О. В. Борисенко // Украинский математический журнал. — 1992. — Т. 44, № 12. — С. 1645–1651.
7. Borysenko O. D. The limit behavior of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter / O. D. Borysenko, I. G. Malyshev // Theory of Stochastic Processes. — 2001. — Vol. 7(23), № 1–2. — P. 30–36.
8. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1968. — 356 с.
9. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход. — К. : Изд. Киевского университета, 1961. — 216 с.
10. Гихман И. И. Теория случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1975. — Т. 1. — 664 с.

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillator system given by third order differential equation with small non-linear periodical external disturbances of multidimensional white noise type, centered and non-centered Poisson noises types is studied. The non-resonance case is considered.

Key words: *asymptotic behavior, non-autonomous oscillator system, stochastic differential equation, centered and non-centered Poisson measures.*

Отримано: 23.08.2016

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ХАУСДОРФОВОЇ ВІДСТАНІ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ У МНОЖИНІ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З КОМПАКТНИМИ ОПУКЛИМИ ОБРАЗАМИ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації фіксованого відображення з множини неперервних відображень з компактними опуклими образами підмножиною цієї множини.

Отримано низку допоміжних результатів, які становлять і самостійний інтерес.

Ключові слова: *найкраща у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірна апроксимація, відображення з опуклими образами, необхідні, достатні умови, критерій екстремальності елемента.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації фіксованого відображення з множини неперервних відображень з компактними опуклими образами підмножиною цієї множини встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента, які узагальнюють відповідні результати, отримані у працях [1–3].

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $K(X)$ $(K_0(X))$ — сукупність непорожніх компактів (непорожніх опуклих компактів) простору X,

$$H(A,B)=\max\left\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|,\max_{y\in B}\min_{x\in A}\|x-y\|\right\} —$$

хаусдорфова відстань між множинами A,B із $K(X)$, $C(S,K(X))$ ($C(S,K_0(X))$) — множина неперервних на S відносно метрики Хаусдорфа багатозначних відображень S в $K(X)$ $(K_0(X))$, ω — додатна неперервна на S функція (вагова функція), $\|\omega\|=\max\limits_{s\in S}\omega(s)$.

Задачею найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації відображення $a\in C(S,K(X))$ множиною $V\subset C(S,K(X))$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_\omega^*(a,V)=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\Big(\omega(s)H\big(g(s),a(s)\big)\Big). \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\alpha_\omega^*(a,V)=\max_{s\in S}\Big(\omega(s)H\big(g^*(s),a(s)\big)\Big),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Покладемо далі для будь-яких $g,h\in C(S,K(X))$

$$\rho_\omega(g,h)=\max_{s\in S}\Big(\omega(s)H\big(g(s),h(s)\big)\Big).$$

Твердження 1. Величина $\rho_\omega(g,h)$, $g,h\in C(S,K(X))$, задає метрику на множині $C(S,K(X))$.

Доведення справедливості цього твердження аналогічне доведенню твердження 3.2 праці [2].

Надалі через $\big(C(S,K(X)),\rho_\omega\big)$ будемо позначати такий метричний простір, у якому для всіх $g,h\in C(S,K(X))$

$$\rho_\omega(g,h)=\max_{s\in S}\Big(\omega(s)H\big(g(s),h(s)\big)\Big).$$

З урахуванням зазначеного задачу відшукання величини (1) можна подати у вигляді

$$\alpha_\omega^*(a,V)=\inf_{g\in V}\rho_\omega(g,a). \tag{2}$$

Позначимо через X^* — простір, спряжений з X, а через B^* — одиничну кулю цього простору:

$$B^*=\left\{f: f\in X^*,\|f\|\le 1\right\}.$$

Твердження 2. Для будь-яких $g,h\in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ має місце рівність

$$\rho_\omega(g,h)=\max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right). \tag{3}$$

Доведення. Внаслідок твердження 3.3 [2, с. 9] для будь-якого $s\in S$

$$H\left(g(s),h(s)\right)=\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|. \tag{4}$$

Тому

$$\rho_\omega(g,h)=\max_{s\in S}\left(\omega(s)H\left(g(s),h(s)\right)\right)=$$

$$=\max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right).$$

Твердження доведено.

Далі будемо вважати, що $a\in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, $V\subset C\left(S,K_o\left(X\right)\right)$.

З урахуванням рівностей (2), (4) задачу відшукання величини (1) у випадку, коли $a\in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, $V\subset C\left(S,K_o\left(X\right)\right)$, можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\alpha_\omega^*(a,V)&=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\left(\omega(s)H\left(g(s),a(s)\right)\right)=\inf_{g\in V}\rho_\omega(g,a)=\\&=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right)=\\&=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{f\in B^*}\left(\omega(s)\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right)=\\&=\inf_{g\in V}\max_{(s,f)\in S\times B^*}\left(\omega(s)\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Актуальність теми. У багатьох практичних задачах функціональні залежності, які характеризують досліджувані процеси, не означені точно, а лише відомо, що вони є селекторами деякого багатозначного відображення, тобто їх значення належать відповідним значенням цього багатозначного відображення (знаходяться в деякому діапазоні можливих значень).

Робота з такими функціональними залежностями пов'язана з низкою труднощів.

У зв'язку з цим виникає проблема найкращого у деякому розумінні їх відновлення однозначними або простішими багатозначними відображеннями певного класу, розв'язання якої приводить до задач найкращого наближення складних багатозначних відображень відображеннями простішої структури (див., наприклад, [1–10]).

