УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ, ЗАДАНОЇ НЕТОЧНО З ДОПОМОГОЮ ОПУКЛОЗНАЧНОГО БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою опуклозначного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *найкраще у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірне відновлення; функціональна залежність, задана неточно; опуклозначне багатозначне відображення; екстремальний елемент; необхідні, достатні умови, критерій екстремальності елемента.*

Вступ. У статті для задачі найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою опуклозначного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для цієї задачі.

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — локально опуклий лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел топологічний простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір неперервних однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, $O(X)$ — сукупність опуклих обмежених замкнених множин простору X, $\underset{\sim}{C}(S,O(X))$ — множина багатозначних неперервних знизу на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = O_s \in O(X)$, $a \in \underset{\sim}{C}(S,O(X))$, $V \subset C(S,X)$, $\{p_s\}_{s \in S}$ — сім'я неперервних на X опуклих функцій таких, що відображення $(s,x) \in S \times X \to p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*\left(\left\{p_s\right\}_{s\in S},V\right)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}p_s\left(g(s)-y\right), \tag{1}$$

яку будемо називати задачею найкращого у розумінні сім'ї $\left\{p_s\right\}_{s\in S}$ рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою багатозначного відображення a, елементами множини V неперервних однозначних відображень g компакта S в X.

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*\left(\left\{p_s\right\}_{s\in S},V\right)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}p_s\left(g(s)-y\right)=\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}p_s\left(g^*(s)-y\right),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. В багатьох практичних задачах функціональні залежності, які характеризують досліджувані процеси, не означені точно, а лише відомо, що їх значення належать відповідним значенням деякого багатозначного відображення (знаходяться в деякому діапазоні можливих значень).

Робота з такими функціональними залежностями пов'язана з низкою труднощів.

У зв'язку з цим виникає проблема найкращого у деякому розумінні їх відновлення однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу.

Слід зазначити, що з середини шістдесятих років двадцятого століття задачам відновлення функціоналів приділяється велика увага (див., наприклад, [1–3]).

У роботі розглядається задача найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно на компакті S за допомогою півнеперервного знизу на цьому компакті опуклозначного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень.

Частковими випадками розглядуваної задачі є задача про відносну чебишовську точку системи опуклих обмежених замкнутих множин, які неперервно змінюються, задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою неперервного опуклозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень, основні результати дослідження яких встановлені у працях [4, 5] відповідно.

Результати загального характеру, отримані при дослідженні величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при побудові та обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв'язання цих задач.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремального елемента для величини (1).

Допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, X_R — простір, асоційований з простором X, тобто простір X розглядуваний лише над полем дійсних чисел, p — функція, задана на X і, отже, на X_R. Як відомо (див., наприклад, [6, с. 183]), функцією, спряженою з p, називається функція $p^*(\varphi) = \sup\limits_{x \in X_R} \left(\varphi(x) - p(x)\right)$, $\varphi \in X_R^*$.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $x_0 \in X$, якщо $p(x) - p(x_0) \geq \varphi(x - x_0), x \in X_R$. Множину субградієнтів функції p в точці $x \in X_R$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x і позначають $\partial p(x)$.

Множину $dom p^* = \left\{\varphi : \varphi \in X_R^*, p^*(\varphi) < \infty\right\}$ називається ефективною множиною функції p^*.

У подальших міркуваннях будемо припускати, що p – опукла неперервна на X функція, а F — опукла підмножина простору X.

Задачею найкращого у розумінні функції p наближення елемента x простору X множиною F будемо називати задачу відшукання величини

$$E_F^p(x) = \inf_{y \in F} p(x - y). \tag{2}$$

Величиною (2) задається на X деяка функція E_F^p: кожному $x \in X$ ставиться у відповідність $E_F^p(x)$. Назвемо цю функцію функцією найкращого у розумінні функції p наближення елементів простору X множиною F.

Твердження 1. Якщо функція E_F^p набуває скінченного значення у деякій точці $x_0 \in X$, то вона набуває скінченних значень у кожній точці простору X та є опуклою і неперервною на X.

Твердження 2. Для того щоб функція E_F^p набувала скінченних значень на X, необхідно і достатньо, щоб множина

$$M = \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in dom p^*, \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) < \infty \right\} \neq \varnothing.$$

Твердження 3. Якщо F — обмежена множина простору X, то E_F^p є дійснозначною неперервною та опуклою на X функцією.

