будем называть *возможно размещающимся* в прямоугольнике Π **(ζ', υ', h', d')** если выполняются следующие условия:

а) прямоугольник Π **(ζ, υ, h, d)** не является безусловно размещающимся в прямоугольнике Π **(ζ', υ', h', d')**;

б) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ, υ, h, d)** возможно или безусловно принадлежат отрезкам Π_x **(ζ', υ', h', d')** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** соответственно.

Замечание 3. Если рассматривается размещение прямоугольника Π **(ζ, υ, h, d)** в полубесконечной полосе шириной **H**, левый нижний угол которой имеет действительные координаты $(0;0)$, причем ось Ox направлена вдоль бесконечной стороны полосы, то в определениях 9, 10 при использовании «безусловной принадлежности» полагаем $\xi'^{\min} = \xi'^{\max} = 0$, $\nu'^{\min} = \nu'^{\max} = 0$, $h = H$, $d'^{\min}$, $d'^{\max}$ таковы, что неравенства $d'^{\max} \ge d^{\max}$, $d'^{\min} \ge d^{\min}$ выполняются при любых значениях $d^{\max}$ и $d^{\min}$.

Определение 11. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *безусловно непересекающимися*, если безусловно не пересекаются отрезки по крайней мере одной из двух следующих пар: Π_x **(ζ, υ, h, d)**, Π_x **(ζ', υ', h', d')** или Π_y **(ζ, υ, h, d)**, Π_y **(ζ', υ', h', d')**.

Определение 12. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *возможно непересекающимися*, если при отсутствии безусловного непересечения возможно не пересекаются отрезки по крайней мере одной из двух следующих пар: Π_x **(ζ, υ, h, d)**, Π_x **(ζ', υ', h', d')** или Π_y **(ζ, υ, h, d)**, Π_y **(ζ', υ', h', d')**.

Определение 13. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *безусловно пересекающимися*, если выполнено одно из двух условий:

а) отрезки Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** безусловно пересекаются и при этом либо безусловно пересекаются отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')**, либо один из отрезков Π_y **(ζ, υ, h, d)**, и Π_y **(ζ', υ', h', d')** является безусловно или возможно принадлежащим другому;

б) отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** безусловно пересекаются и при этом один из отрезков Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** является безусловно или возможно принадлежащим другому.

Определение 14. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *возможно пересекающимися*, если выполнено одно из двух условий:

а) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** возможно пересекаются и при этом либо пересекаются (безусловно или возможно) отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')**, либо один из отрезков Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** является безусловно или возможно принадлежащим другому;

б) отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** возможно пересекаются и при этом либо безусловно пересекаются отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')**, либо один из отрезков Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** является безусловно или возможно принадлежащим другому.

Определение 15. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *безусловно касающимися внешне (внутренне)*, если выполнено одно из двух условий:

а) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** являются внешне (внутренне) касающимися и при этом отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** безусловно пересекаются либо один из отрезков Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** является безусловно принадлежащим другому;

б) отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** являются внешне (внутренне) касающимися и при этом отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** безусловно пересекаются либо один из отрезков Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** является безусловно принадлежащим другому.

Определение 16. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *возможно касающимися внешне (внутренне)*, если выполнено одно из двух условий:

а) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** являются внешне (внутренне) касающимися и при этом отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** возможно пересекаются либо один из отрезков Π_y **(ζ, υ, h, d)**, Π_y **(ζ', υ', h', d')** является возможно принадлежащим другому;

б) отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** являются внешне (внутренне) касающимися и при этом отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** возможно пересекаются либо один из отрезков Π_x **(ζ, υ, h, d)**, Π_x **(ζ', υ', h', d')** является возможно принадлежащим другому.

Определение 17. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *внешне (внутренне) касающимися*, если внешне (внутренне) касающимися являются как отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')**, так и отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')**.