Як відомо (див., наприклад, [11, 12]), з метою надання деяким елементам більшої ваги в результуючому значенні у порівнянні з іншими елементами використовується вагова функція.

З огляду на зазначене вище задача відшукання величини (5) є актуальною. Результати загального характеру, отримані при дослідженні цієї задачі, становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при побудові та обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв'язання цих задач.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (5).

Лінійний нормований простір класів еквівалентних пар неперервних відображень з компатними опуклими образами. Нехай $g, h \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$, $\alpha \in R$. Як відомо, сумою багатозначних відображень g і h називається відображення $g+h$ таке, що $\left(g+h\right)\left(s\right) = g\left(s\right) + h\left(s\right)$ для всіх $s \in S$, а добутком числа α на відображення g називається відображення αg таке, що $\left(\alpha g\right)\left(s\right) = \alpha g\left(s\right)$ для всіх $s \in S$. Легко перевірити, що операції додавання елементів множин $C\left(S, K\left(X\right)\right)$, $C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$ і множення дійсних чисел на ці елементи не виводять з цих множин.

Позначимо через $\left(C\left(S, K_0\left(X\right)\right)\right)^2$ прямий добуток $C\left(S, K_0\left(X\right)\right) \times$ $\times C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$. Означимо в $\left(C\left(S, K_0\left(X\right)\right)\right)^2$ алгебраїчні операції додавання і множення на дійсні числа таким чином:

$$\left(g_1, h_1\right) + \left(g_2, h_2\right) = \left(g_1 + g_2, h_1 + h_2\right),$$

$$\alpha \cdot (g,h) = (\alpha g, \alpha h), \text{ якщо } \alpha \in R, \ \alpha \geq 0,$$

$$\alpha \cdot (g,h) = (\alpha h, \alpha g), \text{ якщо } \alpha \in R, \ \alpha < 0.$$

Будемо вважати, що

$$(g_1, h_1) \approx (g_2, h_2), \text{ де } (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in \left(C\left(S, K_0(X)\right)\right)^2,$$

якщо $g_1 - h_2 = g_2 - h_1$.

Легко переконатись (див. [2]), що відношення $\approx$ є відношенням еквівалентності, яке дозволяє розбити $\left(C\left(S, K_0(X)\right)\right)^2$ на класи $K_{(g,h)}$ еквівалентних між собою пар (g,h). Сукупність таких класів будемо позначати через $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Нехай $\alpha, \beta \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, c — дійсне число, $(g_1, h_1) \in \alpha$, $(g_2, h_2) \in \beta$. Покладемо $\alpha + \beta = \gamma = K_{(g_2+g_1, h_1+h_2)}$, $c\alpha = K_{c(g_1,h_1)}$.

Можна переконатись, що результати операцій додавання класів і множення їх на дійсні числа не залежать від вибору елементів із цих класів і множина $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ з так означеними алгебраїчними операціями є лінійним простором над полем дійсних чисел (див. [2]).

Роль нуля в цьому просторі буде відігравати сукупність всіх пар (g,h), еквівалентних парі $(0,0)$, тобто, для яких $h = -g$. Отже, $K_{(0,0)} = \left\{(g, -g) : \ g \in C\left(S, K_o(X)\right)\right\}$.

Твердження 3. Для будь-якого $s \in S$, $f \in X^*$, $\alpha \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, $(g,h) \in \alpha$ величини

$$\omega(s)\left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right), \tag{6}$$

$$\max_{s \in S}\left(\omega(s) \max_{f \in B^*}\left|\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right|\right) \tag{7}$$

не залежать від вибору пари (g,h) із α.

Доведення. Нехай $(g,h),(g_1,h_1) \in \alpha$. Згідно з теоремою 5.1 [2, с. 19] $\max\limits_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f(x) + \min\limits_{y \in h(s)} \operatorname{Re} f(y) = \max\limits_{y \in g_1(s)} \operatorname{Re} f(y) + \min\limits_{y \in h_1(s)} \operatorname{Re} f(x)$.

Оскільки

$$\min_{y\in h(s)} \operatorname{Re} f(y) = -\max_{y\in h(s)} \operatorname{Re} f(-y) = -\max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y),$$

$$\min_{y\in h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) = -\max_{y\in -h_1(s)} \operatorname{Re} f(y),$$

то тоді

$$\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h_1(s)} \operatorname{Re} f(y) = \max_{x\in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y). \quad (8)$$

Це й означає, що величина (6) не залежить від вибору пари (g,h) із α. З (8) випливає, що

$$\max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right|\right) =$$

$$= \max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g_1(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h_1(s)} \operatorname{Re} f(y)\right|\right).$$

Отже, величина (7) також не залежить від вибору пари (g,h) із α.

Твердження доведено.

Величину (7) приймемо за норму класу $\alpha = K_{(g,h)}$, $(g,h)\in \in \left(C\left(S, K_0(X)\right)\right)^2$, лінійного простору $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Отже, для всіх $\alpha = K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)}$ покладемо

$$\begin{aligned}\|\alpha\| = \left\|K_{(g,h)}\right\| &= \max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right|\right) = \\ &= \max_{s\in S}\left(\omega(s) H\left(g(s), -h(s)\right)\right) = \rho_\omega(g,-h).\end{aligned} \quad (9)$$

Згідно з твердженням 3 для $\alpha = K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)}$ величина $\|\alpha\| = \left\|K_{(g,h)}\right\|$ не залежить від вибору $(g,h)\in\alpha = K_{(g,h)}$.

