УДК 517.977

А. С. Перцов, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ МІНІМАКСНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Для систем, які описуються рівняннями лінійної теорії пружності з крайовими умовами типу Неймана при квадратичних обмеженнях на невідомі дані та на другі моменти шумів в спостереженнях, проблема мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів від розв'язків цих крайових задач зведена до розв'язання задачі оптимального керування деякою системою, що описується варіаційною крайовою задачею спеціального вигляду.

Ключові слова: *гарантоване оцінювання, мінімаксні оцінки, задача Неймана для рівнянь лінійної теорії пружності.*

Вступ. Задачі мінімаксного оцінювання станів систем, які описуються звичайними диференційними рівняннями та рівняннями в частинних похідних являються цікавим і в той же час достатньо складним об'єктом дослідження. Такі задачі знаходять застосування при побудові систем керування, що функціонують в умовах невизначеності та систем автоматизованої обробки результатів експериментів в багатьох галузях природознавства. Важливі результати в цьому напрямку одержані в роботах Наконечного О. Г., Подлипенка Ю. К. та їх учнів [1–2] .

У цій статті досліджується еквівалентність задачі мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів від розв'язків рівнянь лінійної теорії пружності з крайовими умовами типу Неймана деякій задачі оптимального керування вивчення якої розпочато в роботі [3].

Позначимо через H гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ і нормою $\|\cdot\|_H$; Через $\Lambda_H \in \mathcal{L}(H,H')$ будемо позначати оператор, що називається ізометричним ізоморфізмом, який діє з H на його спряжений простір H' та визначається рівністю $(v,u)_H = <v,\Lambda_H u>_{H\times H'}$ $\forall u,v \in H$, де $<x,f>_{H\times H'} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Цей оператор існує внаслідок теореми Ріса [5].

Позначимо через $L^2(\Omega,H)$ простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{B},P)$ зі значеннями в H таких, що

$\| \xi \|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int_\Omega \| \xi(\omega) \|^2_H \, dP(\omega) < \infty$. У цьому випадку існує інтеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega) \in H$, що називається математичним сподіванням або середнім випадкового елемента $\xi(\omega)$.

В $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi,\eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int_\Omega (\xi(\omega),\eta(\omega))_H \, dP(\omega), \ \ \forall \xi,\eta \in L^2(\Omega,H). \tag{1}$$

Простір $L^2(\Omega, H)$ зі скалярним добутком (1) є гільбертовим.

Введемо також наступні позначення: $x = (x_1, x_2, x_3)$ — просторова змінна, яка належить обмеженій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ з ліпшицевою межею Г; $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^3$; $L^2(D)$ — простір функцій, сумованих з квадратом в області D; для цілого числа m позначимо через $H^m(D)$ — стандартні простори Соболєва з природніми нормами; знак «:» позначає згортку тензора і вектора або тензора і тензора.

Нехай тіло D — обмежена багатозв’язна область з ліпшицевою межею в просторі $\mathbb{R}^3$. Позначимо через $u = (u_1, u_2, u_3)$ вектор переміщення (компоненти якого є функціями $x \in D$) і через ε_{ij} компоненти тензора деформації

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

Відмітимо, що $div\, u = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(u)$ і що ε симетричний: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Крім того, $\varepsilon(u) = 0$ тоді і тільки тоді коли $u \in \mathcal{RB}$.

Тут

$$\mathcal{RB} := \left\{ r \in \mathbb{R}^3 : r = a + b \times [x_1, x_2, x_3]^T \right\}, \tag{2}$$

де $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Прямі обчислення показують, що вектор r в (2) визначається формулою $r = R(x)\alpha$, де $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, а 3×6 -матриця $R(x)$ має вигляд

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці

$$r_1 = [1,0,0]^T,\ r_2 = [0,1,0]^T,\ r_3 = [0,0,1]^T,$$
$$r_4 = [0,-x_3,x_2]^T,\ r_5 = [x_3,0,-x_1]^T,\ r_6 = [-x_2,x_1,0]^T \tag{3}$$

утворюють базис підпростору $\mathcal{RB}$, так що $dim\,\mathcal{RB} = 6$.

Тензор напруження визначається за формулою $\tau = \tau(u) = = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\, div\, uI$, де I — одинична матриця в $\mathbb{R}^3$, $\lambda = \lambda(x)$ $(\lambda(x) \ge 0)$ і $\mu = \mu(x)$ $(\mu(x) > 0)$ – узагальнені коефіцієнти Ламе, які характеризують пружність тіла, і припускаються кусково-неперервними функціями в області $\bar{D}$. Тензор напруження τ також є симетричним.