Определение 18. Прямоугольники Π **(ζ, υ, h, d)** и Π **(ζ', υ', h', d')** будем называть *внешне-внутренне касающимися*, если выполнено одно из двух условий:

а) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** являются внешне касающимися, а отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** — внутренне касающимися;

б) отрезки Π_x **(ζ, υ, h, d)** и Π_x **(ζ', υ', h', d')** являются внутренне касающимися, а отрезки Π_y **(ζ, υ, h, d)** и Π_y **(ζ', υ', h', d')** — внешне касающимися.

Пример 2. Рассмотрим прямоугольники Π ($\mathbf{ζ_1}$, $\mathbf{υ_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{d_1}$) и Π ($\mathbf{ζ_2}$, $\mathbf{υ_2}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{d_2}$), параметры которых являются дискретными случайными величинами, определенными рядами распределения в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Ряды распределения параметров прямоугольников

Параметры прямоугольников	$i = 1$			$i = 2$		
значения ζ_i	1	2		6	6,3	7
вероятности значений ζ_i	0,3	0,7		0,5	0,3	0,2
значения $\mathbf{\upsilon}_i$	2	2,5	3	0,5		
вероятности значений $\mathbf{\upsilon}_i$	0,3	0,3	0,4	1		
значения $\mathbf{h}_i$	3			2,5	3	4
вероятности значений $\mathbf{h}_i$	1			0,2	0,6	0,2
значения $\mathbf{d}_i$	3	4		4		
вероятности значений $\mathbf{d}_i$	0,5	0,5		1		

Проекциями рассматриваемых прямоугольников на оси координат являются отрезки $\tau(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = \Pi_x(\zeta_1, \mathbf{\upsilon}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{d}_1)$, $\tau(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = \Pi_x(\zeta_2, \mathbf{\upsilon}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{d}_2)$, $\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1) = \Pi_y(\zeta_1, \mathbf{\upsilon}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{d}_1)$, $\tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2) = \Pi_y(\zeta_2, \mathbf{\upsilon}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{d}_2)$, где $\mathbf{p}_i = \zeta_i$, $r_i = \mathbf{\upsilon}_i$ ($i = 1, 2$), а ряды распределения случайных величин $\mathbf{q}_1 = \zeta_1 + \mathbf{d}_1$, $\mathbf{q}_2 = \zeta_2 + \mathbf{d}_2$, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{\upsilon}_1 + \mathbf{h}_1$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{\upsilon}_2 + \mathbf{h}_2$, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Ряды распределения параметров отрезков

Параметры отрезков	$i = 1$			$i = 2$		
значения $\mathbf{q}_i$	4	5	6	10	10,3	11
вероятности значений $\mathbf{q}_i$	0,15	0,5	0,35	0,5	0,3	0,2
значения $\mathbf{s}_i$	5	5,5	6	3	3,5	4,5
вероятности значений $\mathbf{s}_i$	0,3	0,3	0,4	0,2	0,6	0,2

На рис. 2 каждая точка областей Π_1 и Π_2 принадлежит по крайней мере одному прямоугольнику в обычном смысле $\Pi_1' \subset \Pi(\zeta_1, \mathbf{\upsilon}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{d}_1)$ или $\Pi_2' \subset \Pi(\zeta_2, \mathbf{\upsilon}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{d}_2)$ соответственно. Заштрихованные области — это множества точек, принадлежащих любому прямоугольнику из множества $\Pi(\zeta_i, \mathbf{\upsilon}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{d}_i)$ ($i = 1; 2$).

