Key words: *the best at sense of the weighting Hausdorf's distance of uniform approximation; the map with compact convex images; the necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element.*

Отримано: 14.09.2016

УДК 517.977.52

А. Я. Джаббарова*, докторант,
К. Б. Мансимов*,,** д-р физ.-мат. наук, профессор

* Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан,
**Институт Систем Управления (Кибернетики)
НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Рассматривается задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. Установлен аналог условия максимума Понтрягина. Отдельно изучен случай особых управлений.

Ключевые слова: *гибридная система, система типа Россера, принцип максимума Понтрягина, особые, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления.*

Введение. К настоящему времени исходя из теоретических и практических требований исследованы ряд задач оптимального управления, описываемые разностными аналогами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Среди задач оптимального управления особое место занимает задача оптимального управления, описываемая совокупностью систем разностных и дифференциальных уравнений типа Россера [1–3]. Такие системы называются непрерывно-дискретными или же гибридными системами типа Россера.

Предлагаемая работа посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, описываемой гибридной системой типа Россера. Сначала доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума Понтрягина [4–6], а затем рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимума (особый случай) [5–10]. Установлено необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi_3\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)dt+\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(x)\in U\subset R^r,\ x\in X=\{x_0,x_0+1,\ldots x_1-1\},\tag{2}$$

$$z_t(t,x)=f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ t\in T=[t_0,t_1],\ x\in X\cup x_1,\tag{3}$$

$$y(t,x+1)=g\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ t\in T,\ x\in X,$$

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x\in X\cup x_1,\ y(t,x_0)=b(t),\ t\in T.\tag{4}$$

Здесь $f(t,x,z,y)$ $\big(g(t,x,z,y)\big)$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно, $b(t)$ — заданная m-мерная непрерывная вектор-функция, $a(x)$ — n-мерная дискретная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$a(x+1)=F\big(x,a(x),u(x)\big),\quad x\in X\cup x_1,\ a(x_0)=a_0,\tag{5}$$

где $F(x,a,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по a до второго порядка включительно, a_0 — заданный постоянный вектор, $\varphi_1(x,z)$, $\big(\varphi_2(t,y)\big)$ — заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y) до второго порядка включительно, а $u(x)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$.

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Допустимое управление $u(x)$, доставляющий минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x)\big)$ — оптимальным процессом.

Построение приращения второго порядка функционала качества и необходимые условия оптимальности. Пусть $\big(u(x),a(x),z(t,x),y(t,x)\big)$ — фиксированный допустимый процесс и множество

$$F\big(x,a(x),U\big)=\big\{\alpha:\ \alpha=F\big(x,a(x),v\big),\ v\in U\big\}\tag{6}$$

выпуклое при всех x.

Через $u(x;\varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему решение $a(x;\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$
\begin{aligned}
&a(x+1;\varepsilon)=F\big(x,a(x;\varepsilon),u(x;\varepsilon)\big)\equiv\\
&\equiv F\big(x,a(x;\varepsilon),u(x)\big)+\varepsilon\Big[F\big(x,a(x;\varepsilon),v(x)\big)-F\big(x,a(x;\varepsilon),u(x)\big)\Big],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v(x)\in U$, $x\in X$ — произвольное допустимое управление.

Допустимое управление $u(x;\varepsilon)$ с вышеприведенными свойствами, в силу выпуклости множества (6), существует.

Далее через $\big(z(t,x;\varepsilon),y(t,x;\varepsilon)\big)$ обозначим решение следующей возмущенной задачи

$$
z_t(t,x;\varepsilon)=f\big(t,x,z(t,x;\varepsilon),y(t,x;\varepsilon)\big), \tag{8}
$$

$$
y(t,x+1;\varepsilon)=g\big(t,x,z(t,x;\varepsilon),y(t,x;\varepsilon)\big),\ t\in T,\ x\in X,
$$

$$
\begin{aligned}
z(t_0,x;\varepsilon)&=a(x;\varepsilon),\\
y(t,x_0;\varepsilon)&=b(t).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Пусть по определению

$$
\alpha(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\quad \beta(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \tag{10}
$$

$$
\gamma(x)=\left.\frac{\partial a(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\quad Z(t,x)=\left.\frac{\partial^2 z(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}, \tag{11}
$$

$$
Y(t,x)=\left.\frac{\partial^2 y(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0},\quad A(x)=\left.\frac{\partial^2 a(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{12}
$$