Введемо диференціальний оператор другого порядку

$$Lu = -div\,\tau(u) = \left[-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda\, div\, u\delta_{ij})\right].$$

Задача Неймана в математичній теорії пружності формулюється таким чином: знайти вектор переміщення u, який задовольняє рівнянням

$$Lu = F \text{ в } D,$$
$$\tau(u) : n = \sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}n_j = g \text{ на } \Gamma, \tag{4}$$

де F — вектор об’ємних сил в тілі D , g — векторна функція, задана на Γ, n_j — направляючі косинуси зовнішньої по відношенню до області D нормалі n до її межі Γ .

Припустимо, що $F \in L^2(D)^3$, $g \in L^2(\Gamma)^3$. Тоді під розв’язком задачі (4) розуміється знаходження функції $u \in H^1(D)^3$, яка задовольняє інтегральній тотожності

$$a(u,v) = < F,v > \ \forall v \in H^1(D)^3 \tag{5}$$

де

$$a(u,v) = \int_D (2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda\, div\, u\, div\, v)dx,$$
$$< F,v > = \int_D (F,v)_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (g,v)_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma,$$
$$\varepsilon(u) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v).$$

Розв'язок задачі (5) не є єдиним і визначається з точністю до довільної функції з $\mathcal{RB}$. Він існує тоді і лише тоді, коли функції F і g задовольняють наступним умовам сумісності (див. [4]):

$$\int_D (F,r)_{\mathbb{R}^3}\,dx + \int_\Gamma (g,r)_{\mathbb{R}^3}\,d\Gamma = 0,\ \forall r \in \mathcal{RB}. \qquad (2)$$

Постановка задачі мінімаксного оцінювання. Задача оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженнями вигляду

$$y = Cu + \eta \qquad (7)$$

знайти оптимальну, в деякому розумінні, оцінку значень функціоналу

$$l(u) = \int_D (l_0(x), u(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx$$

в класі лінійних оцінок $\widehat{l(u)} = (y(u;\eta), w)_{H_0} + c,$ де $u(x)$ — розв'язок крайової задачі (4), елемент w належить гільбертову простору H_0, $c \in \mathbb{R},\ \ l_0 \in L^2(D)^3$ — задана функція, в припущенні, що праві частини $F(x),\ \ g$ рівнянь (4) та похибки $\eta = \eta(\omega)$ в спостереженнях (7), які є випадковими елементами, які визначені на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H_0, невідомі, а відомо лише, що елемент $F := (F, g) \in G_0$ і $\eta \in G_1$. Тут $C \in \mathcal{L}\left(L^2(D)^3, H_0\right)$ — лінійний неперервний оператор, такий що його обмеження на підпростір $\mathcal{RB}$ ін'єктивне; через G_0 позначено множину функцій $\tilde{F} := (\widetilde{F}, \tilde{g}) \in L^2(D)^3 \times L^2(\Gamma)^3$, які задовольняють умовам

$$\int_D (Q_1(\widetilde{F} - F_0)(x), (\widetilde{F} - F_0)(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx +$$
$$+\int_\Gamma (Q_2(\tilde{g} - g_0), \tilde{g} - g_0)_{\mathbb{R}^3}\,d\Gamma \le 1, \qquad (8)$$
$$\int_D (\widetilde{F}, r)_{\mathbb{R}^3}\,dx + \int_\Gamma (\tilde{g}, r)_{\mathbb{R}^3}\,d\Gamma = 0,\ \forall r \in \mathcal{RB},$$

а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\omega) \in L^2(\Omega, H_0),$ з нульовими середніми, які задовольняють нерівності $\mathbb{E}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \le 1,$ де Q_0, Q_1, Q_2 — обмежені самоспряжені додатньо-визначені оператори в H_0, $L^2(D)^3$, $L^2(\Gamma)^3$ відповідно, для яких існують обежені обернені оператори $Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$, $\widetilde{F}_0 \in L^2(D)^3$ і $\tilde{g}_0 \in L^2(\Gamma)^3$ — задані функції, які задовольняють умовам (6).

Означення 1. Оцінку вигляду

$$\widehat{\widehat{l(u)}} = (y(u;\eta), \widehat{w})_{H_0} + \widehat{c} \tag{9}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(u)$, якщо елемент $\widehat{w}$ і число $\widehat{c}$ визначаються з умови

$$\sigma(w,c) := \sup_{(\widetilde{F},\tilde{g})\in G_0, \tilde{\eta}\in G_1} \mathbb{E}\,| l(\tilde{u}) - \widehat{l(\tilde{u})}|^2 \to \inf_{w\in H_0, c\in\mathbb{R}} := \sigma^2,$$

де $\widehat{l(\tilde{u})} = (\tilde{y}, w)_{H_0} + c$, $\tilde{y} = C\tilde{u} + \tilde{\eta}$, $\tilde{u}$ — будь-який розв'язок крайової задачі (4) при $F = \widetilde{F}$, $g = \tilde{g}$. Величину σ будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(u)$.

