19. Шкурба В. В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. — М. : Наука, 1976. — 96 с.

Authors have analysed statements of problems of Eucledian combinatorial optimization both under certainty, and under stochastic uncertainty. Models of applied tasks as problems of Eucledian combinatorial optimization on arrangements are constructed. They use deterministic problems with linear fractional objective function both unconditional, and under linear constraints. Also stochastic problems on arrangements are constructed.

Key words: *combinatorial optimization, stochastic optimization modeling.*

Отримано: 22.09.2016

УДК [519.245+519.214]:519.237.8

М. А. Іванчук*, асистент,
А. М. Калинюк,** канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Малик*,** канд. фіз.-мат. наук

*Буковинський державний медичний університет, м. Чернівці,
**Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський,
***Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

ВЛАСТИВОСТІ ОБЛАСТІ ПОДІЛУ ДЛЯ ВІДОКРЕМЛЮВАНИХ ε-СІТОК ДВОХ МНОЖИН

У статті досліджується питання роздільності множин в евклідовому просторі. В роботі введено поняття ε-роздільності, множини поділу. Доведено основні властивості для множин поділу, в тому числі, зіркова опуклість. Розглянуто основні властивості межі множини поділу, наведено асимптотичні властивості точки границі.

Ключові слова: *ε-сітки, задача класифікації, область поділу.*

Вступ. Нехай з генеральних сукупностей, що генеруються незалежними випадковими величинами ξ та η, отримані вибірки A та B об'ємами n_A, n_B. Задача полягає в знаходженні відокремлюючої гіперплощини L, для якої справедливе співвідношення

$$P\left\{\xi \in L^{+}, \eta \in L^{-}\right\} = \sup_{l \in H^d} P\left\{\xi \in l^{+}, \eta \in l^{-}\right\},$$

де L_n — гіперплощина, що ділить множини $\xi_n = A, \eta_n = B$. Використаємо теорію ε-сіток для розв'язання даної задачі класифікації [1].

Розглянемо ранжований простір (R^d, H^d), де H^d — сукупність всіх півпросторів в R^d, та будуватимемо в (R^d, H^d) ε-сітки множин A та B. В [2] було доведено наступну теорему.

Теорема 1. Для того, щоб множини $A, B \subset R^d$ були ε-відокремлюваними, необхідно та достатньо, щоб в ранжованому просторі (R^d, H^d) існували їх ε-сітки $N_{\varepsilon_A}^A$, $N_{\varepsilon_B}^B$, для яких виконуються співвідношення:

1) $convN_{\varepsilon_A}^A \bigcap convN_{\varepsilon_B}^B = \varnothing$,

2) $\varepsilon_A n_A + \varepsilon_B n_B < \varepsilon\left(n_A + n_B\right)$.

У роботі розглядається метод знаходження $\varepsilon_A, \varepsilon_B$, що задовольняють умові 2 теореми 1 таких, для яких існують відокремлювані ε-сітки $N_{\varepsilon_A}^A$, $N_{\varepsilon_B}^B$.

Означення. Множину

$$D_{A,B} = \left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (0,1)^2 : \exists N_A^{\varepsilon_1}, N_B^{\varepsilon_2}, convN_A^{\varepsilon_1} \cap convN_B^{\varepsilon_2} = \varnothing\right\},$$

називатимемо ***областю поділу***.

Якщо відома область поділу, для перевірки виконання умови 2 теореми 1 достатньо розв'язати задачу мінімізації

$$\frac{\varepsilon_A n_A + \varepsilon_B n_B}{n_A + n_B} \to \min$$

за умови $\left(\varepsilon_A, \varepsilon_B\right) \in D_{A,B}$.

Якщо умова 2 теореми 1 не виконується для розв'язку задачі мінімізації $\left(\varepsilon_A^0, \varepsilon_B^0\right)$, то вона не буде виконуватися для всіх $\left(\varepsilon_A, \varepsilon_B\right) \in D_{A,B}$.