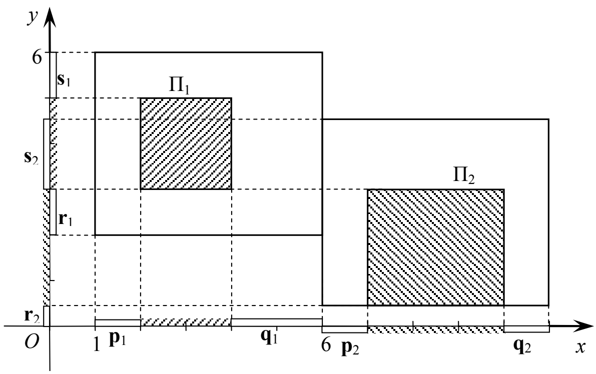

Рис. 2. *Иллюстрация к примеру 2*

Из рис. 2 видно, что отрезки $\tau(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ и $\tau(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ являются внешне касающимися (значения ИНСН-параметров $\overline{q}_1 = q_1^{\max} = p_2^{\min} = \overline{p}_2 = 6$ удовлетворяют условиям определения 5), а отрезки $\tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2)$ и $\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1)$ — внутренне касающимися (условиям определения 6 удовлетворяют значения $\overline{r}_1 = r_1^{\max} = s_2^{\min} = \overline{s}_2 = 3$). Таким образом, в соответствии с условием а) определения 18 прямоугольники $\Pi(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\upsilon}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{d}_1)$ и $\Pi(\boldsymbol{\zeta}_2, \boldsymbol{\upsilon}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{d}_2)$ являются внешне-внутренне касающимися.

Возможные размещения прямоугольников систематизированы в табл. 3, где использованы следующие обозначения, используемые при описании расположения прямоугольников: Б — безусловно, В — возможно, Пр — принадлежащие, П — пересекающиеся, НП — непересекающиеся, Вш — внешне, Вт — внутренне, К — касающиеся, Р — размещающиеся.

В табл.3 шапка и боковик определяют расположение отрезков $\Pi_x(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$, $\Pi_x(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\upsilon}', \mathbf{h}', \mathbf{d}')$ и отрезков $\Pi_y(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$, $\Pi_y(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\upsilon}', \mathbf{h}', \mathbf{d}')$ соответственно, а клетка на их пересечении — расположение прямоугольников $\Pi(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$, $\Pi(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\upsilon}', \mathbf{h}', \mathbf{d}')$.

Таблица 3

Возможные размещения прямоугольников

Π_x / Π_y	**БПр**	**ВПр**	**БНП**	**ВНП**	**БП**	**ВП**	**ВшК**	**ВтК**
БПр	БР	ВР	БНП	ВНП	БП	ВП	БВшК	БВтК
ВПр	ВР	ВР	БНП	ВНП	БП	ВП	ВВшК	ВВтК
БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП	БНП
ВНП	ВНП	ВНП	БНП	ВНП	ВНП	ВНП	ВНП	ВНП
БП	БП	БП	БНП	ВНП	БП	ВП	БВшК	БВтК
ВП	ВП	ВП	БНП	ВНП	ВП	ВП	ВВшК	ВВтК
ВшК	БВшК	ВВшК	БНП	ВНП	БВшК	ВВшК	ВшК	ВшВтК
ВтК	БВтК	ВВтК	БНП	ВНП	БВтК	ВВтК	ВшВтК	ВтК

Как следует из табл.3, справедливо следующее утверждение

Утверждение 2 *(о полноте введенной системы взаимного расположения прямоугольников в условиях неопределенности).* Для любых двух прямоугольников $\Pi(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{h}, \mathbf{d})$ и $\Pi(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\upsilon}', \mathbf{h}', \mathbf{d}')$, для проекций которых на оси координат выполняется условие определенности концов отрезка, имеет место одно из соотношений, введенных в определениях 9–18.

Математические модели задач упаковки и покрытия прямоугольников со стохастическими параметрами. Используя введенные понятия, построим одну математическую модель задачи упаковки прямоугольников в случае, когда длины прямоугольников $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t$ являются конечнозначными дискретными случайными величинами. Один из возможных подходов к формализации взаимного расположения прямоугольников состоит в использовании отношения порядка на множестве дискретных случайных величин [9]. Ниже предлагается подход, который идейно близок к жестким постановкам задач стохастической оптимизации.