Основний результат. Покладемо

$$U := \{w \in H_0 : \int_D (l_0(x) - (C^* \Lambda_{H_0} w)(x), r(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx = 0,\ \forall r \in \mathcal{RB}\},$$

де $C^* : H_{0'} \to L_2(D)^3$ — оператор, спряжений до C, який визначається співвідношенням

$$< Cv, \varphi >_{H_0 \times H_{0'}} = \int_D (v(x), C^*\varphi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

для всіх $v \in L^2(D)^3$, $\varphi \in H_{0'}$, і при кожному фіксованому $w \in U$ введемо функцію $z(\cdot; w) \in H^1(D)^3$ як єдиний розв'язок такої варіаційної задачі

$$\begin{aligned}&\int_D (2\mu\varepsilon(v) : \varepsilon(z(\cdot;w)) + \lambda\, div\, v\, div\, z(\cdot;w))dx = \\ &= \int_D (l_0(x) - (C^*\Lambda_{H_0} w)(x), v(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx \ \ \forall v \in H^1(D)^3,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\int_D (Q_1^{-1} \mathrm{z}(x;w), \mathrm{r}_i(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathrm{z}(\cdot;w)), \mathrm{r}_i)_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma = 0,\ i = \overline{1,6}. \tag{11}$$

Відмітимо, що задача (10)–(11), в силу умов сумісності (6), в яких покладено $F(x) = l_0(x) - (C^*\Lambda_{H_0} w)(x)$, $g = 0$, однозначно розв'язна при $w \in U$.

Теорема 1. Задача знаходження мінімаксної оцінки значень функціоналу $l(u)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується варіаційною крайовою задачею (10), (11) з функцією вартості вигляду

$$\begin{aligned}I(w) = &\int_D (Q_1^{-1}\mathrm{z}(x;w), \mathrm{z}(x;w))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \\ &+ \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathrm{z}(\cdot;w), \mathrm{z}(\cdot;w))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma + (Q_0^{-1}w, w)_{H_0} \to \inf_{w\in U}.\end{aligned} \tag{12}$$

Доведення. Позначимо через $\tilde{u}_{\perp}$ єдиний роз'язок задачі (4) при $F(x)=\widetilde{F}(x)$, $g=\tilde{g}$, який ортогональний до всіх функцій з множини $\mathcal{RB}$.

Тоді, оскільки будь-який розв'язок ũ цієї задачі можно представити у вигляді $\tilde{u}=\tilde{u}_{\perp}+u_0$, де $u_0\in\mathcal{RB}$, для будь-якого $w\in H_0$, враховуючи означення 1, маємо

$$\widehat{l(\tilde{u})}=(\tilde{y},w)_{H_0}+c=(C(\tilde{u}_{\perp}+u_0,w)_{H_0}+(\tilde{\eta},w)_{H_0}+c=$$
$$=<C(\tilde{u}_{\perp}+u_0),\Lambda_{H_0}w>_{H_0\times H_{0'}}+(\tilde{\eta},w)_{H_0}+c=$$
$$=\int_D(\tilde{u}_{\perp}(x)+u_0(x),(C^*\Lambda_{H_0}w)(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx+(\tilde{\eta},w)_{H_0}+c=$$
$$=\int_D(\tilde{u}_{\perp}(x),(C^*\Lambda_{H_0}w)(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx+$$
$$+\int_D(u_0(x),(C^*\Lambda_{H_0}w)(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx+(\tilde{\eta},w)_{H_0}+c,$$

звідки

$$l(\tilde{u})-\widehat{l(\tilde{u})}=$$
$$=\int_D(l_0(x)-(C^*\Lambda_{H_0}w)(x),\tilde{u}_{\perp}(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx-$$
$$-\int_D(l_0(x)-(C^*\Lambda_{H_0}w)(x),u_0(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx-(\tilde{\eta},w)_{H_0}-c.$$

Звідси, беручи до уваги співвідношення

$$\mathbb{D}\xi=\mathbb{E}\,|\,\xi-\mathbb{E}\xi\,|^2=\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2 \tag{13}$$

між дисперсією $\mathbb{D}\xi$ випадкової величини ξ і її математичним сподіванням $\mathbb{E}\xi$, знаходимо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|l(\tilde{u})-\widehat{l(\tilde{u})}\right|^2&=\Big|\int_D(l_0(x)-(C^*\Lambda_{H_0}w)(x),\tilde{u}_{\perp}(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx-\\&-\int_D(l_0(x)-(C^*\Lambda_{H_0}w)(x),u_0(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx-c\,\Big|^2+\mathbb{E}\,|\,(\tilde{\eta},w)_{H_0}\,|^2.\end{aligned} \tag{14}$$

Оскільки функція $u_0(x)$ під знаком останнього інтеграла в правій частині цієї рівності пробігає весь простір $\mathcal{RB}$, то величина $\mathbb{E}\left|l(\tilde{u})-\widehat{l(\tilde{u})}\right|^2$ буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли $w\in U$.