Припустимо, що випадкові величини $\xi, \eta \in R^1$ є неперервними випадковими величинами з функціями розподілу F_ξ, F_η.

Означення. Множину D_l таку, що

$$D_l := \left\{(x, y) \in (0,1)^2 : \exists h \in R^1, P\{\xi \in h_+\} \le x, P\{\eta \in h_-\} \le y\right\},$$

називатимемо областю поділу для ξ, η.

Для множини D_l має місце

Лема 1. Нехай існує обернена функція до F_ξ. Тоді множина D_l та $\overline{D}_l := \left(0,1\right)^2 \setminus D$ розділені кривою

$$y\left(x\right)=\min\left(F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(1-x\right)\right),1-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(x\right)\right)\right).$$

Доведення. Розглянемо два можливих випадки.

1. Нехай для деякого $h\in\left(-\infty,\infty\right)$: $F_{\xi}(h)>F_{\eta}(h)$, тоді множину D_l можна описати системою нерівностей

$$\begin{cases} x\geq 1-F_{\xi}(h), \\ y\geq F_{\eta}(h). \end{cases}$$

Тоді пряма, що відокремлює множини D_l та $\overline{D}_l$, має вигляд

$$y\left(x\right)=F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(1-x\right)\right).$$

2. Нехай для деякого $h\in\left(-\infty,\infty\right)$: $F_{\xi}(h)\leq F_{\eta}(h)$, тоді множину D_l можна описати системою нерівностей

$$\begin{cases} x\geq F_{\xi}(h), \\ y\geq 1-F_{\eta}(h). \end{cases}$$

У цьому випадку пряма, що відокремлює множини D_l та $\overline{D}_l$, має вигляд

$$y\left(x\right)=1-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(x\right)\right).$$

Отже, в загальному випадку множини D_l та $\overline{D}_l$ відокремлюються прямою

$$y\left(x\right)=\min\left(F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(1-x\right)\right),1-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}\left(x\right)\right)\right).$$

Лема 1 доведена.

Отже, за відомими функціями розподілу F_{ξ},F_{η} можна побудувати область поділу. Розглянемо приклади області поділу для найбільш вживаних розподілів.

Нехай випадкові величини ξ,η розподілені за нормальним законом з параметрами μ_{ξ},σ_{ξ} та μ_{η},σ_{η}. Тоді область D_l обмежена функцією (рис. 1)

$$y(x)=\min\left(\Phi\left(\frac{\Phi_G^{-1}\left(\dfrac{1-x-\mu_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right)-\mu_{\eta}}{\sigma_{\eta}}\right),1-\Phi\left(\frac{\Phi_G^{-1}\left(\dfrac{x-\mu_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right)-\mu_{\eta}}{\sigma_{\eta}}\right)\right),\ x\in(0,1)$$

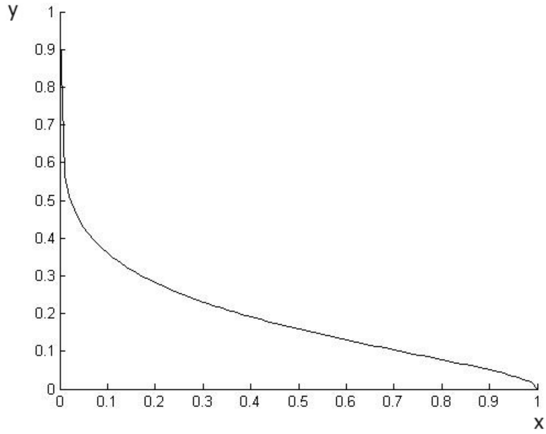

Рис. 1. *Область поділу для нормального розподілу*

Нехай випадкові величини ξ,η розподілені за експоненціальним законом з параметрами μ_ξ та μ_η. Область D_l обмежена знизу функцією (рис. 2)

$$y(x)=\min\left(1-x^{\frac{\mu_\xi}{\mu_\eta}},(1-x)^{\frac{\mu_\xi}{\mu_\eta}}\right),\ x\in(0,1)$$

