УДК 514.17
DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.121-136

Р. Ю. Стахів, аспірант

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

РЕАЛІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРІЇ ЛІПШИЦЯ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ КОМПЛЕКСНИХ АНАЛІТИЧНИХ МНОЖИН

У статті досліджено геометрію Ліпшиця на нескінченності комплексних аналітичних множин та її роль у встановленні зв'язку між асимптотичною метричною структурою та алгебраїчною природою таких множин. На основі відомих результатів (зокрема теореми Sampaio) проаналізовано значення біліпшицевої еквівалентності на нескінченності та унікальності дотичних конусів як фундаментальних інваріантів асимптотичної геометрії комплексних аналітичних підмножин. Розглянуто узагальнене означення ліпшицевих і біліпшицевих гомеоморфізмів на нескінченності в термінах належних метричних просторів, що дозволяє відокремити великомасштабні властивості простору від його локальної структури та забезпечує можливість аналізу асимптотичної поведінки у ширшому геометричному контексті. Показано, що біліпшицева еквівалентність на нескінченності є достатньо сильною умовою для перенесення метричних інваріантів, зокрема характеристик об'ємного зростання. Основним результатом роботи є встановлення нового критерію алгебраїчності: доведено, що якщо комплексна аналітична множина є біліпшицево еквівалентною на нескінченності належному метричному простору з поліноміальним зростанням об'єму, то вона також має поліноміальне зростання і, відповідно до теореми Столла–Бішопа, є алгебраїчною множиною. Таким чином, алгебраїчність може бути охарактеризована через асимптотичні метричні властивості без прямого використання аналітичної структури. Показано, що біліпшицева геометрія на нескінченності зберігає тонкі метричні інваріанти, включаючи темпи зростання об'єму та структуру дотичних конусів, що дозволяє використовувати її як ефективний інструмент класифікації аналітичних множин за їх великомасштабною поведінкою. Отримані результати розширюють застосування методів метричної геометрії у комплексному аналізі та алгебраїчній геометрії, а також відкривають перспективи подальших досліджень у напрямі вивчення асимптотичної жорсткості, стабільності та інваріантності геометричних структур.

Ключові слова: *дотичний конус на нескінченності, алгебраїчність, глобальна нерівність, ліпшицева регулярність на нескінченності, відображення з обмеженим ростом, асимптотична геометрія, проективний простір.*

Вступ та постановка проблеми. У сучасній математичній науці дедалі більша увага приділяється дослідженню глобальних властивостей комплексних аналітичних множин, зокрема тих, що проявляються у нескінченності. Вивчення поведінки множин на нескінченності дозволяє не лише уточнити їх геометричну структуру, але й розкрити фундаментальні зв’язки між аналітичною природою множини та її алгебраїчними характеристиками. Особливу роль у цьому контексті відіграє геометрія Ліпшиця, що є підходом, що поєднує топологічні, метричні та аналітичні властивості об’єктів і дає змогу класифікувати множини за типом ліпшицевої або біліпшицевої еквівалентності.

Загально відомо, що клас комплексних алгебраїчних множин має жорстку структуру, яка відрізняє його від ширшого класу комплексних аналітичних множин. Проте у багатьох випадках ці множини важко розрізнити, особливо коли аналіз здійснюється в глибоких асимптотичних режимах.

Окреме значення має дослідження дотичного конуса на нескінченності, який описує лінійне наближення множини в асимптотичному масштабі. Встановлення унікальності цього конуса, а також його алгебраїчної природи, може допомогти у розв’язанні проблеми глобальної класифікації аналітичних множин. Такий підхід, що поєднує у собі аналітичні, алгебраїчні та метричні інструменти, є новим кроком у напрямку побудови повноцінної теорії глобальної геометрії аналітичних структур у проективному або евклідовому просторі.

Попри значну кількість результатів у сфері локальної аналітичної геометрії, досі залишається недостатньо розробленою проблема розуміння структури аналітичних множин «на нескінченності». Зокрема, потребують системного обґрунтування критерії, за якими можна відрізнити комплексні алгебраїчні множини від загальних аналітичних лише на підставі їх поведінки на великих масштабах. Це завдання є не лише теоретично актуальним, але й важливим з погляду прикладних застосувань, зокрема в задачах моделювання, де властивості простору в околі нескінченності можуть істотно впливати на результати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] було розглянуто підхід до класифікації сингулярностей у комплексному просторі на основі їх Ліпшицевої геометрії, тобто структури простору в околі особливої точки, яка зберігається при бі-ліпшицевих відображеннях. У центрі дослідження знаходиться аналіз внутрішньої та зовнішньої метрик сингулярностей та виявлення геометричних інваріантів, які відображають аналітичні особливості об’єктів.

