

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.56-76

Гудима У. В.

ORCID: 0000-0002-2291-6111,

канд. фіз.-мат. наук, Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна,
E-mail: hudyma_uliana@kpnu.edu.ua

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ КВАДРАТА НОРМИ ОДНОЧАСНОГО НАБЛИЖЕННЯ КІЛЬКОХ ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ МНОЖИНОЮ ЦЬОГО ПРОСТОРУ

Важливий клас теорії наближення утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору.

Задача найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору полягає у відшуванні в заданій множині цього простору такої точки, максимальна відстань до якої від кожної з кількох фіксованих точок простору була б найменшою, тобто не перевищувала максимальної відстані від кожної з кількох точок до будь-якої іншої точки цієї множини.

Виникають задачі, зокрема задачі теорії апроксимації, в яких відхилення між фіксованими елементами лінійного нормованого простору та елементами апроксимуючої множини визначаються, так званими, «викривленими» метриками (зваженими нормами, переднормами, сублінійними функціоналами, опуклими функціоналами тощо).

Так, зокрема, у праці [1] встановлено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі найкращого у розумінні зважених відстаней одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору; у праці [2] встановлено умови екстремальності допустимого елемента для задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів деякого поліномованого простору множиною цього простору; у праці [3] доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі найкращого у розумінні переднорми наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору; у праці [4] вста-

Стаття надійшла до редакції: 18.03.2026

Рекомендовано до друку: 11.04.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

новлено умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначаються за допомогою сублінійних функціоналів; у праці [5] встановлено умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукування узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого полінормованого простору відносно множини цього простору.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклими множинами цього простору розглядаються у працях [6, 7].

Якщо в задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору, в якій відстані між точками визначаються нормою простору, норму замінити на квадрат норми, то отримаємо задачу найкращого у розумінні квадрата норми одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору, яка розглядається в цій роботі.

Ключові слова: лінійний нормований простір, квадрат норми, екстремальний елемент, умови екстремальності.

Вступ. У статті доведено еквівалентність задачі найкращого у розумінні квадрата норми одночасного наближення кількох елементів a_1, \dots, a_r лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ його множиною A задачі найкращого у розумінні квадрата норми наближення елемента (a_1, \dots, a_r) лінійного нормованого простору $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$, де Z^r – r -ий степінь множини Z , а $\|(z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r} = \max_{1 \leq i \leq r} \|z_i\|$, $(z_1, \dots, z_r) \in Z^r$, множиною $D = \{(z, \dots, z) : z \in A\}$ цього простору, встановлено умови екстремальності допустимих елементів цих еквівалентних задач.

Постановка задачі. Нехай $(Z, \|\cdot\|)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, a_1, \dots, a_r – фіксовані елементи простору Z , $A \subset Z$. Поставимо задачу відшукування величини

$$E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2, \quad (1)$$

яку назвемо задачею найкращого у розумінні квадрата норми лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ одночасного наближення елементів a_1, \dots, a_r множиною A цього простору.

Якщо існує такий елемент $z^* \in A$, що

$$E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|^2,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1).

Зрозуміло, що частковим випадком задачі відшукування величини (1) є задача відшукування величини

$$E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2, \quad (2)$$

де a – фіксований елемент простору Z , тобто задача найкращого у розумінні квадрата норми лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ наближення елемента a простору Z множиною A цього простору.

Якщо існує такий елемент $z^* \in A$, що

$$E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \|a - z^*\|^2,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукування величини (2).

В роботі спочатку досліджено задачу відшукування величини (2). Отримані при цьому результати використані при дослідженні задачі відшукування величини (1) при $r > 1$.

Актуальність теми. Перехід в екстремальних задачах, в тому числі в задачах теорії апроксимації, від норми різниці двох елементів лінійного нормованого простору як міри відхилення між ними до квадрату цієї норми зумовлений тим, що часто математичні моделі задач практичного змісту і методи їх розв'язування містять квадрати відстаней між двома елементами. Серед таких задач і методів ϵ , зокрема, задача відшукування в множині лінійного нормованого простору точки, сума квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок була б найменшою; задача відшукування в множині лінійного нормованого простору точки, відносно якої найбільший (найменший) момент інерції кількох матеріальних точок був би найменшим (найбільшим); метод найменших квадратів; задача мінімізації квадрату похибки при пошуку найкращого наближеного розв'язку системи лінійних рівнянь тощо.