Твердження 4. Для кожного $f \in X^*$ справедлива рівність

$$\left(E_F^p\right)^*\left(\operatorname{Re} f\right) = p^*\left(\operatorname{Re} f\right) + \sup_{y\in F} \operatorname{Re} f\left(y\right).$$

Твердження 5. Нехай $M = \varnothing$. Для будь-якого $x \in X$ має місце співвідношення двоїстості

$$E_F^p\left(x\right) = \inf_{y\in F} p\left(x-y\right) = \max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(x) - p^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in F} \operatorname{Re} f(y)\right),$$

справедлива рівність

$$\partial E_F^p\left(x\right) = \left\{\operatorname{Re} f : f \in X^*, \operatorname{Re} f(x) - p^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in F} \operatorname{Re} f(y) = \right.$$

$$\left. = \max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(x) - p^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in F} \operatorname{Re} f(y)\right)\right\}.$$

Еквівалентна форма подання задачі відшукання величини (1)

Теорема 1. Для будь-якого $g \in C\left(S, X\right)$ функція $s \in S \to$ $\to \inf_{y\in a(s)} p_s\left(g\left(s\right) - y\right) = E_{a(s)}^{p_s}\left(g\left(s\right)\right)$ є півнеперервною зверху на S.

Доведення. Згідно з твердженням 3 для $g \in C\left(S, X\right)$, $s \in S$ $E_{a(s)}^{p_s}\left(g\left(s\right)\right) \in R$. Переконаємося, що функція $s \in S \to E_{a(s)}^{p_s}\left(g\left(s\right)\right)$ є півнеперервною зверху на S.

Нехай $s_0 \in S$, $A \in R$ та $E_{a(s_0)}^{p_{s_0}}\left(g\left(s_0\right)\right) = \inf_{y\in a(s_0)} p_{s_0}\left(g\left(s_0\right) - y\right) < A$.

Тоді існує $y_{s_0} \in a\left(s_0\right)$ таке, що $p_{s_0}\left(g\left(s_0\right) - y_{s_0}\right) < A$.

Оскільки за умовою відображення $\left(s, x\right) \in S \times X \to p_s\left(x\right)$ півнеперервне зверху на $S \times X$, то існує окіл $O_1\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S, окіл $O\left(g\left(s_0\right) - y_{s_0}\right)$ точки $g\left(s_0\right) - y_{s_0}$ простору X такі, що

$$p_s\left(z\right) < A,\ s \in O_1\left(s_0\right),\ z \in O\left(g\left(s_0\right) - y_{s_0}\right). \quad (3)$$

Оскільки операція віднімання елементів простору X є неперервною, то існує окіл $O\left(g\left(s_0\right)\right)$ точки $g\left(s_0\right)$ та окіл $O\left(y_{s_0}\right)$ точки y_{s_0} цього простору такі, що $O\left(g\left(s_0\right)\right) - O\left(y_{s_0}\right) \subset O\left(g\left(s_0\right) - y_{s_0}\right)$.

Звідси та з співвідношення (3) випливає, що

$$p_s\left(\gamma - y\right) < A\,,\ \gamma \in O\Big(g\left(s_0\right)\Big),\ y \in O\Big(y_{s_0}\Big), s \in O_1\left(s_0\right). \qquad (4)$$

Оскільки $g \in C\left(S, X\right)$, то для $O\Big(g\left(s_0\right)\Big)$ існує окіл $O_2\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S такий, що

$$g\left(s\right) \in O\Big(g\left(s_0\right)\Big),\ s \in O_2\left(s_0\right). \qquad (5)$$

Покладемо $O_3\left(s_0\right) = O_1\left(s_0\right) \cap O_2\left(s_0\right)$.