Учитывая (10), (11), (12) и используя гладкости вектор-функций $f(t,x,z,y)$, $g(t,x,z,y)$, $F(x,a,u)$ можно доказать, что $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$, $\gamma(x)$ являются решениями соответственно задач

$$
\alpha_t(t,x)=f_z\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)\alpha(t,x)+f_y\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)\beta(t,x), \tag{13}
$$

$$
\beta(t,x+1)=g_z\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)\alpha(t,x)+g_y\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big)\beta(t,x),
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(t_0,x)&=\gamma(x),\\
\beta(t,x_0)&=0,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\gamma(x+1)=F_a\big(x,a(x),u(x)\big)\gamma(x)+\Delta_{v(x)}F\big(x,a(x),u(x)\big), \tag{15}
$$

$$
\gamma(x_0)=0, \tag{16}
$$

$$Z_t(t,x)=\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}Z(t,x)+\frac{\partial f(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}Y(t,x)+$$
$$+\alpha'(t,x)f_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+ \tag{17}$$
$$+\alpha'(t,x)f_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x)+$$
$$+\beta'(t,x)f_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x),$$

$$Z(t_0,x)=A(x_0), \tag{18}$$

$$Y(t,x+1)=\frac{\partial g(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}Z(t,x)+\frac{\partial g(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}Y(t,x)+$$
$$+\alpha'(t,x)g_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\alpha(t,x)+ \tag{19}$$
$$+\alpha'(t,x)g_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x)+$$
$$+\beta'(t,x)g_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x))\beta(t,x),$$

$$Y(t,x_0)=0, \tag{20}$$

$$A(x+1)=F_a(x,a(x),u(x))A(x)+$$
$$+2\Delta_{v(x)}F(x,a(x),u(x))+\gamma'(x)F_{aa}(x,a(x),u(x))\gamma(x), \tag{21}$$

$$A(x_0)=0. \tag{22}$$

Здесь и в дальнейшем по определению

$$\Delta_{v(x)}g(x,a(x),u(x))\equiv g(x,a(x),v(x))-g(x,a(x),u(x)),$$

а $(')$ означает для векторов операцию скалярного произведения, а для матриц операцию транспонирования.

Учитывая (13)–(22) запишем специальное приращение критерия качества (1) соответствующее допустимым управлениям $u(x;\varepsilon)$ и $u(t,x)$ при помощи формулы Тейлора:

$$\Delta S_\varepsilon(u)=S(u(x;\varepsilon))-S(u(x))=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_2'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\alpha(t_1,x)+$$
$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_3'(t,y(t,x_1))}{\partial y}\beta(t,x_1)dt+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2'(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_2'(x,z(t_1,x))}{\partial z}Z(t_1,x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_3'(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)dt+ \tag{23}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_3'\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y}Y\left(t,x_1\right)dt+o\left(\varepsilon^2\right)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a}\gamma\left(x_1\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\gamma'\left(x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a^2}\gamma\left(x_1\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a}A\left(x_1\right).$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H\left(t,x,z,y,p,q\right)=p'f\left(t,x,z,y\right)+q'g\left(t,x,z,y\right),$$

$$M\left(x,a,u,\psi\right)=\psi'F\left(x,a,u\right).$$

Здесь $\left(\psi,p,q\right)$ — вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{\partial p\left(t,x\right)}{\partial t}=-\frac{\partial H\left(t,x,z\left(t,x\right),y\left(t,x\right),p\left(t,x\right),q\left(t,x\right)\right)}{\partial z},\tag{24}$$

$$q\left(t,x-1\right)=\frac{\partial H\left(t,x,z\left(t,x\right),y\left(t,x\right),p\left(t,x\right),q\left(t,x\right)\right)}{\partial y},$$

$$q\left(t,x_1-1\right)=-\frac{\partial\varphi_3\left(x,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y},\tag{25}$$

$$p\left(t_1,x\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z},\tag{26}$$

$$\psi\left(x-1\right)=\frac{\partial M\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)}{\partial a}+p\left(t_0,x\right),$$

$$\psi\left(x_1-1\right)=-\frac{\partial\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a}.\tag{27}$$