Актуальність задач відшукування величин (1), (2) впливає також зі змісту цих задач, оскільки в них у множині A лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ шукається точка, найбільший квадрат відстаней від якої до кількох фіксованих точок простору Z був би найменшим.

Актуальність зазначеного вище переходу підсилюється також тим, що, зокрема, в евклідовому просторі R^n квадрат норми є диференційованою функцією на всьому просторі (на відмінну від самої норми), що спрощує пошук екстремальних елементів для відповідних екстремальних задач.

Мета роботи. Встановити умови екстремальності допустимих елементів для задач відшукування величин (1), (2).

Допоміжні твердження. Надалі, як і вище, будемо позначати через $(Z, \|\cdot\|)$ лінійний над полем дійсних чисел нормований простір (далі – лінійний нормований простір), а через $Z^* = (Z, \|\cdot\|)^*$ – простір, спряжений з $(Z, \|\cdot\|)$.

Твердження 1. Функція $p(z) = \|z\|^2$, $z \in Z$, є опуклою та неперервною на $(Z, \|\cdot\|)$. Має місце рівність

$$p^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2, \quad f \in Z^*, \quad (3)$$

де $p^*(f)$, $f \in Z^*$, – функція, спряжена з p , а $\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z, \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|}$, $f \in Z^*$.

Доведення. Опуклість функції $p(z) = \|z\|^2$, $z \in Z$, встановлюється на основі критерію опуклості власної функції (див., наприклад, [8, с. 56]), а її неперервність випливає з неперервності функції $\|z\|$, $z \in Z$. Доведемо рівність (3). З урахуванням означення спряженої функції (див., наприклад, [8, с. 64]) одержимо, що для всіх $f \in Z^*$

$$\begin{aligned} p^*(f) &= \sup_{z \in Z} (f(z) - \|z\|^2) = \sup_{y \in Z} \sup_{t \in R} (f(ty) - \|ty\|^2) = \\ &= \sup_{y \in Z} \sup_{t \in R} (tf(y) - t^2 \|y\|^2) = \max_{t \in R} \left\{ \sup_{t \in R} (tf(0) - t^2 \|0\|^2) \right\} = \\ &= \sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \sup_{t \in R} (tf(y) - t^2 \|y\|^2) \geq 0 \left\{ = \sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \sup_{t \in R} (tf(y) - t^2 \|y\|^2) = \right. \\ &= \sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \sup_{t \in R} \left(- \left((t\|y\|)^2 - 2t\|y\| \frac{f(y)}{2\|y\|} + \left(\frac{f(y)}{2\|y\|} \right)^2 \right) + \left(\frac{f(y)}{2\|y\|} \right)^2 \right) = \\ &= \sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \sup_{t \in R} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{|f(y)|}{\|y\|} \right)^2 - \left(t\|y\| - \frac{f(y)}{2\|y\|} \right)^2 \right) = \sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{|f(y)|}{\|y\|} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sup_{\substack{y \in Z, \\ y \neq 0}} \frac{|f(y)|}{\|y\|} \right)^2 = \frac{1}{4} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Справедливість рівності (3) встановлено.

Твердження доведено.

Деякі властивості цільової функції задачі відшукування величини (2) та функції найкращого наближення $E_A(a)$, $a \in Z$. Перейдемо до дослідження задачі відшукування величини (2). Функцію $E_A(a)$, $a \in Z$, будемо називати функцією найкращого у розумінні квадрата норми наближення елементів $a \in Z$ множиною $A \subset Z$ або просто функцією найкращого наближення.

Твердження 2. Цільова функція $p_a(z) = \|a - z\|^2$, $z \in Z$, задачі відшукування величини (2) є опуклою та неперервною на $(Z, \|\cdot\|)$.

Має місце рівність

$$p_a^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + f(a), \quad f \in Z^*. \quad (4)$$

Доведення. Опуклість функції $p_a(z)$, $z \in Z$, встановлюється на основі критерію опуклості власної функції (див., наприклад, [8, с. 56]) з використанням опуклості функції $p(z) = \|z\|^2$, $z \in Z$, а її неперервність випливає з неперервності $p(z)$, $z \in Z$, (див. твердження 1).

Переконаємося у справедливості рівності (4). Маємо, що $p_a(z) = \|a - z\|^2 = \|z - a\|^2 = p(z - a)$, $z \in Z$. Тоді для всіх $f \in Z^*$ $p_a^*(f) = p^*(f) + f(a)$ (див., наприклад, твердження 8.2.4 [8, с. 66]).