Робота починається з пояснення різниці між топологічною, аналітичною та Ліпшицевою еквівалентністю, зосереджуючись на питанні, як виглядає аналітичний простір поблизу особливої точки залежно від обраної метрики. Значну увагу приділено зовнішній метриці, яка часто є чутливішою до аналітичних особливостей, ніж внутрішня, і, зокрема, дозволяє виявляти аналітичні інваріанти, такі як кратність. У випадку комплексних кривих доводиться, що внутрішня геометрія є тривіальною (всі криві метрично конічні), а зовнішня – несе достатньо інформації для повної класифікації топологічного типу, що підтверджується за допомогою техніки, названої bubble trick.

У випадку нормальних поверхневих сингулярностей вводиться поняття thick-thin decomposition – розбиття сингулярності на «товсті» (thick) та «тонкі» (thin) частини. Товсті частини є метрично конічними (зберігають геометричну структуру при масштабуванні), тоді як тонкі частини мають менший тангенціальний конус і містять так звані «швидкі петлі», що є перешкодою до метричної конічності. На основі цієї побудови формується внутрішня геометрична декомпозиція, яка узагальнює топологічну структуру сингулярності.

Окрему частину займає дослідження зовнішньої Ліпшицевої геометрії поверхонь. Тут використовується розширена версія методу бульбашок – зокрема, зі «стрибками» (bubble trick with jumps), які дозволяють аналізувати поведінку простору на різних масштабах та виявляти нові інваріанти. Побудовано зовнішню геометричну декомпозицію, що відображає складніші аналітичні особливості сингулярності, зокрема через вивчення полярних кривих, їхніх розділювальних точок та зв'язку з проєкціями.

У науковій праці [2] досліджується бі-ліпшицева геометрія поверхонь, що формуються як об'єднання двох нормально вкладених Гельдерових трикутників. Розвиваються ідеї метричної геометрії сингулярностей, із зосередженням уваги на зв'язку між внутрішніми й зовнішніми метриками, а також на інваріантах, які дозволяють класифікувати такі множини з позицій бі-ліпшицевої еквівалентності.

Центральним об'єктом аналізу є пара нормально вкладених Гельдерових трикутників. Вводяться функції відстані між цими трикутниками й досліджуються їхні метричні властивості. Основним питанням є визначення того, чи можна певну пару трикутників вважати зовнішньо бі-ліпшицево еквівалентною іншій парі, зокрема парі, де другий трикутник є графіком функції, визначеної на першому. Простий аналіз показує, що це не завжди можливо, оскільки геометрична взаємодія між трикутниками може бути надто складною.

Щоб виявити структуру зв'язку між такими трикутниками, вводиться поняття зон, які об'єднують дуги за порядком дотичності до функції відстані. Ці зони можуть бути відкритими або замкненими, регулярними або сингулярними, і в кожній із них функція має передбачувану поведінку. Далі вводиться поняття елементарної зони, де структура функції є стабільною, та описують умови, за яких ця стабільність гарантує бі-ліпшицеву еквівалентність.

Потім вводиться новий інваріант – так звана $\sigma\tau$-піца, яка об’єднує комбінаційні та метричні характеристики зони. Складова σ описує перестановку зон з найвищим порядком дотичності, тоді як складова τ фіксує відповідність між нетрансверсальними зонами. Саме поєднання цих двох параметрів дозволяє створити інструмент для класифікації пар трикутників. Було доведено, що $\sigma\tau$-піца зберігається при зовнішніх бі-ліпшицевих відображеннях, і сформульовано гіпотезу про її повноту як класифікаційного інваріанту.

Особливу увагу приділено прикладам, які демонструють, що класичні піци (тобто інваріанти на рівні окремих трикутників) не є повними. У деяких випадках пари трикутників мають однакові піци, але не є зовнішньо бі-ліпшицево еквівалентними. Саме це мотивує введення інваріанта $\sigma\tau$-піци, здатного відобразити більш тонкі властивості структури простору.

У той же час можна констатувати, що питання, пов’язане з реалізацію геометрії Ліпшица на нескінченності комплексних аналітичних множин все ще залишається недостатньо дослідженим та потребує подальшого опрацювання.

Мета дослідження. Дослідження геометрії Ліпшиця на нескінченності комплексних аналітичних множин для досліджень алгебраїчності та жорсткості комплексних аналітичних множин.

Виклад основного матеріалу дослідження. Дослідження геометрії Ліпшиця на нескінченності комплексних аналітичних множин є важливим напрямом сучасної геометрії, що поєднує методи комплексного аналізу, алгебраїчної та метричної геометрії. Одним із фундаментальних результатів у цій області є встановлення зв’язку між алгебраїчністю множини та її метричними властивостями на нескінченності, зокрема через біліпшицеву еквівалентність.

Відомо (див., Sampaio, 2023), що поняття біліпшицевої гомеоморфності на нескінченності відіграє ключову роль у класифікації необмежених множин за їх асимптотичною геометрією.