Теорема 1. Величина (9) задає норму на лінійному просторі $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Доведення теореми аналогічне доведенню цього твердження для випадку, коли $\omega(s)=1$, $s\in S$, проведеному у праці [2, с. 20, 21].

З теореми 1 випливає, що коли кожному елементу $\alpha = K_{(g,h)}$ лінійного над полем дійсних чисел простору $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ поставити у відповідність число $\|\alpha\| = \left\|K_{(g,h)}\right\|$, де $\left\|K_{(g,h)}\right\|$ визначається рівностями (9), то він стає лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.

Далі будемо позначати його через $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Еквівалентність задачі відшукання величини (5) деякій задачі наближення фіксованого елемента лінійного нормованого простору $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ фіксованою множиною цього простору.

Твердження 4. Для $(g,h) \in \left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2$ мають місце рівності

$$\left\|K_{(g,0)} - K_{(h,0)}\right\| = \left\|K_{(g,-h)}\right\| = \rho_\omega(g,h). \tag{10}$$

Доведення. Маємо, що $-K_{(h,0)} = K_{(-1)(h,0)} = K_{(0,-h)}$. З урахуванням цього та рівності (9) одержимо, що

$$\left\|K_{(g,0)} - K_{(h,0)}\right\| = \left\|K_{(g,0)} + K_{(0,-h)}\right\| = \left\|K_{(g,-h)}\right\| = \rho_\omega(g,h).$$

Рівність (10) встановлено.

Твердження доведено.

Нехай $K_V = \left\{K_{(g,0)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : g \in V\right\}$.

Розглянемо у лінійному нормованому просторі $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ задачу найкращого наближення елемента $K_{(a,0)}$ множиною K_V, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{K_{(g,h)} \in K_V} \left\|K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right\| = \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \left\|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\right\|. \tag{11}$$

Теорема 2. Справедлива рівність

$$\alpha_\omega^*(a,V) = \inf_{K_{(g,h)} \in K_V} \left\|K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right\| = \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \left\|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\right\|. \tag{12}$$

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (5), необхідно і достатньо, щоб елемент $K_{(g^*,0)}$ був екстремальним елементом для величини (11).

Доведення. З урахуванням (5) та (10) одержуємо, що

$$\inf_{K_{(g,h)} \in K_V} \left\|K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right\| = \inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \left\|K_{(g,0)} - K_{(a,0)}\right\| = \inf_{g \in V} \rho_\omega(g,a) = \alpha_\omega^*(a,V).$$

Рівність (12) встановлено.

Нехай тепер $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (5). Переконаємося, що $K_{\left(g^*,0\right)}$ є екстремальним елементом для величини (11). Припустимо супротивне. Тоді існує $g^/ \in V$, що для $K_{\left(g^/,0\right)} \in K_V$

$$\left\|K_{\left(g^/,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\| = \rho_\omega\left(g^/, a\right) < \left\|K_{\left(g^*,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\| = \rho_\omega\left(g^*, a\right),$$

що суперечить нашому припущенню щодо екстремальності елемента g^* для величини (5). Отже, $K_{\left(g^*,0\right)}$ є екстремальним елементом для величини (11). Нехай далі $K_{\left(g^*,0\right)} \in K_V$ є екстремальним елементом для величини (11), тобто

$$\inf_{K_{(g,0)} \in K_V} \left\|K_{\left(g,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\| = \left\|K_{\left(g^*,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\|.$$

Тоді для $g^* \in V$ і для кожного $g \in V$ з урахуванням (10), (12) одержимо, що

$$\rho_\omega\left(g, a\right) = \left\|K_{\left(g,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\| \geq \left\|K_{\left(g^*,0\right)} - K_{\left(a,0\right)}\right\| = \rho_\omega\left(g^*, a\right).$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (5).

Теорему доведено.

Похідна за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (5). Розглянемо деякі допоміжні твердження, які використаємо для описання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (5).

Твердження 5. Нехай $s \in S$, $f \in B^*$ та

$$\varphi_s^f\left(K_{\left(g,h\right)}\right) = \omega\left(s\right)\left(\max_{x \in g(s)} \operatorname{Re} f\left(x\right) - \max_{y \in -h(s)} \operatorname{Re} f\left(y\right)\right),$$

де $K_{\left(g,h\right)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Тоді значення $\varphi_s^f\left(K_{\left(g,h\right)}\right)$ не залежить від вибору пари $\left(g,h\right)$ із $K_{\left(g,h\right)}$ і φ_s^f є лінійним неперервним функціоналом, заданим на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, причому $\left\|\varphi_s^f\right\| \leq 1$.

Доведення. Той факт, що значення $\varphi_s^f\left(K_{\left(g,h\right)}\right)$ не залежить від вибору $\left(g,h\right) \in K_{\left(g,h\right)}$, випливає з твердження 3. Згідно з твердженням 7.5 [2, с. 29] функціонал

$$l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y),\ K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2},$$

є лінійним функціоналом, заданим на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Оскільки $\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\omega(s)l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)$, $K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, то φ_s^f також є лінійним на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ функціоналом. З урахуванням (9) маємо, що для будь-якого $K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$

$$\begin{gathered}\left|\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right|=\omega(s)\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\le\\ \le\max_{s\in S}\left(\omega(s)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right|\right)=\left\|K_{(g,h)}\right\|.\end{gathered}\tag{13}$$

Зі співвідношень (13) випливає обмеженість і, отже, неперервність лінійного функціонала φ_s^f на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ та справедливість нерівності $\left\|\varphi_s^f\right\|\le 1$.