Внаслідок (4), (5)

$$p_s\Big(g\left(s\right) - y\Big) < A\,,\ s \in O_3\left(s_0\right),\ y \in O\Big(y_{s_0}\Big). \qquad (6)$$

Оскільки $a \in \underset{\sim}{C}\Big(S, O\left(X\right)\Big)$ та $a\left(s_0\right) \cap O\Big(y_{s_0}\Big) \neq \varnothing$, адже $y_{s_0} \in a\left(s_0\right)$, то існує окіл $O_4\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S такий, що $a\left(s\right) \cap O\Big(y_{s_0}\Big) \neq \varnothing$ для всіх $s \in O_4\left(s_0\right)$. Покладемо $O\left(s_0\right) = O_3\left(s_0\right) \cap O_4\left(s_0\right)$. Тоді для кожного $s \in O\left(s_0\right)$ існує $y_s \in a\left(s\right) \cap O\Big(y_{s_0}\Big)$. Тому (див. (6))

$$p_s\Big(g\left(s\right) - y_s\Big) < A\,,\ s \in O\left(s_0\right).$$

Звідси випливає, що

$$E^{p_s}_{a(s)}\Big(g\left(s\right)\Big) = \inf_{y \in a(s)} p_s\Big(g\left(s\right) - y\Big) < A\,,\ s \in O\left(s_0\right).$$

Це й означає, що функція $s \in S \to E^{p_s}_{a(s)}\Big(g\left(s\right)\Big)$ є півнеперервною зверху в точці $s_0 \in S$. Оскільки s_0 вибрано довільно з S, то ця функція є півнеперервною зверху на S.

Теорему доведено.

З урахування теореми 1 та узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [6, с. 23]) задачу відшукання величини (1) можна подати у такому вигляді

$$\alpha^*_a\Big(\left\{p_s\right\}_{s \in S}, V\Big) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s\Big(g\left(s\right) - y\Big) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} E^{p_s}_{a(s)}\Big(g\left(s\right)\Big). \qquad (7)$$

Опуклість цільової функції задачі відшукання величини (7) та її похідна за напрямом. Нехай φ задана на лінійному (дійсному або комплексному) просторі Y опукла функція. Через $\varphi'\left(x, y\right)$ будемо позначати похідну функції φ в точці $x \in Y$ за напрямком $y \in Y$.

Для $s \in S$ позначимо через

$$\Phi^s_a\left(g\right) = \inf_{y \in a(s)} p_s\Big(g\left(s\right) - y\Big) = E^{p_s}_{a(s)}\Big(g\left(s\right)\Big),\ g \in C\left(S, X\right).$$

Функцію
$$\Phi_a(g)=\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)} p_s\left(g(s)-y\right)=\max_{s\in S}E^{p_s}_{a(s)}\left(g(s)\right)=\max_{s\in S}\Phi^s_a(g),$$
$$g\in C(S,X),$$
будемо називати цільовою функцією задачі відшукання величини (7).

Твердження 6. Для кожного $s\in S$ функція $\Phi^s_a(g)$, $g\in C(S,X)$, є опуклою на $C(S,X)$.

Доведення. Візьмемо довільні $g_1,g_2\in C(S,X)$, $\alpha\in[0,1]$. З урахуванням твердження 3 маємо, що
$$\Phi^s_a\left((1-\alpha)g_1+\alpha g_2\right)=E^{p_s}_{a(s)}\left(\left((1-\alpha)g_1+\alpha g_2\right)(s)\right)=$$
$$=E^{p_s}_{a(s)}\left((1-\alpha)g_1(s)+\alpha g_2(s)\right)\le(1-\alpha)E^{p_s}_{a(s)}\left(g_1(s)\right)+\alpha E^{p_s}_{a(s)}\left(g_2(s)\right)=$$
$$=(1-\alpha)\Phi^s_a(g_1)+\alpha\Phi^s_a(g_2).$$

Це й означає, що функція $\Phi^s_a(g)$ є опуклою на $C(S,X)$.

Твердження доведено.

Для $g^*\in C(S,X)$ покладемо
$$S_a\left(g^*\right)=\Big\{s:s\in S,\Phi_a\left(g^*\right)=\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}p_s\left(g^*(s)-y\right)=$$
$$=\max_{s\in S}E^{p_s}_{a(s)}\left(g^*(s)\right)=\max_{s\in S}\Phi^s_a\left(g^*\right)\Big\}.$$

Теорема 2. Цільова функція Φ_a задачі відшукання величини (7) є опуклою на $C(S,X)$. Якщо $g^*,z\in C(S,X)$, то справедлива рівність
$$\Phi'_a\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\ \max_{\varphi\in\partial E^{p_s}_{a(s)}\left(g^*(s)\right)}\varphi\left(z(s)\right). \tag{8}$$

Доведення. Оскільки функція Φ_a є верхньою межею функцій Φ^s_a, $s\in S$, кожна з яких є опуклою на $C(S,X)$ (див. твердження 6), то вона є опуклою функцією на $C(S,X)$ (див., наприклад, [6, с.180]).