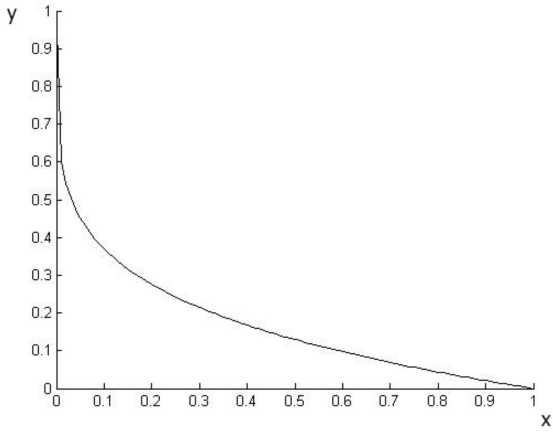

Рис. 2. *Область поділу для експоненціального розподілу*

Нехай випадкові величини ξ,η розподілені за рівномірним законом з параметрами a_ξ,b_ξ та a_η,b_η. Область D_l обмежена знизу функцією (рис. 3)

$$y(x)=\min\left(\frac{b_\xi(1-x)+a_\xi x-a_\eta}{b_\eta-a_\eta},1-\frac{a_\xi(1-x)+b_\xi x-a_\eta}{b_\eta-a_\eta}\right),\ x\in(0,1)$$

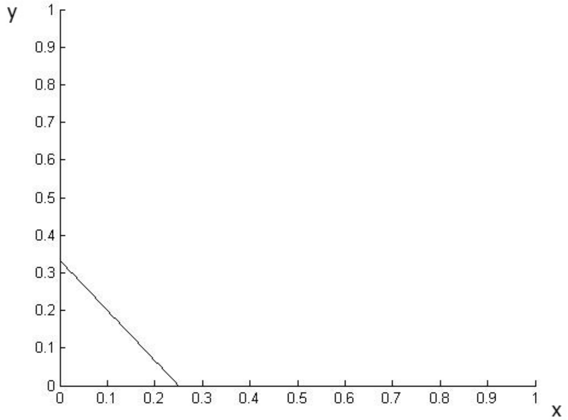

Рис. 3. *Область поділу для рівномірного розподілу*

Нехай випадкова величина ξ розподілена за рівномірним законом розподілу з параметрами a_ξ, b_ξ, а випадкова величина η розподілена за нормальним законом з параметрами μ_η, σ_η. Тоді область D_l обмежена функцією (рис. 4)

$$y(x)=\min\left(\Phi\left(\frac{b_\xi(1-x)+a_\xi x-\mu_\eta}{\sigma_\eta}\right),1-\Phi\left(\frac{b_\xi x+a_\xi(1-x)-\mu_\eta}{\sigma_\eta}\right)\right),\ x\in(0,1)$$

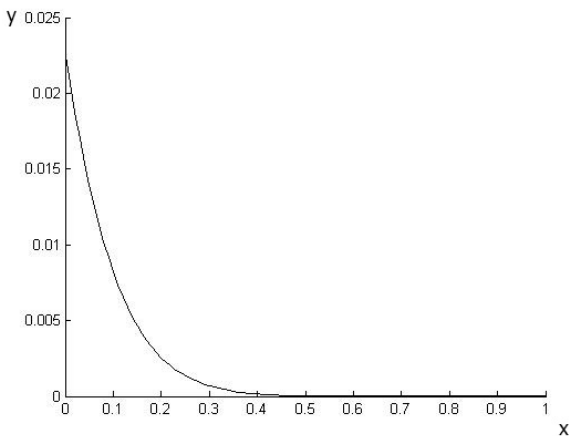

Рис. 4. *Область поділу для рівномірного та нормального розподілу*

Області поділу для неперервних розподілів є опуклими, тому точку $\left(\varepsilon_A^0, \varepsilon_B^0\right)$ в цьому випадку можна знайти як розв'язок задачі опуклого програмування (рис. 5).

