УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
Ю. І. Першина, д-р. фіз.-мат. наук,
О. Д. Пташний, канд. пед. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Розроблено та досліджено метод знаходження точок розриву та ε-розриву першого роду білінійної функції двох змінних, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним білінійним сплайном. Доведено теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття ε-неперервності функції двох змінних. На його основі розроблено алгоритм виявлення розривів першого роду білінійної функції двох змінних, використовуючи розривний апроксимаційний білінійний сплайн. Розглянуто приклад, який підтверджує ефективність запропонованого методу. Також розглянуто перспективи подальших досліджень

Ключові слова: *розривна білінійна інтерполяція, розривна білінійна апроксимація,* ε*-розрив.*

Вступ. Існує багато практичних важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що терплять розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. Так, в дефектоскопії виявлення тріщин у промислових виробах за допомогою неруйнівного контролю також є важливою задачею, як й визначення відхилень внутрішньої будови виробу від еталону. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

До теперішнього часу в томографії розроблено багато обчислювальних методів, алгоритмів та програмних засобів, направлених на відновлення внутрішніх властивостей об'єкта. Вони добре себе проявляють при відновленні об'єктів з гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів з розривними характеристиками.

Тому виникає необхідність створення теорії наближення розривних функцій та методів виявлення точок та ліній розриву функцій для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність — лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Для того, щоб розв'язувати широке коло наукових та технічних задач, корисні рівномірні наближення негладкими та розривними функціями. В роботах Попова Б. Я. [1] та його учнів досліджуються наближення неперервних функцій за допомогою розривних сплайнів в чебишевській нормі. В роботах Литвина О. М. [2] та його учнів досліджувалося питання наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями.

Для моделювання складних гладких фізичних явищ в якості потужної обчислювальної техніки використовуються Фур'є — спектральні методи [3]. Їх швидкість збіжності залежить від гладкості та періодичності функції в досліджуваній області. Якщо функція має розрив хоча б в одній точці, швидкість збіжності погіршується та поряд з розривами розвиваються коливання. Така поведінка називається явищем Гібса. Тобто, якщо функція є розривною, то її ряд Фур'є не є гарним наближенням функції. В роботі [4] використовуються фільтри у розклади Фур'є розривних функцій. Але фільтрація не повністю знищує явище Гібса.

У роботах [5] досліджується розривний метод Гальоркіна високого порядку. На відміну від класичного методу Гальоркіна, розривний метод апроксимує розривний розв'язок функціями, розривними на границях розрахункової сітки.

У роботах [6–7] запропоновані та дослідженні математичні моделі (нові класи крайових задач з розривними розв'язками), що описують процеси в неоднорідних середовищах з тонкими включеннями-тріщинами.

У роботах [8–10] авторами запропонований, обгрунтований та досліджений метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε-розриву. В роботі [11] представлений алгоритм виявлення ліній ε-розриву функцій двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів.

У статті пропонується обгрунтування цього методу у вигляді теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення ліній ε -розриву.

Постановка задачі. Нехай задана білінійна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_1<x_2<\ldots<x_m=1$, $0=y_1<y_2<\ldots<y_n=1$. Причому розташування ліній розриву функції $f(x,y)$ невідоме. В якості експериментальних даних будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x,y)$ у кутах заданої прямокутної сітки

$$C_{i,j}^{++}=f(x_i+0,y_i+0)\,,\ C_{i,j}^{-+}=f(x_i-0,y_j+0)\,,$$

$$C_{i,j}^{+-}=f(x_i+0,y_j-0)\,,\ C_{i,j}^{--}=f(x_i-0,y_i-0)\,.$$

Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної білінійної функції $f(x,y)$ та виявити лінії ε-розриву.

Метод виявлення ліній ε-розриву. Перенумеруємо задані значення матриці C як показано на рис. 1 (на прикладі *i*-ого прямокутного елемента).

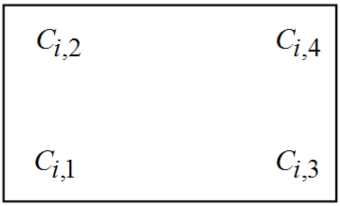

***Рис. 1.** Формування матриці невідомих значень розривної функції в i-ому прямокутному елементі*

Тобто в якості вхідних даних виступає матриця значень $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1,n\cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$ розривної функції $f(x,y)$, де p — номер прямокутного елемента, що розглядається.