Твердження доведено.

Теорема 3. Нехай $s\in S$, $f\in B^*$ та

$$\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right),$$

$$\psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\left|\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right|,\ K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}.$$

Тоді для кожного $K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ відображення $(s,f)\in S\times B^*\to\psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)$ є неперервне на $S\times B^*$ у розумінні топології на $S\times B^*$, яка є добутком топології компакта S та топології на B^*, індукованої на B^* слабко* топологією X^*.

Доведення. Для (s_0,f_0) та (s,f) із $S\times B^*$ маємо, що

$$\begin{gathered}\left|\psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-\psi_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|=\left|\left|\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right|-\left|\varphi_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|\right|\le\\ \le\left|\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-\varphi_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|=\left|\omega(s)l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-\omega(s_0)l_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|\le\end{gathered}$$

$$\le \left|\omega(s)-\omega(s_0)\right|\left|l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right|+\left|\omega(s_0)\right|\left|l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-l_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|\le$$

$$\le \left|\omega(s)-\omega(s_0)\right|\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re} f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re} f(y)\right|+$$

$$+\|\omega\|\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re} f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re} f(y)-\max_{x\in g(s_0)}\operatorname{Re} f_0(x)+\max_{y\in -h(s_0)}\operatorname{Re} f_0(y)\right|\le$$

$$\le \left|\omega(s)-\omega(s_0)\right|\rho(g,-h)+\|\omega\|\left|\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re} f(x)-\max_{x\in g(s_0)}\operatorname{Re} f(x)\right|+$$

$$+\|\omega\|\left|\max_{x\in g(s_0)}\operatorname{Re} f(x)-\max_{x\in g(s_0)}\operatorname{Re} f_0(x)\right|+\|\omega\|\left|\max_{y\in -h(s_0)}\operatorname{Re} f(y)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re} f(y)\right|+$$

$$+\|\omega\|\left|\max_{y\in -h(s_0)}\operatorname{Re} f_0(y)-\max_{y\in -h(s_0)}\operatorname{Re} f(y)\right|\le \left|\omega(s)-\omega(s_0)\right|\rho(g,-h)+$$

$$+\|\omega\|\Bigg(H\left(g(s),g(s_0)\right)+\max_{x\in g(s_0)}\left|\operatorname{Re} f(x)-\operatorname{Re} f_0(x)\right|+$$

$$+H\left(-h(s),-h(s_0)\right)+\max_{y\in -h(s_0)}\left|\operatorname{Re} f(y)-\operatorname{Re} f_0(y)\right|\Bigg). \qquad (14)$$

Нехай ε' — довільне додатне число. Оскільки $g(s_0)$, $-h(s_0)$ — компакти простору X, то існують їх ε' - сітки $\{x_1,...,x_n\}$, $\{y_1,...,y_m\}$ відповідно. Нехай $\mathrm{O}(f_0)$ — окіл точки f_0 множини B^* у слабкій* топології B^*, який визначається точками $x_1,...,x_n$; $y_1,...,y_m$ та числом ε', тобто

$$\mathrm{O}(f_0)=\left\{f: f\in B^*; \left|f(x_i)-f_0(x_i)\right|<\varepsilon', i=\overline{1,n}; \left|f(y_j)-f_0(y_j)\right|<\varepsilon', i=\overline{1,m}\right\}.$$

Для кожного $x\in g(s_0)$ позначимо через x_{i_x} такий елемент з множини $\{x_1,...,x_n\}$, що $\left\|x-x_{i_x}\right\|<\varepsilon'$. Тоді для всіх $f\in \mathrm{O}(f_0)$, $x\in g(s_0)$ будемо мати

$$\left|\operatorname{Re} f(x)-\operatorname{Re} f_0(x)\right|\le\left|f(x)-f_0(x)\right|\le$$

$$\le\left|f(x)-f\left(x_{i_x}\right)\right|+\left|f\left(x_{i_x}\right)-f_0\left(x_{i_x}\right)\right|+\left|f_0\left(x_{i_x}\right)-f_0(x)\right|\le \qquad (15)$$

$$\le\|f\|\left\|x-x_{i_x}\right\|+\varepsilon'+\|f_0\|\left\|x-x_{i_x}\right\|\le\left\|x-x_{i_x}\right\|+\varepsilon'+\left\|x-x_{i_x}\right\|<3\varepsilon'.$$

Аналогічно доводиться, що для всіх $f\in \mathrm{O}(f_0)$, $y\in -h(s_0)$ має місце нерівність

$$\left|\operatorname{Re} f\left(y\right)-\operatorname{Re} f_0\left(y\right)\right|<3\varepsilon' . \quad (16)$$

Оскільки $\omega(s)\in C(S)$, $g\in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, $h\in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, то існує окіл $O(s_0)$ точки s_0 компакта S такий, що

$$\left|\omega(s)-\omega(s_0)\right|<\varepsilon' , H\left(g\left(s\right),g\left(s_0\right)\right)<\varepsilon' ,$$

$$H\left(-h\left(s\right),-h\left(s_0\right)\right)<\varepsilon' , s\in O\left(s_0\right) . \quad (17)$$

Внаслідок співвідношень (14)–(17) будемо мати, що для всіх $\left(s,f\right)\in O\left(s_0\right)\times O\left(f_0\right)$ має місце нерівність

$$\left|\Psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-\Psi_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|<\varepsilon'\left(\rho\left(g,-h\right)+8\left\|\omega\right\|\right) . \quad (18)$$