Используя (23) по схеме аналогичной схеме из [9, 10] доказывается

Теорема 1. Специальное приращение критерия качества (1) допускает представление в виде

$$\Delta S_\varepsilon\left(u\right)=-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\gamma'\left(x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a^2}\gamma\left(x_1\right)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\gamma'\left(x\right)M_{zz}\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\gamma\left(x\right)-\right.$$

$$-2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M_z'\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\gamma\left(x\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2'(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\alpha'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z^2}\alpha(t,x)+\right.$$
$$+\beta'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y\,\partial z}\alpha(t,x)+ \tag{28}$$
$$\left.+\beta'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y^2}\beta(t,x)\right]dt+$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_3(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)dt\right\}+o(\varepsilon^2).$$

Из разложения (28) в силу произвольности ε следует

Теорема 2. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M(x,a(x),u(x),\psi(x))\le 0 \tag{29}$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (29) является необходимым условием оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума [4–7]. Но нередки случаи вырождения условия максимума Понтрягина [6–10].

Определение 1. Допустимое управление $u(x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением, если для всех $v(x)\in U$, $x\in X$,

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M(x,a(x),u(x),\psi(x))=0\,. \tag{30}$$

Из определения 1 ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина (29) теряет свое содержательное значение.

Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности для особых управлений.

Предположим, что $u(x)$ особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление. Тогда из разложения (28) следует, что для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2'(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x)+\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_3(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)dt-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\alpha(t,x)+$$

$$+\alpha'(t,x)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\beta(t,x)+$$

$$+\beta'(t,x)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\alpha(t,x)+ \tag{31}$$

$$+\beta'(t,x)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\beta(t,x)\Big]dt-$$

$$-\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Big[\gamma'(x)M_{aa}(x,a(x),u(x),\psi(x))\gamma(x)+$$

$$+2\Delta_{v(x)}M_a(x,a(x),u(x),\psi(x))\gamma(x)\Big]\le 0$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (31) является неявным необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина управлений. Опираясь на него, получим необходимое условие оптимальности, непосредственно выраженное через параметры задачи (1)–(5).

Предположим, что $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i,j=1,2$ матричные функции соответствующих размерностей, являющихся решениями задачи [11]

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial\tau}=-V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))-$$

$$-V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$

$$V_{12}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+$$

$$+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\,\tau,s)}{\partial s}=-V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))-$$

$$-V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$

$$V_{22}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s))+$$

$$+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)),$$

$$V_{11}(t,x;\,t,s)=0,\ x_0\le s\le x-2,$$

$$V_{11}(t,x;\,t,x-1)=E_1,$$

$$V_{12}\left(t,x;\ \tau,x-1\right)=0\,,\ \ \tau\in\left[t_0,t\right],$$
$$V_{21}\left(t,x;\ t,s\right)=0\,,\ \ x_0\le s\le x-1\,,$$
$$V_{22}\left(t,x;\ \tau,x-1\right)=E_2\,,$$

(E_1 , E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей).

Тогда, как показано в [11], решение задачи (13)–(14) может быть представлено в виде

$$\alpha\left(t,x\right)=V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,x\right)\gamma\left(x\right)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,s\right)\gamma\left(s\right),\qquad(32)$$

$$\beta\left(t,x\right)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,s\right)}{\partial t}\gamma\left(s\right).$$

Далее через $\Phi\left(x,s\right)$ обозначим решение задачи

$$\Phi\left(x,s-1\right)=\Phi\left(x,s\right)F_a\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right),\qquad(33)$$
$$\Phi\left(x,x-1\right)=E_1\,.$$

На основе формулы о представлении решений линейных неоднородных разностных уравнений (см. напр. [7, 12]) решение задачи (15)–(16) может быть представлено в виде

$$\gamma\left(x\right)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi\left(x,s\right)\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right).\qquad(34)$$

Используя представление (34) займемся преобразованием представлений (32), (33).