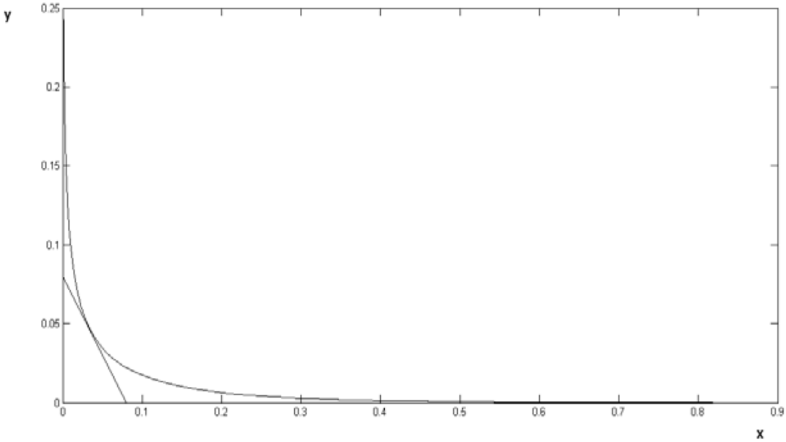

***Рис. 5.** Розв'язання задачі опуклого програмування*

Позначимо

$$\overline{D_{A,B}} = \left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (0,1)^2 : \forall N_A^{\varepsilon_1}, N_B^{\varepsilon_2}, convN_A^{\varepsilon_1} \cap convN_B^{\varepsilon_2} \neq \varnothing\right\}.$$

У лемі 1 описана лінія, що розділяє множини $D_{\xi,\eta}$ та $\overline{D_{\xi,\eta}}$. Доведемо її збіжність з лінією, що розділяє множини $D_{A,B}$ та $\overline{D_{A,B}}$ (рис. 6).

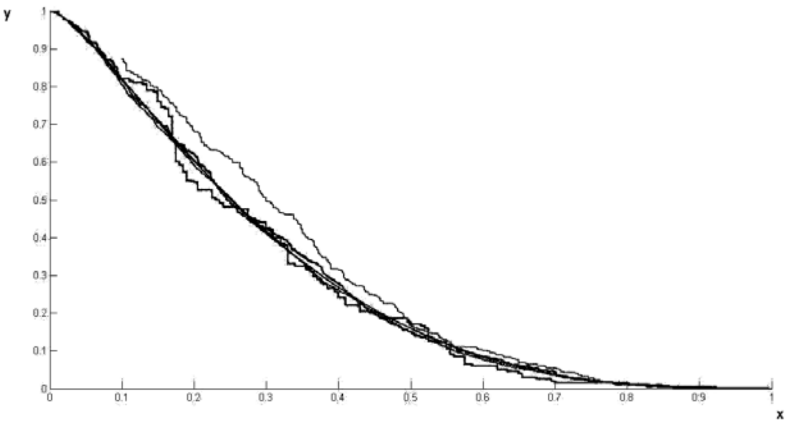

***Рис. 6.** Емпіричні та теоретична криві поділу*

Теорема 2. Нехай

1) множини A, B розміру n_A, n_B відповідно генеруються незалежними неперервними випадковими величинами ξ, η ;
2) множини $D_{A,B}$ та $\overline{D_{A,B}}$ розділені кривою $y_{A,B}(x)$.