Нехай ε — довільне додатне число. Поклавши у проведених вище міркуваннях $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{\rho\left(g,-h\right)+8\left\|\omega\right\|}$ та врахувавши співвідношення (18), одержимо, що для $\varepsilon>0$ існує окіл $O\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S та окіл $\mathrm{O}\left(f_0\right)$ точки f_0 множини B^* у слабкій * топології B^* такі, що для всіх $\left(s,f\right)\in O\left(s_0\right)\times O\left(f_0\right)$ має місце нерівність

$$\left|\Psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)-\Psi_{s_0}^{f_0}\left(K_{(g,h)}\right)\right|<\varepsilon .$$

Це й означає, що відображення $\left(s,f\right)\in S\times B^*\to\psi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)$ є неперервним у точці $\left(s_0,f_0\right)\in S\times B^*$ у розумінні топології на $S\times B^*$, яка є добутком топології компакта S та топології на B^*, індукованої на B^* слабко* топологією X^*. Оскільки точку $\left(s_0,f_0\right)$ вибрано довільно з $S\times B^*$, то це відображення є неперервним на $S\times B^*$ у розумінні описаної вище топології на $S\times B^*$.

Твердження доведено.

Зрозуміло, що коли $a\in V$, то екстремальним елементом для величини (5) буде $g^*=a$, оскільки в цьому випадку

$$0\le\alpha_\omega^*\left(a,V\right)=\inf_{g\in V}\rho_\omega\left(g,a\right)=\rho_\omega\left(a,a\right)=0 .$$

Тому далі будемо припускати, що $a\notin V$.

Для $g^*\in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*}=\rho_\omega\left(g^*,a\right)=\max_{s\in S}\left(\omega\left(s\right)H\left(g^*\left(s\right),a\left(s\right)\right)\right)=\left\|K_{\left(g^*,0\right)}-K_{\left(a,0\right)}\right\| ;$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : \left\| K_{(g,h)} - K_{(a,0)} \right\| < \left\| K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)} \right\| = \alpha_a^{g^*} \right\};$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s \in S : \omega(s) H\left(g^*(s), a(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\};$$

$$B_a^{g^*}(s) = \left\{ f \in B^* : \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| = H\left(g^*(s), a(s)\right) \right\},\ s \in S_a^{g^*};$$

$$\left(S \times B^*\right)_a^{g^*} = \left\{ (s,f) \in S \times B^* : \left\| K_{(g^*;0)} - K_{(a;0)} \right\| = \max_{s \in S} H\left(g^*(s), a(s)\right) = \right.$$

$$= \max_{s \in S} \left(\omega(s) \max_{f \in B^*} \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \right) =$$

$$= \max_{(s,f) \in S \times B^*} \left(\omega(s) \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \right) =$$

$$\left. = \omega(s) \left| \max_{x \in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right| \right\}.$$

Зауваження 1. Легко переконатися, що $(s,f) \in \left(S \times B^*\right)_a^{g^*}$ тоді й лише тоді, коли $s \in S_a^{g^*}$, а $f \in B_a^{g^*}(s)$.

Оскільки за припущенням $a \notin V$, то $K_{(a,0)} \notin K_V$. Тому $K_{(g^*,0)} \neq K_{(a,0)}$. Звідси випливає, що $\left\| K_{(a,0)} - K_{(a,0)} \right\| = 0 < \left\| K_{(g^*,0)} - K_{(a,0)} \right\|$. Це означає, що $K_{(a,0)} \in C_a^{g^*}$. Отже, $C_a^{g^*} \neq \varnothing$.

Функцію $\Phi_a\left(K_{(g,h)}\right) = \left\| K_{(g;h)} - K_{(a;0)} \right\|$, $K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, будемо називати цільовою функцією задачі відшукання величини (11).

Зрозуміло, що функція Φ_a є опуклою та неперервною на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$.

Нехай φ задана на лінійному (дійсному або комплексному) просторі Y опукла функція.

Через $\varphi'(x,y)$ будемо позначати похідну функції φ в точці $x \in Y$ за напрямком $y \in Y$.

Теорема 4. Для довільного $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ має місце рівність

$$\Phi_a^{/}\left(K_{(g^*,0)}, K_{(g;h)}\right) = \max_{s\in S_a^{g^*}} \max_{f\in B^{g^*}_{a(s)}} \left(sign\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right)\right) \times$$

$$\times \left(\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right)\right). \qquad (19)$$

Доведення. Згідно з (9) для всіх $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$

$$\left\| K_{(g,h)} \right\| = \max_{(s,f)\in S\times B^*} \left| \omega(s)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right)\right| =$$

$$= \max_{(s,f)\in S\times B^*} \left| \varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right| = \max_{(s,f)\in S\times B^*} \left| \omega(s)\, l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)\right|,$$

де для $(s,f)\in S\times B^*$

$$\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right) = \omega(s)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y) \right),$$

$$l_s^f\left(K_{(g,h)}\right) = \max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y),\ K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}.$$

Відповідно до твердження 5 φ_s^f та l_s^f є лінійними неперервними на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ функціоналами.