Поклавши тепер в тотожності (10) $v(x)=\tilde{u}_{\perp}(x)$, маємо

$$\int_D\left(2\mu\varepsilon(z(\cdot;w)):\varepsilon(\tilde{u}_{\perp})+\lambda\ div\,z(\cdot;w)\ div\,\tilde{u}_{\perp}\right)dx=$$
$$=\int_D(l_0(x)-(C^*\Lambda_{H_0}w)(x),\tilde{u}_{\perp}(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx$$

З іншого боку, оскільки для функції $\tilde{u}_{\perp}$ виконується інтегральна тотожність (5) при $F = \widetilde{F}$, $g = \tilde{g}$, то, поклавши в цій тотожності $v = z(\cdot; w)$, знаходимо, що

$$\int_D \left(2\mu\varepsilon(z(\cdot; w)) : \varepsilon(\tilde{u}_{\perp}) + \lambda \ div\, z(\cdot; w) \ div\, \tilde{u}_{\perp}\right) dx = \\ = \int_D (z(x; w), \widetilde{F}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (z(\cdot; w), \tilde{g}(x))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma. \qquad (15)$$

Враховуючи, що ліві частини двох останніх рівностей співпадають, отримаємо що

$$\int_D (l_0(x) - (C^* \Lambda_{H_0} w)(x), \tilde{u}_{\perp}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx = \\ = \int_D (z(x; w), \widetilde{F}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (z(\cdot; w), \tilde{g}(x))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma.$$

Тому, в силу (14), маємо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}\, | l(\tilde{u}) - \widehat{l(\tilde{u})} |^2 = \\ = \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left| \int_D (z(x; w), \widetilde{F}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (z(\cdot; w), \tilde{g}(x))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma - c \right|^2 + \qquad (16) \\ + \sup_{\tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}\, | (\tilde{\eta}, w)_{H_0} |^2 .$$

Звідси, з (8) та узагальненої нерівності Коші-Буняковського, після елементарних обчислень, знаходимо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{F} \in G_0,} \left| \int_D (z(x; w), \widetilde{F}(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (z(\cdot; w), \tilde{g}(x))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma - c \right|^2 = \\ = \int_D (Q_1^{-1} z(\cdot; w)(x), z(x; w))_{\mathbb{R}^3}\, dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}(z(\cdot; w)), z(\cdot; w))_{\mathbb{R}^3}\, d\Gamma \qquad (17)$$

при

$$c = \int_D (z(x; w), F_0(x))_{R^3}\, dx + \int_\Gamma (z(\cdot; w), g_0)_{R^3}\, d\Gamma.$$

Аналогічно, обчислюючи другий доданок в правій частині (16), одержимо $\sup_{\tilde{\eta} \in G_1} \mathbb{E}\, | (\tilde{\eta}, w)_{H_0} |^2 = (Q_0^{-1} w, w)_{H_0}$. Звідси та з (16) прийдемо до твердження теореми. **Теорему доведено.**

Висновок. У статті встановлено еквівалентність задачі мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів від розв'язків рівнянь лінійної теорії пружності с крайовими умовами типу Неймана певній задачі оптимального керування. Отримані результати можуть бути використані при розробці методів знаходження гарантованих оцінок станів систем, що описуються диференціальними рівняннями, розв'язки яких не є єдиними і існують лише тоді, коли виконуються певні умови сумісності.

Список використаних джерел:

4. Наконечный А. Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах / А. Г. Наконечный — К. : КГУ, 1985. — 82 с.
5. Подлипенко Ю. К. Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типа Неймана / Ю. К. Подлипенко, А. С. Перцов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія:фізико-математичні науки. — 2008. — Вип. 4. — С. 153–160.
6. Наконечний О. Г. Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана / О. Г. Наконечний, Ю. К. Подлипенко, А. С. Перцов // Доповіді НАН України. — 2010. — №2. — с. 43–50.
7. Toselli A. Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund — Berlin ; Heidelberg ; New-York : Springer, 1972. — 450 p.
8. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида — М. : Мир, 1967. — 624 с.

We reduce the problem of minimax estimation of unknown solutions to the boundary value problems for equations of linear elasticity to some optimal control problem under the assumption that unknown deterministic data of these problems as well as the statistical characteristics of noises in observations, are subjected to certain quadratic restrictions.

Key words: *boundary value problems for linear elasticity equation, minimax estimates, observations, systems of variational equations.*

Отримано: 24.03.2015