Как известно [11, с. 8], при построении моделей выбора решений в условиях неполной информации в ряде случаев целесообразно использовать так называемые жесткие постановки задач стохастического программирования, в которых ограничения задачи должны удовлетворяться при всех реализациях случайных параметров. В применении к задаче упаковки прямоугольников это означает, что ни при каких значения случайных величин не может произойти наложение прямоугольников, однако могут образовываться зазоры.

Пусть осуществляется упаковка прямоугольников, ширина H которых является действительным числом, в полубесконечную полосу Π_0, левый нижний угол которой расположен в начале системы координат, причем ось Ox направлена вдоль бесконечной стороны полосы. Полагаем, что данная полубесконечная полоса разделена на m полосок ширины H. Тогда в оптимальном решении в каждой полоске стоит от 1 до $t-(m-1)$ прямоугольников. Обозначим $n=t-m+1$ и введем в рассмотрение $mn-t$ прямоугольников с шириной H и длиной $\mathbf{a}_0=0$ (в замечании 1 отмечена возможность рассматривать действительные числа как ИНСН-параметр в предельных случаях). В каждой полоске разместим столько прямоугольников длины $\mathbf{a}_0$, чтобы их общее количество в полоске равнялось n. Таким образом, можно считать, что в каждой полоске стоит ровно n прямоугольников.

Обозначим $\Pi(\boldsymbol{\zeta}_{ij}, \boldsymbol{\upsilon}_{ij}, \mathbf{h}_{ij}, \mathbf{x}_{ij})$ — прямоугольник, стоящий в i-й полоске ($i \in J_m$) на j-м ($j \in J_n$) от начала полосы месте (тут и далее J_s обозначено множество s первых натуральных чисел). Так как все полоски и прямоугольники одинаковой ширины H, то при $\mathbf{h}_{ij}=H$, $\boldsymbol{\upsilon}_{ij}=(i-1)H \quad \forall i \in J_m, j \in J_n$, очевидно, прямоугольники, стоящие в разных полосках, являются либо безусловно непересекающимися, либо касающимися (как внутренне, так и внешне).

Так как ни при каких возможных значениях дискретных случайных величин $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t$ прямоугольники не могут накладываться, то в допустимом решениии должно иметь место либо безусловное непересечение, либо внешнее касание (безусловное или возможное) соседних прямоугольников ненулевой длины. Очевидно, что в оптимальном решении прямоугольники должны в полосках размещаться так, чтобы каждый следующий внешне касался предыдущего. Так как $\boldsymbol{\nu}_{i,j+1} = \boldsymbol{\nu}_{ij}$, то это означает внешнее касание всех отрезков $\Pi_x(\boldsymbol{\zeta}_{ij}, \boldsymbol{\upsilon}_{ij}, \mathbf{h}_{ij}, \mathbf{x}_{ij}) = \tau(\boldsymbol{\zeta}_{ij}, \boldsymbol{\zeta}_{ij} + \mathbf{x}_{ij})$ и $\Pi_x(\boldsymbol{\zeta}_{i,j+1}, \boldsymbol{\upsilon}_{i,j+1}, \mathbf{h}_{i,j+1}, \mathbf{x}_{i,j+1}) = \tau(\boldsymbol{\zeta}_{i,j+1}, \boldsymbol{\zeta}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1})$, для которых $\mathbf{x}_{ij}$ и $\mathbf{x}_{i,j+1}$ — дискретные случайные величины.