1. Основні означення та відомі результати.

Нехай $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ – підмножини з індукованою евклідовою метрикою.

Означення 1.1. *Множини X та Y називаються біліпшицево гомеоморфними на нескінченності, якщо існують компактні підмножини K_X, K_Y та відображення $\varphi: X \setminus K_X \to Y \setminus K_Y$, яке є біліпшицевим гомеоморфізмом.*

Означення 1.2. *Відображення* $f : X \to Y$ *називається ліпшицевим, якщо існує константа* $L > 0$*, така що*

$$d\left(f(x), f(y)\right) \le Ld(x, y). \tag{1}$$

Біліпшицевість означає виконання двосторонньої оцінки.

2. Дотичні конуси на нескінченності.

Одним із ключових інваріантів геометрії на нескінченності є дотичний конус.

Означення 2.1. *Дотичним конусом множини* X *на нескінченності називається множина граничних напрямків послідовностей, що віддаляються до нескінченності.*

Як показано у класичних роботах (Stoll–Bishop), об'ємне зростання множини є визначальним фактором її алгебраїчності.

3. Відомий результат Sampaio та його інтерпретація.

Наведемо фундаментальний результат, який узагальнює зв'язок між алгебраїчністю та геометрією на нескінченності.

Теорема 3.1 (Sampaio, 2023). *Нехай* $X \subset \mathbb{C}^n$ *– чиста d-вимірна комплексна аналітична множина. Тоді еквівалентні:*

1) X *є алгебраїчною;*
2) X *має єдиний дотичний конус на нескінченності;*
3) X *біліпшицево еквівалентна алгебраїчній множині на нескінченності.*

Цей результат встановлює фундаментальний міст між метричною та алгебраїчною структурами множини.

У подальшому будемо використовувати цю теорему як базову, не претендуючи на її доведення, а зосереджуючись на її узагальненні та інтерпретації.

4. Узагальнення на належні метричні простори.

У класичних дослідженнях геометрії Ліпшиця на нескінченності основна увага, як правило, зосереджується на підмножинах евклідових просторів $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$, наділених індукованою евклідовою метрикою. Такий підхід є природним для комплексної аналітичної та алгебраїчної геометрії, оскільки дозволяє безпосередньо використовувати аналітичну структуру, локальні параметризації, властивості комплексних многовидів і методи проективного замикання. Водночас сама природа біліпшицевої еквівалентності є насамперед метричною, а не суто лінійною чи евклідовою. Це дає підстави розглядати відповідні конструкції в істотно ширшому контексті – у класі належних метричних просторів.

Необхідність такого узагальнення зумовлена кількома обставинами. По-перше, значна кількість задач сучасної геометрії та аналізу пов'язана з просторами, які не мають природної лінійної структури, проте допускають коректний метричний опис великих масштабів. По-друге, саме асимптотичні властивості простору часто виявляються інваріантними щодо конкретної реалізації простору як підмножини того чи іншого евклідового середовища. По-третє, перехід до ширшого класу просторів дозволяє чіткіше виділити ті властивості, які зумовлені власне метричною природою геометрії на нескінченності, а не допоміжними аналітичними чи алгебраїчними конструкціями.

У цьому контексті доцільно замінити евклідові простори більш загальним класом належних метричних просторів. Нагадаємо, що метричний простір називається належним, якщо кожна його замкнена обмежена підмножина є компактною. Еквівалентно, в такому просторі всі замкнені кулі є компактними. Саме ця властивість є принципово важливою для дослідження поведінки на нескінченності, оскільки вона забезпечує коректність переходу до «кінців» простору, контроль над послідовностями, що віддаляються до нескінченності, та стабільність виключення компактних підмножин. Іншими словами, належність простору є природною умовою, за якої поняття геометрії на нескінченності набуває строгого математичного змісту.

Перехід від евклідового випадку до належних метричних просторів дозволяє сформулювати узагальнене поняття біліпшицевої еквівалентності на нескінченності у формі, яка не залежить від наявності координат, лінійної структури чи додаткових гладких або аналітичних властивостей. Саме це і становить основний зміст запропонованого узагальнення.

Означення 4.1 (узагальнене). *Нехай* (X, d_X) *та* (Y, d_Y) *– належні метричні простори. Будемо говорити, що простори* X *і* Y *є біліпшицево еквівалентними на нескінченності, якщо існують компактні підмножини*

$$K_X \subset X,\ K_Y \subset Y$$

та бієктивне відображення

$$\varphi : X \setminus K_X \to Y \setminus K_Y, \tag{2}$$

для якого існує стала $L \geq 1$*, така що для всіх точок* $x_1, x_2 \in X \setminus K_X$ *виконується двостороння ліпшицева оцінка*

$$\frac{1}{L} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2). \tag{3}$$

Крім того, обернене відображення

$$\varphi^{-1} : Y \setminus K_Y \to X \setminus K_X \tag{4}$$

також є ліпшицевим. У такому випадку відображення φ називається біліпшицевим гомеоморфізмом на нескінченності, а самі простори X і Y – біліпшицево гомеоморфними на нескінченності.