Нехай $g^*,z\in C(S,X)$. Маємо, що для кожного $g\in C(S,X)$
$$\Phi_a(g)=\max_{s\in S}\Phi^s_a(g)=\max_{s\in S}E^{p_s}_{a(s)}\left(g(s)\right).$$

Оскільки S — компакт, $C(S,X)$ — лінійний простір над полем дійсних чисел, $\left\{\Phi^s_a\right\}_{s\in S}$ — сім’я заданих на $C(S,X)$ опуклих функцій (див. твердження 6), для кожного $g \in C(S, X)$ відображення $s \in S \to \Phi_a^s(g) = E_{a(s)}^{p_s}(g(s))$ півнеперервне зверху на S (див. теорему 1), то згідно з теоремою 1 [5]

$$\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right) = \max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \left(\Phi_a^s\right)^{/}\left(g^*, z\right). \tag{9}$$

Оскільки для $s \in S$ Φ_a^s є опуклою та неперервною на $C(S, X)$ функцією, то має місце рівність

$$\begin{gathered}\left(\Phi_a^s\right)^{/}\left(g^*, z\right) = \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{\Phi_a^s\left(g^* + tz\right) - \Phi_a^s\left(g^*\right)}{t} = \\ = \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{E_{a(s)}^{p_s}\left(g^*(s) + tz(s)\right) - E_{a(s)}^{p_s}\left(g^*(s)\right)}{t} = \left(E_{a(s)}^{p_s}\right)^{/}\left(g^*(s), z(s)\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Оскільки для $s \in S$ функція $x \in X \to E_{a(s)}^{p_s}(x)$ є опуклою та неперервною на X (див. твердження 3), то має місце рівність

$$E_{a(s)}^{p_s\,/}\left(g^*(s), z(s)\right) = \max_{\varphi \in \partial E_{a(s)}^{p_s}\left(g^*(s)\right)} \varphi\left(z(s)\right) \tag{11}$$

(див., наприклад, [7, с.318]).

З урахуванням (9)–(11) робимо висновок про справедливість рівності (8).

Теорему доведено.

Необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для величини (8). Для $g^* \in V$ позначимо через

$$K\left(V, g^*\right) = \left\{z \in C(S, X) : (\forall \varepsilon > 0)\left(\exists t_\varepsilon \in (0, \varepsilon)\right) g^* + t_\varepsilon z \in V\right\}.$$

Зрозуміло, що $K\left(V, g^*\right)$ є конусом простору $C(S, X)$ з вершиною у точці 0.

Теорема 3. Нехай V — довільна множина простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (7), необхідно, щоб для всіх $z \in K\left(V, g^*\right)$ існували елементи $s_z \in S$, $f_z \in X^*$ такі, що

$$\Phi_a\left(g^*\right) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s\left(g^*(s) - y\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{y\in a(s_z)} p_{s_z}\left(g^*\left(s_z\right)-y\right) = E^{p_{s_z}}_{a(s_z)}\left(g^*\left(s_z\right)\right) = \\
&= \max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f(y)\right) = \\
&= \operatorname{Re} f_z(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f_z\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f_z(y),
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right) \ge 0 . \tag{13}
$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (7), $z \in K\left(V, g^*\right)$, $\varepsilon_k > 0$, $k \in N$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Тоді існують числа $t_k \in \left(0, \varepsilon_k\right)$, $k \in N$, такі, що $g^* + t_k z \in V$, $k \in N$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$.

Оскільки $\Phi_a\left(g^* + t_k z\right) \ge \Phi_a\left(g^*\right)$, то

$$
\Phi'_a\left(g^*, z\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Phi_a\left(g^* + t_k z\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{t_k} \ge 0 . \tag{14}
$$

Згідно з теоремою 2

$$
\Phi'_a\left(g^*, z\right) = \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{\varphi\in\partial E^{p_s}_{a(s)}\left(g^*(s)\right)} \varphi\left(z\left(s\right)\right). \tag{15}
$$