З урахуванням зазначеного вище

$$\Phi_a\left(K_{(g,h)}\right) = \left\| K_{(g;h)} - K_{(a;0)} \right\| = \max_{(s,f)\in S\times B^*} \left| \varphi_s^f\left(K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right)\right|.$$

Зрозуміло, що для $(s,f)\in S\times B^*$ функції

$$\gamma_s^f\left(K_{(g,h)}\right) = \left| \varphi_s^f\left(K_{(g,h)} - K_{(a,0)}\right)\right|,\ K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2},$$

є опуклими та неперервними на $K_{(C(S,K_0(X)))^2}$, причому, як випливає з теореми 3, відображення $(s,f)\in S\times B^* \to \gamma_s^f\left(K_{(g,h)}\right)$ є неперервним на $S\times B^*$ у розумінні топології на $S\times B^*$, яка є добутком топології компакта S та топології на B^*, індукованої на B^* слабко* топологією X^*. Оскільки B^* є слабко* компактною множиною (див., наприклад, [13, с. 196]), то $S\times B^*$ є компактом у описаній вище топології на $S\times B^*$. Тоді згідно з теоремою 1 [14] для кожного $K_{(g,h)} \in K_{(C(S,K_0(X)))^2}$ будемо мати, що

$$\Phi_a^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=\max_{(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}}\left(\gamma_s^f\right)^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=$$

$$=\max_{(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}}\lim_{t>0,t\to 0}\frac{\gamma_s^f\left(K_{(g^*,0)}+tK_{(g;h)}\right)-\gamma_s^f\left(K_{(g^*,0)}\right)}{t}=$$

$$=\max_{(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}}\lim_{t>0,t\to 0}\frac{\left|\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)+t\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right)\right|-\left|\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)\right|}{t}.$$

Маємо, що для $(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}$

$$\left|\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)\right|=\left\|K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right\|>0\,.$$

Нехай $(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}$ і $\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)>0$. Тоді

$$\left(\gamma_s^f\right)^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=$$

$$=\lim_{t>0,t\to 0}\frac{\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)+t\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right)-\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)}{t}=$$

$$=\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right)=sign\varphi_s^f\left(K_{(g^*;0)}-K_{(a;0)}\right)\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right). \qquad (20)$$

Якщо ж для $(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}$ $\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)<0$, то

$$\left(\gamma_s^f\right)^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=$$

$$=\lim_{t>0,t\to 0}\frac{-\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)-t\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right)+\varphi_s^f\left(K_{(g^*,0)}-K_{(a,0)}\right)}{t}= \qquad (21)$$

$$=-\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right)=sign\varphi_s^f\left(K_{(g^*;0)}-K_{(a;0)}\right)\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right).$$

З (20), (21) випливає, що

$$\Phi_a^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=\max_{(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}}sign\varphi_s^f\left(K_{(g^*;0)}-K_{(a;0)}\right)\varphi_s^f\left(K_{(g;h)}\right). \qquad (22)$$

Оскільки для $(s,f)\in\left(S\times B^*\right)_a^{g^*}$

$$\varphi_s^f\left(K_{(g^*;0)}-K_{(a;0)}\right)=\omega(s)\,l_s^f\left(K_{(g^*,-a)}\right)$$

та $\omega(s)>0$, то

$$sign\varphi_s^f\left(K_{(g^*;0)}-K_{(a;0)}\right)=sign\left(\omega(s)\,l_s^f\left(K_{(g^*,-a)}\right)\right)=$$

$$=signl_s^f\left(K_{(g^*;-a)}\right)=sign\left(\max_{x\in g^*(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in a(s)}\operatorname{Re}f(y)\right).$$

Крім того,

$$\varphi_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\omega(s)\,l_s^f\left(K_{(g,h)}\right)=\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right).$$

З урахуванням цього, зауваження 1 та рівності (22) одержимо, що

$$\Phi_a^{/}\left(K_{(g^*,0)},K_{(g;h)}\right)=\max_{s\in S_a^{g^*}}\max_{f\in B_{a(s)}^{g^*}}\left(sign\left(\max_{x\in g^*(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in a(s)}\operatorname{Re}f(y)\right)\right)\times$$

$$\times\left(\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right)\right).$$

Справедливість рівності (19) встановлено.

Теорему доведено.

Подання конуса внутрішніх напрямків для множини $C_a^{g^*}$ з точки $K_{(g^*,0)}$. Згідно з [15, с. 12, 13] через $\Gamma\left(M,y^*\right)$, $\Gamma^*\left(M,y^*\right)$ будемо позначати відповідно конус внутрішніх та граничних напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y з точки $y^*\in Y$.

Теорема 5. Має місце рівність

$$\Gamma\left(C_a^{g^*},K_{(g^*,0)}\right)=\left\{K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}:sign\left(\max_{x\in g^*(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in a(s)}\operatorname{Re}f(y)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\max_{x\in g(s)}\operatorname{Re}f(x)-\max_{y\in -h(s)}\operatorname{Re}f(y)\right)<0,s\in S_a^{g^*},f\in B_a^{g^*}(s)\right\}. \quad (23)$$

Доведення. Маємо, що

$$C_a^{g^*}=\left\{K_{(g,h)}\in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}:\Phi_a\left(K_{(g,h)}\right)<\Phi_a\left(K_{(g^*,0)}\right)\right\}\text{ і }C_a^{g^*}\neq\varnothing.$$

Оскільки функція Φ_a є опуклою та неперервною на $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$, та згідно з твердженням 6.9.1 [15, с. 352], теоремою 4 та нерівністю $\omega(s)>0$ для всіх $s\in S$ маємо, що

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{\left(g^*,0\right)}\right) = \left\{K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : \Phi_a^{/}\left(K_{\left(g^*,0\right)}, K_{(g;h)}\right) < 0\right\} =$$

$$= \left\{K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : \max_{s\in S_a^{g^*}} \max_{f\in B_a^{g^*}} \left(sign\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\right) < 0\right\} =$$

$$= \left\{K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : sign\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\omega(s)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0, s \in S_a^{g^*}, f \in B_a^{g^*}(s)\right\} =$$

$$= \left\{K_{(g,h)} \in K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2} : sign\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) < 0, s \in S_a^{g^*}, f \in B_a^{g^*}(s)\right\}.$$

Співвідношення (23) доведено.