Необходимым и достаточным условием внешнего касания указанных проекций является выполнение равенства $\left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max} = \xi_{i,j+1}^{\min}$. Действительно, в этом случае отрезки $\tau\left(\xi_{ij}, \left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max}\right)$ и $\tau\left(\xi_{i,j+1}^{\min}, \xi_{i,j+1} + x_{i,j+1}\right)$ имеют единственную общую точку при любых возможных значениях ИНСН-параметров $\boldsymbol{\xi}_{ij}$, $\boldsymbol{\zeta}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1}$, причем вследствие неравенства $\xi_{ij} + x_{ij} < \xi_{i,j+1}$ отрезки не пересекаются для всех остальных возможных значений ИНСН-параметров. С другой стороны, если $\left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max} > \xi_{i,j+1}^{\min}$, то отрезки $\tau\left(\xi_{ij}, \left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max}\right)$ и $\tau\left(\xi_{i,j+1}^{\min}, \xi_{i,j+1} + x_{i,j+1}\right)$ имеют больше одной общей точки, а при $\left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max} < \xi_{i,j+1}^{\min}$ отрезки $\tau(\boldsymbol{\zeta}_{i,j}, \boldsymbol{\zeta}_{i,j} + \mathbf{x}_{i,j})$ и $\tau(\boldsymbol{\zeta}_{i,j+1}, \boldsymbol{\zeta}_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1})$ не имеют общих точек ни при каких возможных значениях ИНСН-параметров.

Будем размещать прямоугольники таким образом, чтобы $\xi_{ij} \in R^1 \quad \forall i \in J_m \quad \forall j \in J_n$. Тогда $\xi_{ij}^{\max} = \xi_{ij}$, $\xi_{i,j+1}^{\min} = \xi_{i,j+1}$, значит, $\xi_{i,j+1} = \xi_{i,j+1}^{\min} = \left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\max} = \xi_{ij} + x_{ij}{}^{\max}$. При этом для отрезков нулевой длины это равенство запишется как $\xi_{i,j+1} = \xi_{ij}$, то есть добавление прямоугольников длины $\mathbf{a}_0 = 0$ не влияет на длину занятой части полосы. Таким образом, в оптимальном решении должны выполняться равенства $\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} + x_{ij}{}^{\max} \quad \forall i \in J_m, \forall j \in J_{n-1}$.

Первый в полоске прямоугольник, очевидно, следует размещать так, чтобы его начало совпадало с началом полосы, то есть $\xi_{i1} = 0$. Следовательно, длина занятой части i-й полоски равна $x_{i1}^{\max} + x_{i2}^{\max} + \ldots + x_{in}^{\max}$, а длина занятой части полосы в целом определяется как $\max\limits_{1 \le i \le m}\left(x_{i1}^{\max} + x_{i2}^{\max} + \ldots + x_{in}^{\max}\right)$.

Для формализации ограничений на возможные длины прямоугольников может быть использован аппарат евклидовой комбинаторной оптимизации. Соответствующую терминологию будем использовать преимущественно из [2]. В частности, под мультимножеством G понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Множество, различными элементами которого являются различные k-выборки из G вида

$$\left(g_{i_1}, g_{i_2}, ..., g_{i_k}\right), \tag{1}$$

$g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_j$ $\forall i_j, i_t \in J_n$, $\forall j, t \in J_k$ называется евклидовым комбинаторным множеством. Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются общее множество размещений $E_\eta^k\left(G\right)$ (множество всех k-выборок вида (1) из мультимножества G) и общее множество перестановок $E_k\left(G\right)$ (множество всех выборок вида (1) из мультимножества G при условии $k = \eta$).

Рассмотрим мультимножество $G = \{\underbrace{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_0}_{mn-t}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t\}$ и вектор

$$x = \left(\mathbf{x}_{11}, ..., \mathbf{x}_{1n}, \mathbf{x}_{21}, ..., \mathbf{x}_{m1}, ..., \mathbf{x}_{mn}\right). \tag{2}$$

Тогда каждому расположению прямоугольников в полосе взаимно однозначно соответствует вектор x, который можно рассматривать как элемент множества перестановок $E_k\left(G\right)$ ($k = mn$) из элементов мультимножества G, то есть $x \in E_k\left(G\right)$.