Имеем

$$\begin{aligned}\alpha\left(t,x\right)&=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,x\right)\Phi\left(x,s\right)\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right)+\\&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,s\right)\Phi\left(s,\tau\right)\Delta_{v(\tau)}F\left(\tau,a\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\right]=\qquad(35)\\&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,x\right)\Phi\left(x,s\right)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\ t_0,\tau\right)\right]\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right).\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}\beta\left(t,x\right)&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{21}\left(t,x;\ t_0,s\right)}{\partial t}\Phi\left(s,\tau\right)\Delta_{v(\tau)}F\left(\tau,a\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\right]=\\&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}\left(t,x;\ t_0,\tau\right)}{\partial t}\Phi\left(\tau,s\right)\right]\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right).\end{aligned}\qquad(36)$$

Введя обозначения

$$L_1(t,x,s) = V_{11}(t,x+1;\, t_0,x)\Phi(x,s) + \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t,x+1;\, t_0,\tau)\Phi(\tau,s),$$

$$L_2(t,x,s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} \frac{\partial V_{21}(t,x;\, t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s),$$

формулы (35), (36) записываются в виде

$$\alpha(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} L_1(t,x,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s)), \tag{37}$$

$$\beta(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} L_2(t,x,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s)). \tag{38}$$

При помощи представлений (34), (37), (38) по схеме предложенной, например в [7, 10] доказываются справедливость соотношений

$$\begin{gathered}
\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \alpha'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\alpha(t_1,x) = \\
= \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_1(t_1,x,\tau)\Delta_{v(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\right)' \times \\
\times\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_1(t_1,x,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s))\right) = \\
= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'(\tau,a(\tau),u(\tau))\times \\
\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)\right\}\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s))
\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}
\int_{t_0}^{t_1}\beta'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\beta(t,x_1)\,dt = \\
= \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} L_2(t,x_1,\tau)\Delta_{v(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\right)' \times \\
\times\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1} L_2(t,x_1,s)\Delta_{v(s)}F(s,a(s),u(s))\right)dt =
\end{gathered} \tag{40}$$

$$= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{v(\tau)} F'\left(\tau, a(\tau), u(\tau)\right) \times$$

$$\times \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L_2'\left(t, x_1, \tau\right) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(t, y\left(t, x_1\right)\right)}{\partial y^2} L_2\left(t, x_1, s\right) dt \right\} \Delta_{v(s)} F\left(s, a(s), u(s)\right),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \int_{t_0}^{t_1} \Big[\alpha'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) \alpha(t,x) +$$
$$+\alpha'(t,x) H_{zy}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) \beta(t,x) + \tag{41}$$
$$+\beta'(t,x) H_{yz}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) \alpha(t,x) +$$
$$+\beta'(t,x) H_{yz}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) \beta(t,x) \Big] dt =$$
$$= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(\tau)} F'\left(\tau, a(\tau), u(\tau)\right) \times$$
$$\times \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} L_1'(t,x,\tau) H_{zz}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) L_1(t,x,s) + \right.$$
$$+L_1'(t,x,\tau) H_{zy}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) L_2(t,x,s) +$$
$$+L_2'(t,x,\tau) H_{yz}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) L_1(t,x,s) +$$
$$\left. +L_2'(t,x,\tau) H_{yy}\left(t,x,z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right) L_2(t,x,s) \Bigg] dt \right\} \times$$
$$\times \Delta_{v(s)} F\left(s, a(s), u(s)\right),$$

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \gamma'(x) M_{aa}\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) \gamma(x) =$$
$$= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(\tau)} F'\left(\tau, a(\tau), u(\tau)\right) \times \tag{42}$$
$$\times \left\{ \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x,\tau) M_{aa}\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) \Phi(x,s) \right\} \Delta_{v(s)} F\left(s, a(s), u(s)\right).$$