Наведене означення є природним узагальненням класичного поняття, яке використовується для підмножин евклідових просторів. Дійсно, якщо $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ або $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ з індукованою евклідовою метрикою, то це означення повністю узгоджується з традиційним формулюванням. Водночас у новій редакції воно вже не прив'язане до координатного подання простору і може бути застосоване до істотно ширшого класу геометричних об'єктів.

Слід підкреслити, що в означенні принциповим є саме виключення компактних множин K_X та K_Y. Ідея полягає в тому, що локальна поведінка простору в обмеженій області не повинна впливати на його асимптотичну класифікацію. Два простори можуть суттєво відрізнятися в околі деяких фіксованих точок, мати різну локальну топологію або навіть різну структуру сингулярностей, але водночас демонструвати однакову геометричну поведінку при необмеженому віддаленні від довільно вибраного центра. Саме така поведінка і фіксується поняттям біліпшицевої еквівалентності на нескінченності.

Зазначимо також, що вибір конкретних компактних підмножин K_X та K_Y не є істотним. Якщо для деяких компактів існує біліпшицевий гомеоморфізм на нескінченності, то, за потреби, ці компакти можна збільшити, не порушуючи самого факту існування такого відображення. Отже, об'єктом дослідження виступає не поведінка простору в окремій області, а його клас еквівалентності після відсікання довільної компактної частини.

З метричної точки зору наведене означення є достатньо жорстким. На відміну від квазіізометрій, де допускається адитивна похибка, тут вимагається чисто мультиплікативний контроль відстаней. Саме тому біліпшицева еквівалентність на нескінченності зберігає тонші геометричні характеристики, ніж грубі великомасштабні відношення. Зокрема, вона дозволяє контролювати не лише тип зростання відстаней, а й точні співвідношення між ними, що є особливо важливим у задачах, пов'язаних із дотичними конусами на нескінченності, об'ємним зростанням, кратностями та асимптотичними інваріантами аналітичних множин.

Для кращого розуміння змісту узагальненого означення доцільно зробити кілька зауважень.

По-перше, біліпшицева еквівалентність на нескінченності задає відношення еквівалентності на класі належних метричних просторів. Рефлексивність очевидна, оскільки тотожне відображення поза будьякою компактною множиною є біліпшицевим. Симетричність випливає з визначення, оскільки обернене відображення також є ліпшицевим. Транзитивність отримується шляхом композиції відповідних біліпшицевих відображень після виключення достатньо великих компактів. Таким чином, можна говорити про класи біліпшицевої геометрії на нескінченності.

По-друге, у випадку належних метричних просторів наведене означення дозволяє коректно переносити низку асимптотичних властивостей з одного простору на інший. Якщо відомо, що простір Y має певні геометричні характеристики на великих масштабах – наприклад, поліноміальне зростання об’єму куль, однорідну асимптотичну структуру чи стабільну поведінку геодезичних напрямків, – то за наявності біліпшицевої еквівалентності на нескінченності аналогічні властивості можуть бути встановлені й для простору X. Саме це відкриває шлях до перенесення результатів із добре вивчених модельних просторів на складніші геометричні об’єкти.

По-третє, запропоноване означення має безпосередній зв’язок із дослідженням комплексних аналітичних множин. Хоча самі ці множини традиційно розглядаються як підмножини $\mathbb{C}^n$, їх асимптотична метрична поведінка в багатьох випадках може бути порівняна не лише з алгебраїчними підмножинами того самого простору, а й з більш загальними метричними моделями, для яких відомі оцінки об’ємного зростання та стабільність асимптотичної геометрії. У такому випадку біліпшицева еквівалентність на нескінченності стає інструментом переходу від складної аналітичної структури до простішої моделі, зберігаючи при цьому суттєві асимптотичні інваріанти.

Окремо слід наголосити, що таке узагальнення не руйнує класичної теорії, а навпаки – вбудовує її у ширший контекст. Тобто класичний евклідів випадок виступає як окремий, але дуже важливий приклад загальної метричної схеми. Це дозволяє по-новому інтерпретувати вже відомі результати, пов’язані з геометрією Ліпшиця на нескінченності, як прояви більш універсального явища – стійкості асимптотичних метричних властивостей при біліпшицевих перетвореннях поза компактами.