Таким образом, математическую модель сформулированной задачи упаковки прямоугольников, длины которых являются дискретными случайными величинами, можно записать так: найти пару $\left\langle F\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ такую, что

$$F\left(x^*\right) = \min_{x \in E_k(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max}; \; x^* = \arg\min_{x \in E_k(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\max} .$$

Замечание 4. Можно также рассматривать задачу упаковки прямоугольников в случае, когда ширина прямоугольников $\mathbf{H}$ является дискретной случайной величиной. Тогда из запрета наложений следует, что ширина полосок, на которые разделяется заданная полубесконечная полоса, равна $H^{\max}$.

Приведем пример содержательной интерпретации задачи упаковки прямоугольников, в котором целесообразным представляется применение рассматриваемого в статье подхода. Пусть имеется некоторая система обслуживания, содержащая m устройств. Каждое из устройств в любой момент времени может осуществлять обслуживание одного из t заказов, причем длительность исполнения заказов не зависит от обслуживающего устройства. Будем считать, что в задании длительности обработки заказов имеет место стохастическая неопределенность. Необходимо до начала обслуживания определить для каждого заказа соответствующее устройство и момент (детерминированный) начала его выполнения при таких условиях:

- недопустимость задержки обслуживания заказов: в момент времени, определенный как начало выполнения i-го заказа, выполнение предыдущих заказов на данном устройстве должно завершиться;
- время выполнения всех заказов должно быть минимально возможным.

Интерпретируя длительность обслуживания заказов как длины прямоугольников со стохастическими параметрами, задачу распределения заказов можно сформулировать как задачу упаковки прямоугольников. При этом именно использование описанного выше подхода к формализации взаимного расположения прямоугольников позволяет гарантировать отсутствие задержек (то есть пересечений прямоугольников) при всех реализациях стохастических параметров.

Вместе с задачей упаковки прямоугольников практически значимой является задача покрытия прямоугольной области прямоугольниками. Некоторые математические модели такой задачи для случаев, когда размеры прямоугольников являются действительными или нечеткими числами, были предложены в [12; 13]. Рассмотрим одну из возможных постановок, если длины прямоугольников являются конечнозначными дискретными случайными величинами. Пусть задана прямоугольная полоса, разделенная на m полосок одинаковой ширины H и длины $\mathbf{L}$ (т.е. прямоугольников), где $H \in R^1$, $\mathbf{L}$ — конечнозначная дискретная случайная величина. Так же, как и в задаче упаковки, заданы $t > m$ прямоугольников ширины H с длинами $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t$ (как и длина полосы, длины прямоугольников являются конечнозначными дискретными случайными величинами). Полагаем, что при любых возможных значениях стохастических параметров $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t$ суммарная площадь прямоугольников не меньше площади полосы $mH\mathbf{L}$ (здесь под произведением $mH\mathbf{L}$ понимаем случайную величину, возможные значения которой равны произведению возможных значений величины $\mathbf{L}$ на константу mH, а вероятности равны соответствующим вероятностям величины $\mathbf{L}$). Задача состоит в том, чтобы выбрать такое размещение прямоугольников, при котором каждая точка полосы принадлежала бы по крайней мере одному из прямоугольников независимо от реализаций случайных параметров и при этом математическое ожидание суммарной площади прямоугольников было минимально.

Будем рассматривать положение полосы, как в предыдущей задаче, и использовать аналогичные обозначения. Можно полагать, что в каждой полоске стоит ровно n прямоугольников, из которых некоторые нулевой длины (вопрос об определении значения n будет рассмотрен ниже). Так как между прямоугольниками не должно быть промежутков ни при каких возможных значениях стохастических параметров, то соседние прямоугольники ненулевой длины должны либо внутренне касаться (безусловно или возможно), либо безусловно пересекаться. Очевидно, что для любого покрытия, в котором соседние прямоугольники безусловно пересекаются, существует покрытие без пересечения, которое будет по крайней мере не хуже с точки зрения указанного критерия оптимальности.