Тоді має місце співвідношення

$$\lim_{n_A, n_B \to \infty} y_{A,B}(x) = y(x) ,$$

де

$$y(x) = \min\left(F_\eta\left(\left(F_\xi\right)_G^{-1}(1-x)\right), 1 - F_\eta\left(\left(F_\xi\right)_G^{-1}(x)\right)\right).$$

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що мають місце співвідношення

$$F_{n_B}\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) \to F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right),\ y \in (0,1) \qquad (1)$$

та

$$F_{n_B}\left(1 - F_{n_A}^{-1}(y)\right) \to F_\eta\left(1 - F_\xi^{-1}(y)\right),\ y \in (0,1) . \qquad (2)$$

Покажемо, що співвідношення (1) справедливе

$$\sup_{y\in[0,1]}\left|F_{n_B}\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right| =$$

$$\sup_{y\in[0,1]}\left|F_{n_B}\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) + F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{y\in[0,1]}\left|F_{n_B}\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right)\right| + \sup_{y\in[0,1]}\left|F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in R^1}\left|F_{n_B}(x) - F_\eta(x)\right| + \sup_{y\in[0,1]}\left|F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right| .$$

За теоремою Глівенка–Кантеллі [3] перший доданок

$$\sup_{x\in R^1}\left|F_{n_B}(x) - F_\eta(x)\right| \to 0,\ n_B \to \infty ,$$

Припустимо, що η має щільність $f_\eta < K$. Тоді для другого доданку маємо оцінку

$$\sup_{y\in[0,1]}\left|F_\eta\left(F_{n_A}^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right| \le K \sup_{y\in[0,1]}\left|F_{n_A}^{-1}(y) - F_\xi^{-1}(y)\right| .$$

Покажемо, що $\sup\limits_{y\in[0,1]}\left|F_{n_A}^{-1}(y) - F_\xi^{-1}(y)\right| \to 0$.

Припустимо, що $F_\xi(x_0) = y_0 \in (0,1)$ фіксоване. Припустимо, що $\sup\limits_{y\in[0,1]}\left|F_{n_A}^{-1}(y) - F_\xi^{-1}(y)\right| \not\to 0$, тоді $\left|F_\xi(x_0) - F_{n_A}(x_0)\right| \not\to 0$. Прийшли до суперечності. Отже, має місце співвідношення (1). За аналогією співвідношення (2) також має місце.

Теорема 2 доведена.

Отже, при $n_A, n_B \to \infty$ має місце збіжність емпіричної кривої, що відокремлює область поділу від її доповнення до теоретичної кривої. Покажемо асимптотичну нормальність кривої поділу в кожній окремо взятій точці.

Теорема 3. Нехай

1) $\xi_i, i \ge 1$ — незалежні випадкові величини, що мають розподіл F_ξ;
2) $\eta_j, j \ge 1$ — незалежні випадкові величини, що мають розподіл F_η;
3) $\xi_i, \eta_j, i, j \ge 1$ — незалежні в сукупності випадкові величини;
4) функції F_ξ, F_η мають обернені.

Тоді має місце слабка збіжність

$$\zeta_{n,m} = \zeta_{n,m}(y) = \sqrt{n}\left(F_n\left(F_m^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right) \to N(0, \sigma^2),$$

де

$$\sigma^2 = F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\left(1 - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right),$$

при $n \to \infty$, $m = O\left(n^\alpha\right), \alpha > 0$.

Доведення. Розглянемо математичне сподівання та дисперсію $\zeta_{n,m}$:

$$E\zeta_{n,m} = \sqrt{n}\left(EF_n\left(F_m^{-1}(y)\right) - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right).$$

Використовуючи означення емпіричної функції розподілу, отримаємо:

$$\left|E\zeta_{n,m}\right| = \left|\sqrt{n}\left(EI_{\eta < F_m^{-1}(y)} - F_\eta\left(F_\xi^{-1}(y)\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sqrt{n}\left(P\left\{\eta < F_m^{-1}(y)\right\} - P\left\{\eta < F_\xi^{-1}(y)\right\}\right)\right| =$$

$$\left|\sqrt{n}\left(P\left\{F_\xi^{-1}(y) \le \eta < F_m^{-1}(y)\right\} + P\left\{F_m^{-1}(y) \le \eta < F_\xi^{-1}(y)\right\}\right)\right|.$$

Таким чином, для збіжності

$$E\zeta_{n,m} \to 0$$

достатньо показати, що

$$\sqrt{n}P\left\{\left|F_\xi^{-1}(y) - F_m^{-1}(y)\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

при довільному ε.