Теорему доведено.

Необхідні умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (5). В цьому пункті встановлено необхідну умову того, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (5).

Теорема 6. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S, K_0(X)\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним для величини (5), необхідно, щоб для кожного $K_{(g,h)} \in \Gamma^*\left(V, K_{\left(g^*,0\right)}\right)$ існували елементи $s \in S$, $f \in B^*$ такі, що

$$\rho_\omega\left(g^*, a\right) = \max_{s\in S}\left(\omega(s) H\left(g^*(s), a(s)\right)\right) = \omega(s) H\left(g^*(s), a(s)\right) =$$

$$= \omega(s) \max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right| = \tag{24}$$

$$= \omega(s)\left|\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right|,$$

$$sign\left(\max_{x\in g^*(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\left(\max_{x\in g(s)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y\in -h(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \geq 0. \tag{25}$$

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (5). Тоді згідно з теоремою 2 $K_{(g^*,0)}$ є екстремальним елементом для величини (15). Відповідно до теореми 1.4.1 [15, с. 22] має місце співвідношення

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\right) \cap \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*,0)}\right) = \varnothing .$$

Звідси випливає, що для кожного $K_{(g,h)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{(g^*,0)}\right)$ має місце співвідношення: $K_{(g,h)} \notin \Gamma\left(C_a^{g^*}, K_{(g^*,0)}\right)$.

З урахуванням теореми 5 робимо висновок, що існує $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B_a^{g^*}(s)$, для яких виконується (25). Оскільки $s \in S_a^{g^*} \subset S$, $f \in B_a^{g^*}(s) \subset B^*$; то для s та f мають місце рівності (24).

Теорему доведено.

Достатня умова екстремальності елемента $g^* \in V$ для задачі відшукання величини (5).

Теорема 7. Нехай V — довільна множина простору $C(S, K_0(X))$, $g^* \in V$. Якщо для кожного $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що мають місце співвідношення

$$\begin{aligned}
&\rho_\omega\left(g^*, a\right) = \\
&= \max_{s \in S}\left(\omega(s) H\left(g^*(s), a(s)\right)\right) = \omega\left(s_g\right) H\left(g^*\left(s_g\right), a\left(s_g\right)\right) = \\
&= \omega\left(s_g\right) \max_{f \in B^*}\left|\max_{x \in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f(x) - \max_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f(y)\right| = \qquad (26)\\
&= \omega\left(s_g\right)\left|\max_{x \in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y)\right|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&sign\left(\max_{x \in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \times \\
&\times\left(\max_{x \in g\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(x) - \max_{y \in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) \geq 0, \qquad (27)
\end{aligned}$$

то g^* є екстремальним елементом для величини (5)

Доведення. Нехай g — довільний елемент множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, для яких мають місце співвідношення (26), (27). Тоді

$$0 \le \omega\left(s_g\right) sign\left(\max_{x\in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right) =$$

$$= \omega\left(s_g\right) sign\left(\max_{x\in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right)\times$$

$$\times\left(\max_{x\in g\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right) - \omega\left(s_g\right)\left|\max_{x\in g^*\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right| \le$$

$$\le \omega\left(s_g\right)\left|\max_{x\in g\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right| - \rho_\omega\left(g^*, a\right) \le$$

$$\le \max_{s\in S}\left(\omega\left(s\right)\max_{f\in B^*}\left|\max_{x\in g\left(s\right)} \operatorname{Re} f\left(x\right) - \max_{y\in a\left(s\right)} \operatorname{Re} f\left(y\right)\right|\right) - \rho_\omega\left(g^*, a\right) =$$

$$= \rho_\omega\left(g, a\right) - \rho_\omega\left(g^*, a\right).$$

Звідки $\rho_\omega\left(g, a\right) \ge \rho_\omega\left(g^*, a\right)$ для всіх $g \in V$. Це й означає , що g^* є екстремальним елементом для величини (5).

Теорему доведено.

Критерії екстремальності елемента $g^* \in V$ для задачі відшукання величини (5).

Становлять інтерес множини, для яких умова теореми 7 є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремальності елемента $g^* \in V$ для величини (5).

Означення 1 ([9, с. 1616]). Множину M нормованого простору Y будемо називати Γ^*-множиною відносно точки $y^* \in M$, якщо $y - y^* \in \Gamma^*\left(M, y^*\right)$ для всіх $y \in M$.

Стосовно простору $K_{\left(C\left(S, K_0(X)\right)\right)^2}$ це означення конкретизується таким чином.

Множину M простору $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ будемо називати Γ^*- множиною відносно $K_{\left(g^*,h^*\right)} \in M$, якщо

$$K_{(g,h)} - K_{\left(g^*,h^*\right)} = K_{\left(g-h^*,h-g^*\right)} \in \Gamma^*\left(M, K_{\left(g^*,h^*\right)}\right) \text{ для всіх } K_{(g,h)} \in M .$$

З урахуванням зазначеного вище введемо таке означення.