Нехай $s_z \in S_a\left(g^*\right)$, $\varphi_z \in \partial E^{p_{s_z}}_{a(s_z)}\left(g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що

$$
\begin{aligned}
\Phi'_a\left(g^*, z\right) &= \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{\varphi\in\partial E^{p_s}_{a(s)}\left(g^*(s)\right)} \varphi\left(z\left(s\right)\right) = \\
&= \max_{\varphi\in\partial E^{p_{s_z}}_{a(s_z)}\left(g^*(s_z)\right)} \varphi\left(z\left(s_z\right)\right) = \varphi_z\left(z\left(s_z\right)\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Внаслідок твердження 5 існує функціонал $f_z \in X^*$ такий, що

$$
\varphi_z = \operatorname{Re} f_z , \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f(y)\right) = \\
&= \operatorname{Re} f_z(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f_z\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f_z(y).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Оскільки $s_z \in S_a\left(g^*\right) \subset S$, $f_z \in X^*$, то з урахуванням твердження 5, співвідношень (14)–(18) робимо висновок, що

$$
\Phi_a\left(g^*\right) = \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} p_s\left(g^*(s) - y\right) =
$$

$$= \inf_{y\in a(s_z)} p_{s_z}\left(g^*(s_z)-y\right) = E_{a(s_z)}^{p_{s_z}}\left(g^*\left(s_z\right)\right) =$$

$$= \max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f(y)\right) =$$

$$= \operatorname{Re} f_z(g^*\left(s_z\right)) - p_{s_z}{}^*\left(\operatorname{Re} f_z\right) - \sup_{y\in a(s_z)} \operatorname{Re} f_z(y),$$

$$\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right) \geq 0.$$

Отже, співвідношення (12), (13) встановлено.
Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S,X\right)$, $g^*\in V$. Якщо для кожного елемента $g\in V$ існують елементи $s_g\in S_a\left(g^*\right)$, $f_g\in X^*$ такі, що

$$\begin{aligned}
&\Phi_a\left(g^*\right) = \max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)} p_s\left(g^*(s)-y\right) = \\
&= \max_{s\in S} E_{a(s)}^{p_s}\left(g^*(s)\right) = \inf_{y\in a(s_z)} p_{s_z}\left(g^*(s_z)-y\right) = \\
&= E_{a(s_g)}^{p_{s_g}}\left(g^*(s_g)\right) = \max_{f\in X^*}\left(\operatorname{Re} f(g^*(s_g)) - p_{s_g}{}^*\left(\operatorname{Re} f\right) - \sup_{y\in a(s_g)} \operatorname{Re} f(y)\right) = \\
&= \operatorname{Re} f_g(g^*(s_g)) - p_{s_g}{}^*\left(\operatorname{Re} f_g\right) - \sup_{y\in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)-g^*\left(s_g\right)\right) \geq 0, \tag{20}$$

то g^* є екстремальним елементом для величини (7).

Доведення. Нехай для кожного $g\in V$ існують елементи $s_g\in S_a\left(g^*\right)$, $f_g\in X^*$, для яких мають місце співвідношення (19), (20).

Зі співвідношень (19) та твердження 5 випливає, що $s_g\in S_a\left(g^*\right)$, $\operatorname{Re} f_g\in\partial E_{a\left(s_g\right)}^{p_{s_g}}\left(g^*\left(s_g\right)\right)$.

З урахуванням цього, рівності (8) та нерівності (20) отримаємо, що

$$\begin{aligned}
&\Phi_a'\left(g^*, g-g^*\right) \geq \max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\ \max_{\varphi\in\partial E_{a(s)}^{p_s}\left(g^*(s)\right)} \varphi\left(g\left(s\right)-g^*\left(s\right)\right) \geq \\
&\geq \max_{\varphi\in\partial E_{a\left(s_g\right)}^{p_{s_g}}\left(g^*\left(s_g\right)\right)} \varphi\left(g\left(s_g\right)-g^*\left(s_g\right)\right) \geq \operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)-g^*\left(s_g\right)\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Оскільки функція $\Phi_a^s\left(g\right)$, $g\in C\left(S,X\right)$, є опуклою на $C\left(S,X\right)$ (див. твердження 2), то

$$\Phi'_a\left(g^*, g-g^*\right) \le \frac{\Phi_a\left(g^*+1\left(g-g^*\right)\right)-\Phi_a\left(g^*\right)}{1} = \Phi_a\left(g\right)-\Phi_a\left(g^*\right).$$

Звідси і з (21) випливає, що для всіх $g \in V$ $\Phi_a\left(g\right)-\Phi_a\left(g^*\right) \ge 0$. Тому $\Phi_a\left(g\right) \ge \Phi_a\left(g^*\right)$, $g \in V$. Тобто

$$\max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} p_s\left(g(s)-y\right) \ge \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} p_s\left(g^*(s)-y\right), \; g \in V .$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (7).