Если для прямоугольника $\Pi\left(\xi_{ij}, \nu_{ij}, h_{ij}, \mathbf{x}_{ij}\right)$, как и выше, полагаем, что $\xi_{ij}, \nu_{ij}, h_{ij}$ являются действительными числами, причем $\nu_{ij} = \left(i-1\right)H$, $h_{ij} = H$, то между полосками, очевидно, промежутков нет. При этом отрезки $\Pi_x\left(\xi_{ij}, \nu_{ij}, h_{ij}, \mathbf{x}_{ij}\right) = \tau\left(\xi_{ij}, \xi_{ij} + \mathbf{x}_{ij}\right)$ и $\Pi_x\left(\xi_{i,j+1}, \nu_{i,j+1}, h_{i,j+1}, \mathbf{x}_{i,j+1}\right) = \tau\left(\xi_{i,j+1}, \xi_{i,j+1} + \mathbf{x}_{i,j+1}\right)$ должны внутренне касаться. Достаточным условием этого является выполнение равенства $\left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\min} = \xi_{i,j+1}^{\max}$ (очевидно, отрезки имеют различные точки, причем возможные значения $\overline{q} = \left(\xi_{ij} + x_{ij}\right)^{\min}$ и $\overline{r} = \xi_{i,j+1}^{\max}$ удовлетворяют условиям определения 6).

Учитывая, что ξ_{ij} — действительное число, то есть $\xi_{ij}^{\min} = \xi_{ij}$, получаем $\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} + x_{ij}^{\min}$ $\forall i \in J_m, \forall j \in J_n$. Кроме того, при любых возможных значениях стохастических параметров правый конец последнего прямоугольника должен располагаться правее конца полосы, то есть должно выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\min} \geq L^{\max}. \tag{3}$$

Как и в задаче упаковки, каждому размещению прямоугольников в полосе взаимно однозначно соответствует вектор (2).

Вернемся к вопросу о значении величины n. Пусть длины прямоугольников $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t$ упорядочены по неубыванию значений $a_i^{\min}$: $a_i^{\min} \le a_{i+1}^{\min}$ $\forall i \in J_{t-1}$. Из рассмотренных принципов размещения прямоугольников в полоске следует, что их максимальное количество n в полоске может быть определено из условий

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\min} < L^{\max}, \sum_{i=1}^{n} a_i^{\min} \ge L^{\max}.$$

Так как прямоугольников нулевой длины, очевидно, не больше $m(n-1)$ (в каждой полоске размещается по крайней мере один прямоугольник), введем в рассмотрение мультимножество $\bar{G} = \{\underbrace{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_0}_{m(n-1)}, \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_t\} = \{g_1,...,g_\eta\}$ $\left(\eta = m(n-1)+t\right)$). Тогда вектор (2) является упорядоченной k-выборкой ($k = mn \le \eta$) из мультимножества $\bar{G}$, то есть элементом общего множества размещений $E_\eta^k\left(\bar{G}\right)$. Таким образом, математическую модель сформулированной выше задачи покрытия прямоугольной полосы прямоугольниками можно записать так: найти пару $\left\langle F\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ такую, что

$$F\left(x^*\right) = \min_{x \in E_\eta^k\left(\bar{G}\right)} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M\left(H\mathbf{x}_{ij}\right),\; x^* = \arg\min_{x \in E_\eta^k\left(\bar{G}\right)} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M\left(H\mathbf{x}_{ij}\right)$$

при условии (3) (здесь через M (ζ) обозначено математическое ожидание случайной величины ζ).

Замечание 5. Как и задачу упаковки, задачу покрытия прямоугольниками можно рассматривать в случае, когда **H** является дискретной случайной величиной. Тогда ширина полосок, на которые разделяется заданная полоса, равна $H^{\min}$.