Таким чином, введення узагальненого поняття біліпшицевої еквівалентності на нескінченності для належних метричних просторів має не лише формальний, а й концептуальний зміст. Воно дозволяє:

- поширити класичні конструкції геометрії Ліпшиця на значно ширший клас просторів;
- виокремити власне метричні аспекти асимптотичної геометрії;
- створити основу для перенесення результатів про зростання, конусоподібність і алгебраїчність у більш загальний контекст;

- розглядати комплексні аналітичні множини не лише як підмножини евклідових просторів, а і як об'єкти ширшої великомасштабної метричної геометрії.

Саме на базі цього узагальненого означення далі можна сформулювати новий результат про зв'язок між біліпшицевою еквівалентністю на нескінченності та поліноміальним зростанням об'єму, який, у свою чергу, веде до встановлення алгебраїчності комплексної аналітичної множини.

Теорема 4.1. *Нехай* $X \subset \mathbb{C}^n$ *– чиста d-вимірна комплексна аналітична множина, наділена індукованою евклідовою метрикою, та нехай* $\left(Y, d_Y\right)$ *– належний метричний простір.*

Припустимо, що:

- X *і* Y *є біліпшицево гомеоморфними на нескінченності;*
- *у просторі* Y *виконується поліноміальне зростання об'єму, тобто існують сталі* $C > 0$ *та* $\alpha > 0$*, такі що для довільної кулі* $B_Y\left(y, r\right) \subset Y$ *виконується оцінка*
- $Vol_Y\left(B_Y\left(y, r\right)\right) \le Cr^{\alpha}$ *для всіх достатньо великих* r.

Тоді множина X *має поліноміальне зростання об'єму, а отже, згідно з теоремою Столла–Бішопа, є комплексною алгебраїчною множиною.*

Доведення. Нехай $\varphi : X \setminus K_X \to Y \setminus K_Y$ – біліпшицевий гомеоморфізм на нескінченності, де $K_X \subset X, K_Y \subset Y$ – компактні підмножини.

Тоді існує стала $L \ge 1$, така що для всіх $x_1, x_2 \in X \setminus K_X$ виконується:

$$\frac{1}{L} d_X\left(x_1, x_2\right) \le d_Y\left(\varphi\left(x_1\right), \varphi\left(x_2\right)\right) \le L d_X\left(x_1, x_2\right). \qquad (5)$$

Розглянемо довільну точку $x_0 \in X \setminus K_X$ та кулю

$$B_X\left(x_0, r\right) = \left\{x \in X : d_X\left(x, x_0\right) \le r\right\}. \qquad (6)$$

Оскільки досліджується асимптотична поведінка, можна вважати, що *r* достатньо велике, і вся відповідна частина кулі лежить поза компактною множиною K_X.

Розглянемо образ цієї кулі:

$$\varphi\left(B_X\left(x_0, r\right)\right) \subset Y. \qquad (7)$$

З біліпшицевості випливає включення:

$$\varphi\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\subset B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),L_r\right). \quad (8)$$

Аналогічно, використовуючи обернене відображення φ^{-1}, отримуємо:

$$B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),r/L\right)\subset\varphi\left(B_X\left(x_0,r\right)\right). \quad (9)$$

Таким чином, маємо двосторонню оцінку:

$$B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),r/L\right)\subset\varphi\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\subset B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),L_r\right). \quad (10)$$

Це означає, що об'єми відповідних множин задовольняють нерівності:

$$Vol_Y\left(B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),r/L\right)\right)\le Vol_Y\left(\varphi\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\right)\le Vol_Y\left(B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),L_r\right)\right). \quad (11)$$

Оскільки φ є біліпшицевим відображенням, воно зберігає міру з точністю до мультиплікативної константи. Тобто існує стала $C_1>0$, така що

$$C_1^{-1}Vol_X\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\le Vol_Y\left(\varphi\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\right)\le C_1 Vol_X\left(B_X\left(x_0,r\right)\right). \quad (12)$$

Комбінуючи наведені оцінки, отримуємо:

$$Vol_X\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\le C_2 Vol_Y\left(B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),Lr\right)\right). \quad (13)$$

З урахуванням припущення про поліноміальне зростання у просторі Y, маємо:

$$Vol_Y\left(B_Y\left(\varphi\left(x_0\right),Lr\right)\right)\le C\left(Lr\right)^{\alpha}=CL^{\alpha}r^{\alpha}. \quad (14)$$

Отже,

$$Vol_X\left(B_X\left(x_0,r\right)\right)\le C_3 r^{\alpha}, \quad (15)$$

де $C_3=C\cdot L^{\alpha}\cdot C_2$.

Таким чином, множина X також має поліноміальне зростання об'єму.

Згідно з теоремою Столла–Бішопа, це означає, що X є комплексною алгебраїчною множиною.

Зауваження 4.1. *Сформульований результат є узагальненням класичного підходу, в якому роль модельного простору відіграє сама алгебраїчна множина. У даному випадку достатньо наявності будь-якого належного метричного простору з поліноміальним зростанням, що значно розширює клас допустимих порівнянь.*

Зауваження 4.2 (про інваріантність). *Отриманий результат показує, що поліноміальне зростання об'єму є інваріантом біліпшицевої геометрії на нескінченності у класі належних метричних просторів. Це означає, що дана характеристика не залежить від конк-*

ретної реалізації простору, а визначається його асимптотичною метричною структурою.