Теорему доведено.

Становлять інтерес множини, для яких сформульована в теоремі 4 умови є не лише достатніми, а й необхідними умовами екстремальності елемента для величини (7).

Множину V простору $C\left(S, X\right)$ будемо називати Γ — множиною відносно точки $g^* \in V$, якщо $g-g^* \in K\left(V, g^*\right)$ для всіх $g \in V$. Зрозуміло, що до Γ — множин відносно точки $g^* \in V$ відносяться, зокрема, зіркові відносно g^*, в тому числі й опуклі множини.

Теорема 5. Нехай V є Γ — множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (7), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a(g^*)$, $f_g \in X^*$ такі, для яких виконуються умови (19), (20).

Необхідність умов теореми випливає з теореми 3, а їх достатність встановлено в теоремі 4.

Наслідок 1. Нехай V — підпростір простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (7), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $f_g \in X^*$ такі, для яких виконуються умова (19) та

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \ge 0 . \qquad (22)$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (7). Для елемента $g \in V$ маємо, що $g^* + g \in V$. Тоді згідно з теоремою 5 існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $f_g \in X^*$ такі, для яких виконуються умова (19) та

$$\operatorname{Re} f_g\left(\left(g+g^*\right)\left(s_g\right)-g^*\left(s_g\right)\right)=\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right)\geq 0 .$$

Навпаки, нехай для будь-якого $g\in V$ мають місце умови наслідку. Візьмемо $g\in V$ і покладемо в (22) замість g елемент $g-g^*\in V$. Тоді одержимо, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)-g^*\left(s_g\right)\right)\geq 0$.

Внаслідок теореми 5 g^* є екстремальним елементом для величини (7).

Наслідок доведено.

Висновок. Для задачі найкращого у розумінні у розумінні сім’ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою півнеперервного знизу опуклозначного багатозначного відображення, елементами множини неперервних однозначних відображень отримано необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для цієї задачі.

Встановлено деякі допоміжні твердження, які становлять також самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В. Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Вып. 189. — С. 3–20.
2. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным/ Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991. — Вып. 50, №6. — С. 85–93.
3. Магарил-Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения/ Г. Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.
4. Гнатюк Ю. В. Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 2010. — Вип. 63, № 7. — С. 889–903.
5. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 37–55.
6. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
7. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.

The necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element for the problem of the best at sense of of the family convex functions of uniform reconstitution of the functional dependence that is defined inaccurately by means of the convex-valued compact-valued maps by elements of the set of single-valued maps are proved in the article.

Key words: *the best at sense of the family convex functions of uniform reconstitution; the functional dependence that is defined inaccuratel; the convex-valued compact-valued maps; the extremal element; the necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element.*

Отримано: 14.04.2016

УДК 004.94

А. Я. Карвацький, д-р техн. наук, професор
А. Ю. Педченко, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ CAD-СИСТЕМ

Наведено методику й алгоритм розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти методом скінченних елементів (МСЕ). На базі програмного забезпечення Mathcad розроблено авторський програмний код для розв'язання поставленої задачі, за результатами виконання якого проведено порівняльний аналіз з даними точних розв'язків та з результатами числових розв'язків, отриманими за допомогою програмних продуктів Matlab.

Ключові слова: *моделювання теплових процесів, метод скінченних елементів, апроксимація, Mathcad, лінеаризація.*

Вступ. Проблема розв'язання нелінійних задач теплопровідності залишається актуальною і на сьогоднішній день. А зі збільшенням питомої потужності технічних об'єктів, у зв'язку із мініатюризацією пристроїв, дослідженням нових теплопровідних матеріалів стає ще більш актуальною, оскільки, надійність та енергоефективність таких об'єктів визначається ще на етапі їх проектування [1].

Для розв'язання задач теплопровідності найбільшого поширення в наш час отримали системи, що використовують засоби комп'ютерного інжинірингу, які вимагають зазвичай значних обчислювальних потужностей [2]. Тому доцільним є розробка в середовищі Mathcad раціональних методик та наочних алгоритмів числового розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності зі значною температурною залежністю теплофізичних властивостей.

Постановка задачі. Рівняння нелінійної нестаціонарної теплопровідності ізотропного середовища з внутрішніми джерелами теплоти можна записати у вигляді