Замечание 6. Если размеры прямоугольников являются действительными числами, то рассмотренная математическая модель задачи покрытия эквивалентна модели 2 из [12], в которой минимизируемым критерием оптимальности является сумма «выступов» (величин $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - L$) при условии, что прямоугольники расположены не только без промежутков, но и без наложений. Действительно, при таком допустимом расположении прямоугольников величину минимизируемого при (3) на $E_\eta^k\left(\bar{G}\right)$ $F(x)$ можно представить следующим образом:

$$F(x) = HL + \sum_{j=1}^{n} Hx_{ij} - L.$$

Это означает, что задача минимизации функции $F(x)$ эквивалентна задачи минимизации суммы «выступов». Однако такой критерий оптимальности нецелесообразен для определенного в данной статье взаимного расположения прямоугольников, так как невозможно выбрать такое расположение прямоугольников, чтобы при всех возможных значениях стохастических параметров между ними не было расстояний и в то же время прямоугольники не накладывались.

Замечание 7. Изложенный подход к формализации взаимного расположения прямоугольников является новым. Авторам не известна рассматриваемая реализация прямоугольников со стохастическими параметрами. Для параметров с центрированными интервалами этот подход отличается от работ Ю. Г. Стояна и его учеников (см., например, [14]). Для параметров с нечеткими числами предложенный подход отличен от работ, обобщенных в [8]).

Выводы. Таким образом, в статье предложен подход к формализации взаимного размещения прямоугольников, которые на плоскости задаются параметрами с интервальной, нечеткой или стохастической неопределенностью. На основе введенных понятий взаимного размещения прямоугольников построены математические модели задач упаковки прямоугольников и покрытия полосы прямоугольниками для случая, когда длины прямоугольников являются конечнозначными дискретными случайными величинами. Как направление дальнейших исследований можно наметить разработку методов решения сформулированной задачи.

Список использованной литературы:

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. —288 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
3. Барболина Т. Н. Решение частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности / Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 137–149.
4. Емец О. А. Решение линейных условных полностью комбинаторных оптимизационных задач на перестановках методом ветвей и границ / О. А. Емец, Е. М. Емец, Т. А. Парфёнова, Т. В. Чиликина // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 121–128.

5. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35–44.
6. Емец О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями / О. А. Емец, Т. Н. Барболина, О. А. Черненко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. —С. 79–85.
7. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
8. Ємець О.О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 239 с.
9. Ємець О. О. Формалізація взаємного розташування прямокутників з випадковими параметрами / О. О. Ємець, Т. М. Барболіна // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014) : abstracts of XXIV International Conference, September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic / Taras Shevchenko National University of Kyiv, University of Defence, Brno etc. — К. : ТВіМС, 2014. — С. 124–125.
10. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. — М. : Наука, 1979. — 256 с.
11. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин.— М. : Сов. радио, 1974. — 400 с.
12. Ємець О. О. Комбінаторна задача покриття прямокутника прямокутниками / О. О. Ємець, О. Ю. Галюкова // Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» ІСН-2011, 17-19 березня 2011р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. О. О. Ємця. — Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. — С. 102–104.
13. Ємець О. О. Нечіткі прямокутники в задачі покриття / О. О. Ємець, О. Ю. Галюкова // Інформаційні технології, системний аналіз і моделювання соціоекологічних систем / Кафедра економічної кібернетики ФЕП ІЕМ НАУ. — К. : Допомога, 2011. — С. 97–103.
14. Стоян Ю. Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Л. Г. Евсеева // Доповіді НАН України. — 1997. — № 7. — С. 56–60.

Authors formalize mutual placement of rectangles with stochastic, interval or fuzzy parameters for use in packing and covering problem statements. The approach offered in the paper is based on determining of mutual placement of their projections on the coordinate axes. We also construct a combinatorial mathematical model of optimum rectangle packing when data are discrete random variables.

Key words: *combinatorial optimization, models of packing, parameters under uncertainty, packing of rectangles.*

Отримано: 26.03.2015