Зауваження 4.3 (зв'язок із класичними результатами). *У випадку, коли $Y \subset \mathbb{C}^n$ є алгебраїчною множиною, отриманий результат узгоджується з теоремою Sampaio, але формулюється в більш загальному вигляді, оскільки не вимагає аналітичної структури простору Y .*

З геометричної точки зору теорема 4.1 означає, що асимптотична «швидкість розширення» простору є достатньою характеристикою для встановлення його алгебраїчної природи за умови біліпшицевої еквівалентності на нескінченності.

Інакше кажучи, якщо складна аналітична множина на великих масштабах поводиться подібно до простору з контрольованим (поліноміальним) зростанням, то її структура не може бути довільною і фактично обмежується класом алгебраїчних множин.

Це дозволяє інтерпретувати біліпшицеву геометрію на нескінченності як інструмент «редукції складності»: складні аналітичні об'єкти можуть бути досліджені через їх асимптотичну еквівалентність простішим метричним моделям.

Наслідок 4.1. *Нехай X – комплексна аналітична множина, яка біліпшицево еквівалентна на нескінченності простору з поліноміальним зростанням. Тоді X є алгебраїчною множиною.*

Варто наголосити на низці принципових аспектів запропонованого узагальнення біліпшицевої геометрії на нескінченності, які набувають особливого значення у світлі встановленого в теоремі 4.1 зв'язку між асимптотичною метричною структурою та алгебраїчністю комплексних аналітичних множин.

Передусім, ключовим є поняття поведінки на великих масштабах, яке формалізується через розгляд простору поза компактними підмножинами. Виключення компактів $K_X \subset X, K_Y \subset Y$ дозволяє абстрагуватися від локальних особливостей геометрії, таких як сингулярності, локальні викривлення чи топологічні дефекти, і зосередитися виключно на асимптотичних властивостях простору. При цьому вибір конкретних компактних множин не є істотним: якщо біліпшицевий гомеоморфізм існує поза деякими компактами, то, звужуючи область визначення, його можна розглядати і поза довільно більшими компактними множинами. Таким чином, геометрія на нескінченності визначається не локальною структурою, а класом еквівалентності «кінців» простору.

Другим важливим аспектом є еквівалентність різних формулювань біліпшицевої еквівалентності. Зокрема, замість явної вимоги гомеоморфності та ліпшицевості відображення і його оберненого, можна безпосередньо вимагати виконання двосторонньої ліпшицевої оцінки. Така умова автоматично гарантує як ін'єктивність, так і ліпшицевість оберненого відображення на відповідній області. У контексті доведення теореми 4.1 це має принципове значення, оскільки саме двосторонній контроль відстаней забезпечує перенесення об'ємних оцінок між просторами X та Y.

Особливу роль відіграє строгість біліпшицевої еквівалентності порівняно з квазіізометріями. На відміну від останніх, де допускається адитивна похибка, біліпшицеві відображення забезпечують чисто мультиплікативний контроль відстаней. Це означає, що вони зберігають тонкі метричні інваріанти, зокрема точні темпи зростання об'єму. Саме ця властивість є критичною для отриманого результату, оскільки поліноміальне зростання об'єму, яке лежить в основі теореми Столла–Бішопа, є чутливим до навіть невеликих спотворень масштабу. Таким чином, біліпшицева еквівалентність виступає достатньо сильною умовою для перенесення асимптотичних характеристик між просторами.

У випадку підмножин евклідових просторів $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ запропоноване означення повністю узгоджується з класичним підходом: існують компактні множини K_X, K_Y та біліпшицевий гомеоморфізм

$$f : X \setminus K_X \to Y \setminus K_Y . \tag{16}$$

Однак у запропонованому узагальненні цей підхід поширюється на довільні належні метричні простори, що дозволяє розглядати комплексні аналітичні множини не лише як підмножини евклідових просторів, а як об'єкти ширшої великомасштабної геометрії.

Важливим є також поняття ліпшицевої регулярності на нескінченності. Множина називається ліпшицево регулярною на нескінченності, якщо вона біліпшицево еквівалентна на нескінченності деякому модельному простору (наприклад, евклідовому простору або конусу). У контексті отриманого результату це поняття набуває додаткового змісту: воно фактично характеризує ті множини, для яких асимптотична геометрія є достатньо регулярною, щоб гарантувати контроль над об'ємним зростанням і, як наслідок, алгебраїчність.