Означення 2 [2, с. 46]. Множину V простору $C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ будемо називати Γ^*-множиною відносно $g^* \in V$, якщо множина K_V є Γ^*-множиною простору $K_{\left(C\left(S,K_0(X)\right)\right)^2}$ відносно $K_{\left(g^*,0\right)}$, тобто, якщо

$$K_{(g,0)} - K_{\left(g^*,0\right)} = K_{\left(g,-g^*\right)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{\left(g^*,0\right)}\right) \text{ для всіх } g \in V .$$

Твердження 6 [2, с.46]**.** Будь-яка зіркова відносно $g^* \in V$ множина V є Γ^*-множиною відносно g^*.

Твердження 7 [2,с.46]**.** Будь-яка опукла множина V простору $C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$ є Γ^*-множиною відносно будь-якого $g^* \in V$.

Прикладом опуклої множини V простору $C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, елементи якої мають просту структуру, є множина сталих багатозначних опуклозначних відображень, тобто таких відображень $g \in C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, що $g\left(s\right) = K_g \in K_0\left(X\right)$ для всіх $s \in S$.

З урахуванням цього та твердження 7 робимо висновок, що множина V всіх сталих багатозначних опуклозначних відображень є Γ^*-множиною відносно будь-якого $g^* \in V$.

Теорема 8. Нехай $V \subset C\left(S,K_0\left(X\right)\right)$, $g^* \in V$ і V є Γ^*-множиною відносно точки g^* (в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною).

Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (5), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються умови (26), (27).

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (5). Оскільки V є Γ^*-множиною відносно g^*

(в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною), то $K_{\left(g,-g^*\right)} \in \Gamma^*\left(K_V, K_{\left(g^*,0\right)}\right)$.

Тоді згідно з теоремою 6 для будь-якого $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, для яких виконуються умови (26), (27).

Достатність умов теореми для екстремальності g^* встановлена у теоремі 7.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай V підпростір $C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (5), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, що мають місце співвідношення (26), (27).

Справедливість наслідку випливає з теореми 8, оскільки підпростір є опуклою множиною.

Наслідок 2. Нехай V є множиною сталих відображень із $C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$.

Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (5), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, такі, що мають місце рівності (26), (27).

Справедливість наслідку випливає з наслідку 1, оскільки множина сталих відображень із $C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$ є підпростором $C\left(S, K_0\left(X\right)\right)$.

Висновки. Для задачі найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації фіксованого відображення з множини неперервних відображень з компактними опуклими образами підмножиною цієї множини встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремального елемента.

Отримано низку результатів, які становлять і самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вест. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.
2. Гнатюк Ю. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного опуклозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних опуклозначних відображень / Ю. В. Гнатюк,

В. О. Гнатюк, У. В. Гудима. — Кам'янець-Подільський, 2008. — 54 с. — (Препринт/ Кам'янець-Подільський нац. ун-т; 2008.1).
3. Гнатюк Ю. В. Найкраща рівномірна апроксимація в метричному просторі неперервних відображень з компактними опуклими образами / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 2010. — Вип. 62, № 12. — С. 1620–1633.
4. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София : БАН, 1979. — 372 с.
5. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — Вип. 308, № 5. — С. 1047–1050.
6. Чобан М. М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений/ М. М. Чобан, Д. М. Ипате // Изв. АН Респ. Молдова. мат. — 1981. — № 2. — С. 13–18.
7. Дудов С. И. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображения с шаровыми образами / С. И. Дудов, А. Б. Коноплев // Мат. заметки. — 2007. — Вип. 82, № 4. — С. 525–529.
8. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. — 2000. — № 2. — С. 13–15.
9. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима// Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57, № 12. — С.1601–1619.
10. Дудов С. И. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой / С. И. Дудов, Е. В. Сорина // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. — 2008. — № 10. — С. 20–23.
11. Вакал Л. П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л. П. Вакал, А. О. Каленчук-Порханова // Мат. машини і системи. — 2006. — № 2. — С. 15–24.
12. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації / Л. П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. — 2013. — № 12. — С. 20–26.
13. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
14. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення/ У. В. Гудима, В. О. Гнатюк// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 37–55.
15. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.

The necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element for the problem of the best at sense of the weighting Hausdorf's distance of uniform approximation of fixed map from set of continuous maps with compact convex images by subset of this set are proved in the article.

Key words: *the best at sense of the weighting Hausdorf's distance of uniform approximation; the map with compact convex images; the necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element.*

Отримано: 14.09.2016

УДК 517.977.52

А. Я. Джаббарова*, докторант,
К. Б. Мансимов*,,** д-р физ.-мат. наук, профессор

* Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан,
**Институт Систем Управления (Кибернетики)
НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Рассматривается задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. Установлен аналог условия максимума Понтрягина. Отдельно изучен случай особых управлений.

Ключевые слова: *гибридная система, система типа Россера, принцип максимума Понтрягина, особые, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления.*

Введение. К настоящему времени исходя из теоретических и практических требований исследованы ряд задач оптимального управления, описываемые разностными аналогами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Среди задач оптимального управления особое место занимает задача оптимального управления, описываемая совокупностью систем разностных и дифференциальных уравнений типа Россера [1–3]. Такие системы называются непрерывно-дискретными или же гибридными системами типа Россера.

Предлагаемая работа посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, описываемой гибридной системой типа Россера. Сначала доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума Понтрягина [4–6], а затем рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимума (особый случай) [5–10]. Установлено необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi_3\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)dt+\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right) \tag{1}$$