Для подальшого викладення введемо поняття ε-неперевності функції.

Визначення 1. Якщо $\left|f(x_q+0,y)-f(x_q-0,y)\right|<\varepsilon,\ \forall y$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-непрервною на лінії $x=x_q$, аналогічно, якщо $\left|f(x,y_s+0)-f(x,y_s-0)\right|<\varepsilon,\ \forall x$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-непрервню на лінії $y=y_s$.

Визначення 2. Якщо виконуються всі чотири нерівності з визначення 1 в точці (x_q,y_s)

$$\left|f(x_q+0,y_s+0)-f(x_q-0,y_s+0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q+0,y_s+0)-f(x_q+0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q-0,y_s+0)-f(x_q-0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q-0,y_s-0)-f(x_q+0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-неперервною в точці (x_q,y_s).

Визначення 3. Якщо $f(x,y)$ є ε-неперервною $\forall(x,y)\in\Pi_{i,j}$, то будемо її називати ε-неперервною в усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Розглянемо випадок виявлення ліній розриву білінійної розривної функції.

Теорема 1. Якщо $f(x,y)\in C^{-1}[0;1]^2$ має одну точку розриву першого роду $x^*=\dfrac{m}{2^k}, y^*=\dfrac{p}{2^k} m,k,p\in N$, $m<2^k$, $p<2^k$, то можна її виявити за не більше ніж k ітерацій.

Доведення. Нехай $k=1,\ \ell=1$. Для визначеності будемо вважати $m=1,\ p=1$, тобто $x^*=\dfrac{1}{2},\ y^*=\dfrac{1}{2}$.

Ітерація 1. В якості вузлів розривного білінійного сплайну $S(x)$ вибираємо рівномірно розташовані вузли $x_0=0,\ x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=1,\ y_0=0,\ y_1=\dfrac{1}{2}, y_2=1$, тобто розбиваємо область визначення функції на прямокутні елементи $\Pi_{ij},\ j,i=0,1,2$.

Будуємо розривний білінійний сплайн за формулою

$$S(x,y)=p_{ij}(x,y)=C^{++}_{i,j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$
$$+C^{-+}_{i+1,j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C^{+-}_{i,j+1}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+ \qquad (1)$$
$$+C^{--}_{i+1,j+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},\ (x,y)\in\Pi_{ij}.$$

Для початкового наближення в якості параметрів $C^{\pm}_k$ візьмемо односторонні значення функції $f(x)$ у потрібних вузлах.

Для знаходження параметрів використовуємо метод найменших квадратів в інтегральній формі. Випишемо функціонал, який треба мінімізувати

$$J(C)=\sum_{\Pi_{i,j}\subset D}\iint_{\Pi_{i,j}}\left[f(x,y)-S(x,y)\right]^2 dxdy \to \min_C,$$

$$J(C)=\int_0^1\int_0^1(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx=$$

$$=\iint_{\Pi_{11}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx+\iint_{\Pi_{12}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx+$$

$$+\iint_{\Pi_{21}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx+\iint_{\Pi_{22}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx,$$

$J(C)=0$, оскільки $f(x,y)$ кусково-білінійною розривною функцією і тому $f(x,y)-S(x,y)\equiv 0$.

Тобто, для випадку, коли розривна білінійна функція має одну точку розриву $x^*=1/2, y^*=1/2$, $k=1$, $\ell=1$, то для відновлення такої функції достатньо однієї ітерації.

Нехай $k=2, \ell=2$. Для визначеності будемо вважати $m=1$, $p=1$, тобто $x^*=1/2^2$, $y^*=1/2^2$.

Ітерація 2. При побудові сплайну $S(x,y)$ функціонал буде мати вигляд

$$J(C)=\int_0^1\int_0^1(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx=\iint_{\Pi_{11}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dx,$$

оскільки інші інтеграли дорівнюють нулю, бо $f\ (x,\ y)$ є білінійною неперервною функцією в прямокутному елементі Π_{11}.

Інтервал, на якому $J(C)\neq 0$ ділимо на рівні чотири частини, вводячи нові вузли $x=1/4,\ y=1/4$. Тобто маємо новий набір вузлів $x_0=0,\ x_1=1/2^2, x_2=1/2^1;\quad y_0=0,\ y_1=1/2^2, y_2=1/2^1$.. І повторюючи крок 1, отримаємо

$$J(C)=\iint_{\Pi_{11}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy=\int_0^{1/4}\int_0^{1/4}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+$$

$$+\int_0^{1/4}\int_{1/4}^{1/2}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+\int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/4}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+$$

$$+\int_{1/4}^{1/2}\int_{1/4}^{1/2}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy=0\ .$$

Аналогічний результат буде у випадку $m=3,\ k=2,\ \ p=3,\ \ell=2$.