Суттєвим є і той факт, що біліпшицева гомеоморфність на нескінченності задає відношення еквівалентності на класі належних метричних просторів. Рефлексивність забезпечується тотожним відображенням поза компактами, симетричність – існуванням біліпшицевого оберненого, а транзитивність – композицією відповідних відображень після виключення достатньо великих компактних множин. Це дозволяє говорити про класи біліпшицевої геометрії на нескінченності та розглядати їх як об'єкти класифікації.

Запропоноване узагальнення істотно розширює сферу застосування геометрії Ліпшиця на нескінченності. Зокрема, воно дозволяє розглядати не лише комплексні аналітичні та алгебраїчні множини, а й значно ширші класи метричних просторів, включаючи ріманові многовиди, простори з мірою та інші об'єкти геометричного аналізу. При цьому ключові інваріанти, такі як дотичні конуси на нескінченності та об'ємне зростання, зберігають свою фундаментальну роль.

Зокрема, біліпшицеві гомеоморфізми на нескінченності дозволяють класифікувати необмежені множини за їх асимптотичною геометрією. Якщо два простори є біліпшицево еквівалентними на нескінченності, то їхні дотичні конуси мають однакову метричну структуру, а їх об'ємні характеристики узгоджені з точністю до мультиплікативної константи. У світлі теореми 4.1 це означає, що не лише геометрична форма, але й аналітична природа множини може бути відновлена з її асимптотичних метричних властивостей.

Важливим напрямом застосування цих ідей є диференціальна геометрія, зокрема дослідження мінімальних поверхонь. Відомо, що властивість існування єдиного дотичного конуса на нескінченності (як у гіпотезі Мікса III[1]) є інваріантною відносно біліпшицевих перетворень. Це ще раз підкреслює, що геометрія на нескінченності визначає фундаментальні властивості об'єкта незалежно від його локальної реалізації.

Отриманий у статті результат дозволяє зробити важливий висновок: алгебраїчність комплексної аналітичної множини може бути встановлена виключно на основі її асимптотичної метричної поведінки. Зокрема, якщо множина є біліпшицево еквівалентною на нескінченності простору з поліноміальним зростанням об'єму, то вона сама має таке зростання, а отже, є алгебраїчною.

Це відкриває широкі можливості для практичного застосування отриманих результатів. Зокрема, стає можливим:

1) спрощення складних аналітичних моделей шляхом їх заміни алгебраїчними еквівалентами;
2) використання поліноміальних та раціональних апроксимацій для опису асимптотичної поведінки;
3) застосування методів алгебраїчної геометрії (зокрема гомогенізації, проективного замикання, роботи з ідеалами) до задач, що первісно виникають в аналітичному контексті.

[1] Гіпотеза Мікса III (Meeks' Conjecture III) — це відома відкрита проблема в диференціальній геометрії, що стосується асимптотичної структури мінімальних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Вона формулюється в контексті дослідження дотичних конусів на нескінченності та їхньої унікальності, і має глибокий зв'язок із ліпшицевою геометрією на нескінченності, адже остання описує метричну еквівалентність аналітичних об'єктів при великих масштабах.

Фактично метрика на нескінченності виступає як інструмент редукції складності: складні багатовимірні структури можуть бути замінені простішими, але еквівалентними з точки зору асимптотичних характеристик моделями.

Таким чином, запропоноване узагальнення не лише поглиблює теоретичні засади геометрії Ліпшиця на нескінченності, але й формує новий підхід до дослідження комплексних аналітичних множин, у якому ключову роль відіграють метричні інваріанти великих масштабів. Це відкриває перспективи подальших досліджень у напрямі поєднання методів алгебраїчної геометрії, метричної геометрії та геометричного аналізу.

Висновки. У результаті проведеного дослідження проаналізовано геометрію Ліпшиця на нескінченності комплексних аналітичних множин та встановлено її фундаментальний зв'язок з алгебраїчною природою таких множин.

На основі відомих результатів (зокрема теореми Sampaio) узагальнено роль біліпшицевої еквівалентності на нескінченності як інструменту класифікації аналітичних множин за їх асимптотичною геометрією. Показано, що ключові властивості, такі як існування єдиного дотичного конуса на нескінченності та біліпшицева еквівалентність алгебраїчним множинам, визначають структуру аналітичних об'єктів на великих масштабах.

Основним результатом роботи є узагальнення поняття біліпшицевої еквівалентності на нескінченності на клас належних метричних просторів та встановлення нового критерію алгебраїчності. Зокрема, доведено, що якщо комплексна аналітична множина є біліпшицево еквівалентною на нескінченності метричному простору з поліноміальним зростанням об'єму, то така множина також має поліноміальне зростання і, відповідно до теореми Столла–Бішопа, є алгебраїчною.

Отриманий результат показує, що алгебраїчність комплексних аналітичних множин може бути встановлена не лише через їх внутрішню аналітичну структуру, а й через асимптотичні метричні характеристики. Це дозволяє розглядати геометрію на нескінченності як універсальний інструмент редукції складності та переходу від аналітичних до алгебраїчних моделей.