Згідно означення узагальненої оберненої функції, отримаємо співвідношення

$$\sqrt{n}P\left\{\left|F_{\xi}^{-1}(y)-F_m^{-1}(y)\right|>\varepsilon\right\}=\sqrt{n}P\left\{\left|F_{\xi}(y)-F_m(y)\right|>\varepsilon\right\}\le$$

$$\le\sqrt{n}2e^{-2m\varepsilon^2}=2e^{0,5\ln n-2m\varepsilon^2},$$

де остання нерівність ґрунтується на нерівності Дворецького–Кіфера–Вольфовиця [4].

Таким чином, при $m=O\left(n^{\alpha}\right),\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty}E\zeta_{n,m}=0.$$

Розглянемо дисперсію $\zeta_{n,m}$:

$$D\zeta_{n,m}=E\zeta_{n,m}^2-\left(E\zeta_{n,m}\right)^2.$$

Другий доданок прямує до 0, отже, важливим буде розгляд першого доданка попередньої рівності.

$$E\zeta_{n,m}^2=nE\left(F_n\left(F_m^{-1}(y)\right)-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)^2=E\left(I_{\eta<F_m^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i\ne j}\left(I_{\eta_i<F_m^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)\left(I_{\eta_j<F_m^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)$$

Нехтуючи величинами порядку малості $O(1)$, отримаємо співвідношення

$$D\zeta_{n,m}=E\left(I_{\eta<F_m^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)^2+\frac{1}{n}\left(\sum_{i\ne j}\left(EI_{\eta_i<F_m^{-1}(y)}I_{\eta_j<F_m^{-1}(y)}-p^2\right)\right)^2=A_1+A,$$

де

$$p=F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right).$$

Розглянемо кожен доданок окремо. Використовуючи теорему Лебега [5], отримуємо

$$A_1=E\left(I_{\eta<F_m^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)^2\to E\left(I_{\eta<F_{\xi}^{-1}(y)}-F_{\eta}\left(F_{\xi}^{-1}(y)\right)\right)^2=p(1-p)$$

при $m\to\infty$.

Для другого доданку, враховуючи незалежність $\eta_i,i\ge1$, отримаємо

$$A_2=(n-1)\left(EI_{\eta_1<F_m^{-1}(y)}I_{\eta_2<F_m^{-1}(y)}-p^2\right)=$$

$$=(n-1)\left(P\left\{\eta_1<F_m^{-1}(y),\eta_2<F_m^{-1}(y)\right\}-p^2\right)=$$

$$=(n-1)\left(P\left\{\eta_1<F_m^{-1}(y),\eta_2<F_m^{-1}(y)\right\}-p^2\pm P\left\{\eta_1<F_m^{-1}(y),\eta_2<F_{\xi}^{-1}(y)\right\}\right)=$$

$$= (n-1)\Big(P\big\{\eta_1 < F_m^{-1}(y), \eta_2 < F_m^{-1}(y)\big\} - P\big\{\eta_1 < F_m^{-1}(y), \eta_2 < F_\xi^{-1}(y)\big\}\Big) +$$

$$+(n-1)\Big(P\big\{\eta_1 < F_m^{-1}(y), \eta_2 < F_\xi^{-1}(y)\big\} - p^2\Big) = A_{21} + A_{22}.$$