Тобто для виявлення точки розриву $x^*=\dfrac{m}{2^k},\ k=2,\ y^*=\dfrac{p}{2^\ell}$, $\ell=2$ потрібні 2 ітерації.

Нехай для виявлення точки розриву $x^*=\dfrac{m}{2^k}, y^*=\dfrac{p}{2^\ell}, m=1$, $k=n,\ \ p=1,\ \ell=n$ потрібно n ітерацій, тобто на n-ій ітерації розривний сплайн $S(x,y)$ будуємо на сітці $x_0=0,\ x_1=\dfrac{1}{2^n},\ x_2=\dfrac{1}{2^{n-1}}$; $y_0=0,\ y_1=\dfrac{1}{2^n},\ y_2=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ і мінімізуючий функціонал має вигляд

$$J(C)=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy=0.$$

Доведемо, що для виявлення точки розриву $x^*=\dfrac{m}{2^k}, y^*=\dfrac{p}{2^\ell}$, $m=1,\ k=n+1,\ \ p=1,\ \ \ell=n+1$ потрібно $n+1$-ітерація. Для цього випадку функціонал має вигляд

$$J(C)=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy+\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy\neq 0\,,$$

оскільки $f(x)$ є білінійною неперервною функцією на всіх прямокутних елементах, крім того елементу, куди потрапила точка розриву.

Прямокутний елемент, на якому $J(C)\neq 0$ ділимо на рівні чотири частини, вводячи новий вузол $\left(\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ (тобто робимо $n+1$-у ітерацію) І будуючи на новій трійці вузлів $x_0=0,\ x_1=\dfrac{1}{2^{n+1}},\ x_2=\dfrac{1}{2^n}$ розривний сплайн, отримаємо $J(C)=0$, тому що точка $\left(\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ є точкою розриву.

Тобто розрив виявлено за $n+1$-у ітерацію.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо $f(x,y)\in C^{-1}[0;1]^2$ є кусково-білінійною функцією і має одну точку розриву першого роду (x^*,y^*), то виявити її можна за $k=\lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε. .

Доведення. Опишемо алгоритм виявлення точки ε-розриву.

Крок 1. Обираємо рівномірну сітку області $[0;1]^2$: $x_0=0$, $x_1=0.5$, $x_2=1$ і $y_0=0$, $y_1=0.5$, $y_2=1$. І будуємо на цій сітці розривний білінійний сплайн $S(x,y)$. Функціонал, який треба мінімізувати? має вигляд (1). Три інтеграли в цьому виразі будуть дорівнювати нулю, оскільки на прямокутних елементах, по яким ведеться інтегрування, функція є неперервною і білінійною.

Крок 2. Інтервал, на якому $J(C)\neq 0$, ділимо на рівні чотири частини, вводячи нові вузли в сітку. Нехай для визначеності це інтервал $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\times\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ і обираємо вузли

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{2^2},\ x_2=\frac{1}{2},\quad y_0=0,\ y_1=\frac{1}{2^2},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Знову ж будуємо сплайн на нових вузлах і один з інтегралів в мінімізуючому функціоналі не буде дорівнювати нулю.

Знайдемо критерій зупинки ітераційного процесу.

Треба знайти такий найближчий до точки ε-розриву прямокутний елемент $\left(\dfrac{m}{2^k},\ \dfrac{m+1}{2^k}\right)^2$, $m,k\in N,\ m<2^k$, що виконується умова

$$\left|\frac{m+1}{2^k}-\frac{m}{2^k}\right|<2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^k}<2\varepsilon \Rightarrow 2^k>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow k>\log_2\frac{1}{2\varepsilon}=-\log_2(2\varepsilon).$$

Оскільки $k \in N$, то $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$ — номер ітерації (кроку), на якій потрібно зупинити ітераційний процес.

m задовольняє нерівностям

$$\frac{m}{2^k} < x^* < \frac{m+1}{2^k} \Rightarrow m < x^* \cdot 2^k,\ m > x^* \cdot 2^k - 1 .$$

Оскільки $m \in N$, то $m = \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor$.