Следуя работам [13, 14] введем матричную функцию

$$K(\tau, s) = -\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} L_1'\left(t_1, x, \tau\right) \frac{\partial^2 \varphi_1\left(x, z\left(t_1, x\right)\right)}{\partial z^2} L_1\left(t_1, x, s\right) -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} L_2'\left(t, x_1, \tau\right) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(t, y\left(t, x_1\right)\right)}{\partial y^2} L_2\left(t, x_1, s\right) dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Big[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)L_1(t,x,s)+ \tag{43}$$

$$+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)L_2(t,x,s)+$$

$$+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)L_1(t,x,s)+$$

$$+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)L_2(t,x,s)\Big]\Bigg]dt+$$

$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x,s).$$

Принимая во внимание тождества (39)–(42) и учитывая формулу (43) неравенство (31) записывается в виде

$$\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big)K(\tau,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big)+$$

$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M_a'\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x,s)\Delta_{v(s)}F\big(s,a(s),u(s)\big)\right]\le 0. \tag{44}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство (44) выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Теорема 2 является довольно общим. Из него, используя произвольность допустимого управления $v(x)\in U$, $x\in X$ можно получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности особых управлений.

Приведем одну из них.

Теорема 3. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w F'\big(\xi,a(\xi),u(\xi)\big)K(\theta,\xi)\Delta_w F\big(\xi,a(\xi),u(\xi)\big)\le 0 \tag{45}$$

выполнялось для всех $\xi\in X$, $w\in U$.

Теорема 3 является аналогом условия Габасова-Кирилловой из [6] для рассматриваемой задачи. Оно более слабое чем (44).

Выводы. Исследуется задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. Применяя схемы предложенные в работах [7, 10] получен аналог дискретного принципа максимума Л. С. Понтрягина и изучен случай вырождения условия максимума.

Список использованной литературы:

1. Kaczorek T. Positive 2D hybrid linear systems / T. Kaczorek // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. — 2007. — Vol. 55. — № 4. — P. 351–358.
2. Kaczorek T. Solvability of 2D hybrid linear systems-comparison of three different methods / T. Kaczorek, V. Marchenko, L. Sajewski // Acta mechanica et automatic. — 2008. — Vol. 2. — № 2. — P. 59–66.
3. Machenko V. M. Hybrid control discrete-continuous 2-D systems / V. M. Machenko, I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova // Technical University of Biolyostok. — 2010. — P. 3–8.
4. Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова — Минск : Изд-во БГУ, 1981. — 400 с.
5. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума / Б. Н. Пшеничный. — М. : Наука, 1969. — 152 с.
6. Габасов Р. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // В сб.: Управляемые системы. ИМ (О) АН СССР. — 1979. — Вып. 18. — С. 14–25.
7. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов — Баку : Изд-во БГУ, 2013. — 171 с.
8. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 251 с.
9. Марданов М. Дж. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием / М. Дж. Марданов, К. Б. Мансимов, Т. К. Меликов — Баку : ЭЛМ, 2013. — 353 с.
10. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов. — Баку : ЭЛМ, 1999. — 174 с.
11. Джаббарова А. Я. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера / А. Я. Джаббарова, К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев // Докл. НАН Азербайджана. — 2013. — № 8. — С. 15–18.
12. Габасов Р. Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Изд-во БГУ, 1973. — 248 с.
13. Джаббарова А. Я. Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера / А. Я. Джаббарова, К. Б. Мансимов // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. — 2004. — № 4. — С. 13–23.
14. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности в одной гибридной системе типа Россера / К. Б. Мансимов, А. Я. Джаббарова // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-мат. наук. — 2014. — № 3. — С. 98–104.

In this work the considered an optimal control problem described on hybrid systems Roesser type. Pontryagins maximum principle is obtained. Then investigated the maximum principle generated case (singular case). Necessary conditions for optimality the singular controls are obtained.

Key words: *hybrid systems, Roesser type system, Pontryagins maximum principle, singular on the Pontryagins maximum principle case control.*

Отримано: 26.09.2016