Для першого доданка отримаємо

$$|A_{21}| = (n-1)\Big|P\big\{\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\}\Big|\,\Big|P\big\{\eta_2 < F_m^{-1}(y)\big|\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\} -$$

$$-P\big\{\eta_2 < F_\xi^{-1}(y)\big|\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\}\ \Big| \le$$

$$\le (n-1)\Big|P\big\{\eta_2 < F_m^{-1}(y)\big|\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\} - P\big\{\eta_2 < F_\xi^{-1}(y)\big|\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\}\Big|$$

Аналогічно попереднім міркуванням, використовуючи нерівність Дворецького–Кіфера–Вольфовиця, отримаємо

$$|A_{21}| \to 0.$$

Для A_{22} маємо

$$A_{22} = (n-1)p\Big(P\big\{\eta_1 < F_m^{-1}(y)\big\} - p\Big),$$

з чого одразу отримаємо

$$|A_{22}| \to 0.$$

Таким чином, $D\zeta_{n,m} \to p(1-p)$.

Останнім кроком доведення є використання центральної граничної теореми для асимптотично незалежних випадкових величин [6]

$$u_{i,m} = I_{\eta_i < F_m^{-1}(y) - p},\ i \ge 1,$$

де асимптотична незалежність мається на увазі при $m \to \infty$.

Теорема доведена.

Таким чином, використовуючи теореми 2, 3, можна побудувати довірчий інтервал розв’язку задачі мінімізації для емпіричної області поділу (рис. 7).

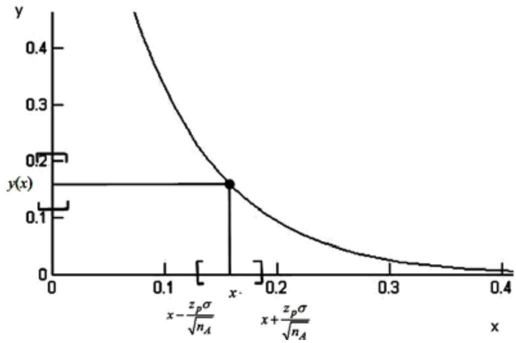

Рис. 7. *Довірчий інтервал розв’язку задачі мінімізації*

Висновок. В даній роботі зроблено одну з перших спроб побудувати розділяючу гіперплощину в евклідовому просторі, ґрунтуючись на поняттях ε-сіток. Даний підхід дозволяє «замінювати» реальні вибірки їх ε-сітками. Це в свою чергу, використовуючи теорему Хауслера-Вельца, дозволяє проводити поділ множин невеликої потужності.

Список використаних джерел:

1. Haussler D. Epsilon-nets and simplex range queries / D. Haussler, E. Welzl // Discrete Comput. Geom. — 1987. — № 2. — P. 127–151.
2. Иванчук М. А. Использование ε-сетей для линейного разделения двух множеств в пространстве R^d / М. А. Иванчук, И. В. Малык // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — Т. 53, №4. — С. 147–150.
3. Tucker H. G. A Generalization of the Glivenko–Cantelli Theorem / H. G. Tucker // The Annals of Mathematical Statistics. — Vol. 30, № 3. — Sep., 1959. — P. 828–830.
4. Dvoretzky A. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator / A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Wolfowitz // Annals of Mathematical Statistics. — 1956. — № 27 (3). — P. 642–669.
5. Durrett R. Probability: Theory and Examples / R. Durrett. — 4 ed. — Cambridge, 2013. — 386 p.
6. Усольцев Л. П. Об асимптотике и больших уклонениях в центральной предельной теореме для сумм вида $\sum f(q^n t)$ / Л. П. Усольцев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2009. — Вып. 4(70). — С. 52–84.

The article examines the question yevklidovomu resolution set in space. In the work introduced the concept ε-resolution, sets the division. Proved Properties for multiple basic division including, Star bulge. The basic properties of the set boundaries of division, are asymptotic properties of the point boundary.

Key words: *ε-nets, classification problem, separation set.*

Отримано: 19.09.2016