Запропонований підхід розширює область застосування геометрії Ліпшиця, поєднуючи методи метричної геометрії, комплексного аналізу та алгебраїчної геометрії. Отримані результати відкривають перспективи подальших досліджень, зокрема у напрямі вивчення інваріантності асимптотичних характеристик, жорсткості геометричних структур та узагальнення на ширші класи метричних просторів.

Список використаних джерел:

1. Pichon A. An introduction to Lipschitz geometry of complex singularities. *arXiv*: website. 2020. URL: https://arxiv.org/abs/2007.04160 (last accessed: 24.05.2025).
2. Birbrair L., Gabrielov A. Lipschitz geometry of pairs of normally embedded Hölder triangles. *arXiv*: website. 2022. URL: https://arxiv.org/abs/2201.06132 (last accessed: 24.05.2025).
3. Chow W.-L. On Compact Complex Analytic Varieties. *American Journal of Mathematics*. 1949. Vol. 71. № 4. P. 893–914.
4. Stoll W. The growth of the area of a transcendental analytic set. *Mathematische* I. *Annalen*. 1964. Vol. 156. № 1. P. 47–78.
5. Stoll W. The growth of the area of a transcendental analytic set. II. *Mathematische Annalen*. 1964. Vol. 156. P. 144–170.
6. Bishop E. Condition for the analyticity of certain sets. *Michigan Mathematical Journal*. 1964. Vol. 11. P. 289–304.
7. Fernandes J. E. Sampaio. On Lipschitz Rigidity of Complex Analytic Sets. *Journal of Geometric Analysis* 30. 2020. P. 3351–3371. DOI: https://doi.org/-10.1007/s12220-019-00162-x; arXiv: https://arxiv.org/abs/1705.03085.
8. Meeks III Global W. H. problems in classical minimal surface theory. *In: Hoffman D. (ed.). Global Theory of Minimal Surfaces. American Mathematical Society, Clay Mathematics Institute*. 2005. P. 453–470.
9. C.-T. Lê, T.-S. Phạm. On Tangent Cones at Infinity of Algebraic Varieties. *Journal of Algebra and Its Applications* 17 (2018), 1850143. DOI: https://doi.org/-10.1142/S0219498818501438; arXiv: https://arxiv.org/abs/1603.02761.
10. Sampaio J. E. On Lipschitz Geometry at Infinity of Complex Analytic Sets. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 62. 2023. Article 69. DOI: https://doi.org/10.1007/s00526-022-02410-5; arXiv: https://arxiv.org/-abs/2207.07692.
11. Fernández de Bobadilla J., Fernandes A., Sampaio J. E. Multiplicity and Degree as Bi-Lipschitz Invariants for Complex Sets. *Journal of Topology* 11. 2018. № 4. P. 957–965. DOI: https://doi.org/10.1112/topo.12080; arXiv: https://arxiv.org/abs/1706.06614

REALIZATION OF LIPSCHITZ GEOMETRY AT INFINITY ON COMPLEX ANALYTIC SETS

The article investigates the Lipschitz geometry at infinity of complex analytic sets and its role in establishing the connection between the asymptotic metric structure and the algebraic nature of such sets. Based on known results (in particular, the Sampaio theorem), the significance of the Bialpschitz equivalence at infinity and the uniqueness of tangent cones as fundamental invariants of the asymptotic geometry of complex analytic subsets is analyzed. A generalized definition of Lipschitz and Bialpschitz homeomorphisms at infinity in terms of proper metric spaces is considered, which allows us to separate the large-scale properties of space from its local structure and provides the possibility of analyzing asymptotic behavior in a broader geometric context. It is shown that the Bialpschitz equivalence at infinity is a sufficiently strong condition for the transfer of metric invariants, in particular the characteristics of volumetric growth. The main result of the work is the establishment of a new criterion for algebraicity: it is proved that if a complex analytic set is Bialpisch equivalent at infinity to a proper metric space with polynomial volume growth, then it also has polynomial growth and, according to the Stoll–Bishop theorem, is an algebraic set. Thus, algebraicity can be characterized in terms of asymptotic metric properties without directly using the analytic structure. It is shown that Bialpisch geometry at infinity preserves subtle metric invariants, including the volume growth rates and the structure of tangent cones, which allows it to be used as an effective tool for classifying analytic sets according to their large-scale behavior. The results obtained expand the application of metric geometry methods in complex analysis and algebraic geometry, and also open up prospects for further research in the direction of studying the asymptotic rigidity, stability, and invariance of geometric structures.

Key words: *tangent cone at infinity, algebraicity, global inequality, Lipschitz regularity at infinity, mapping with bounded growth, asymptotic geometry, projective space.*

Отримано: 4.12.2025