Тобто на $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$ — ітерації знайдемо точку ε-розриву x^*, яка потрапить в ε-інтервал $\left(\frac{\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor}{2^k}, \frac{\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1}{2^k} \right)$. Тобто $x^* \in \left(\frac{\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor}{2^k}, \frac{\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1}{2^k} \right)$.

Теорема 2 доведена.

Приклад 1. Нехай розривна білінійна функція $f(x, y)$ має розрив першого роду в точці $(x^*, y^*) = (\pi, \pi - 3) \approx (3.14.15.92.65;\ 0.14159265)$. Складемо таблицю результатів виявлення точки ε-розриву (табл. 1), тобто ε — інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε.

Таблиця 1

Кількість ітерацій для досягнення похибки ε

Похибка ε	**Номер ітерації, k**	**ε-інтервал**
0,01	6	(0.140625; 0.15625)
0,001	9	(0.140625; 0.1425781)
0,0001	13	(0.14147949; 0.1416016)

Визначення 4. Базисним розривним білінійним сплайном в області $[0;1]^2$ будемо називати сплайн

$$B(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & (x, y) \in [0;1]^2, \\ 0, & (x, y) \notin [0;1]^2, \end{cases}$$

де $h(x, y)$ — білінійний неперервний поліном.

Теорема 3. Довільну розривну білінійну функцію $f(x, y)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно, завжди, знайдуться такі $M, L \in N$ і параметри $C_{i,j}^{\pm\pm}$, що білінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}B(Mx-i;Ly-j;C_{i,j}^{\pm\pm}),\ C_{i,j}^{\pm\pm}=f\left(\frac{i}{M}\pm 0,\frac{j}{L}\pm 0\right).$$

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають досить часто.

Наступним кроком автори планують розробити модифікований алгоритм для знаходження ліній розриву небілінійної функції та обгрунтувати метод відновлення розривних функцій двох змінних [12] з використанням інтерлінації фукнкцій двох змінних та ліній ε -розриву, використовуючи розбиття області визначення функції двох змінних на прямокутні елементи, з метою оптимізації кількості обчислень.

Висновки. В роботі введено поняття розривного білінійного апроксимаційного сплайну, та пропонується метод знаходження точок та ліній ε -розриву білінійної функції двох змінних, інформацією про яку є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з області $[0;1]^2$. Доведена теорема про скінченність цього методу. Цей метод може бути розповсюджений на випадок нелінійної розривної функції.

Список використаних джерел:

1. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. — К. : Наук. думка, 1989. — 272 с.
2. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. — Харків : Основа, 2002. — 544 с.
3. Advances in the Gibbs Phenomenon / ed. Abdul J. Jerri. — Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright, 2011. — 424 p.
4. Gottlieb S. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon / S. Gottlieb, Jae-Hun Jung, S. Kim // Commun. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 9, № 3. — P. 497–519.
5. Петровская Н. Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка / Н. Б. Петровская // Математическое моделирование. — 2005. — Т. 17, № 1. — С. 79–92.
6. Дейнека В. С. Анализ многокопмонентных распределенных систем и оптимальное управление / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2007. — 703 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.

8. Литвин О. М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський, 2010. — Вип. 3. — С. 122–131.
9. Литвин О. М. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Праці ІПММ НАН України. — Донецьк, 2012. — Т. 24. — С. 157–165.
10. Литвин О. М. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, В. О. Пасічник // Вісник НТУ «ХПІ» : збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2015. — № 6(1115). — С. 67–76.
11. Литвин О. Н. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) / О. Н. Литвин, Ю. И. Першина, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 4. — С. 126–134.
12. Литвин О. М. Відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за відомими її проекціями вздовж взаємно перпендикулярних ліній / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Вісник НТУ «ХПІ» : збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2013. — № 54(1027) — С. 144–154.

Developed and researched method of finding the break points and the ε-break of first-order of bilinear function of two variables by means approached its discontinuous interpolation or the approximation bilinear splines. Theorems on the required number of iterations of the proposed method to achieve the required accuracy. We introduce the concept the ε-continuity of a function of two variables. On this basis, we developed an algorithm for the detection of discontinuities of the first kind bilinear function of two variables, using a discontinuous approximation bilinear splines. An example confirming the theoretical calculations. Prospects for further research are also discussed.

Key words: *discontinuous bilinear interpolation, discontinuous bilinear approximation, ε-break.*

Отримано: 20.04.2016