Згідно з твердженням 1 $p^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2$, $f \in Z^*$. З двох останніх рівностей одержуємо, що $p_a^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + f(a)$, $f \in Z^*$.

Справедливість рівності (4) встановлено.

Твердження доведено.

Теорема 1. Якщо A є опуклою множиною, то функція найкращого наближення $E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2$, $a \in Z$, є опуклою та неперервною на Z . Має місце рівність

$$E_A^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + \sup_{z \in A} f(z), \quad f \in Z^*. \quad (5)$$

Доведення. Переконаємося в опуклості функції найкращого наближення $E_A(a)$, $a \in Z$. Нехай $a_1, a_2 \in Z$, $z_1, z_2 \in A$, $\alpha \in [0, 1]$. Оскільки за умовою множина A є опуклою, то $(1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 \in A$.

З урахуванням твердження 1 отримаємо, що

$$\begin{aligned} E_A((1-\alpha)a_1 + \alpha a_2) &= \inf_{z \in A} \left\| ((1-\alpha)a_1 + \alpha a_2) - z \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| ((1-\alpha)a_1 + \alpha a_2) - ((1-\alpha)z_1 + \alpha z_2) \right\|^2 = \\ &\leq \left\| (1-\alpha)(a_1 - z_1) + \alpha(a_2 - z_2) \right\|^2 \leq \\ &\leq (1-\alpha) \|a_1 - z_1\|^2 + \alpha \|a_2 - z_2\|^2. \end{aligned}$$

Перейдемо в цій нерівності до інфімуму по $z_1 \in A$. Тоді одержимо, що

$$\begin{aligned} E_A((1-\alpha)a_1 + \alpha a_2) &\leq (1-\alpha) \inf_{z_1 \in A} \|a_1 - z_1\|^2 + \alpha \|a_2 - z_2\|^2 = \\ &= (1-\alpha) E_A(a_1) + \alpha \|a_2 - z_2\|^2. \end{aligned}$$

В останній нерівності перейдемо до інфімуму по $z_2 \in A$. Внаслідок цього одержимо, що

$$\begin{aligned} E_A((1-\alpha)a_1 + \alpha a_2) &\leq (1-\alpha) E_A(a_1) + \alpha \inf_{z_2 \in A} \|a_2 - z_2\|^2 = \\ &= (1-\alpha) E_A(a_1) + \alpha E_A(a_2). \end{aligned}$$

Це й означає, що функція найкращого наближення $E_A(a)$, $a \in Z$, є опуклою на Z . Переконаємося в неперервності функції $E_A(a)$, $a \in Z$, в будь-якій точці $a_0 \in Z$. Зафіксуємо $z_0 \in A$. Тоді

$$E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 \leq \|a - z_0\|^2, \quad a \in Z. \quad (6)$$

Згідно з твердженням 2 функція $a \in Z \rightarrow \|a - z_0\|^2 = \|z_0 - a\|^2$ є неперервною на Z , зокрема в точці a_0 . Тоді вона обмежена в деякому околі $O(a_0)$ цієї точки a_0 . Тому існує число c таке, що $\|a - z_0\|^2 \leq c$, $a \in O(a_0)$. З урахуванням цього та співвідношення (6) робимо висновок, що $E_A(a) \leq c$, $a \in O(a_0)$. Оскільки функція $E_A(a)$, $a \in Z$, є опуклою, власною та обмеженою зверху в околі $O(a_0)$ точки a_0 , то вона неперервна в цій точці (див., наприклад, теорему 7.3.1 [8, с. 59]). Оскільки точку a_0 вибрано довільно з Z , то функція $E_A(a)$, $a \in Z$, є неперервною на Z .

Перейдемо до доведення рівності (5). Згідно з означенням спряженої функції (див., наприклад, [8, с. 64]) для всіх $f \in Z^*$

$$\begin{aligned}
 E_A^*(f) &= \sup_{a \in Z} (f(a) - E_A(a)) = \sup_{a \in Z} \left(f(a) - \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 \right) = \\
 &= \sup_{a \in Z} \sup_{z \in A} \left(f(a) - \|a - z\|^2 \right) = \sup_{z \in A} \sup_{a \in Z} \left(f(a) - \|a - z\|^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Позначимо через $p_z(a) = \|a - z\|^2 = \|z - a\|^2$, $a \in Z$.

Згідно з рівністю (4)

$$\sup_{a \in Z} \left(f(a) - \|a - z\|^2 \right) = \sup_{a \in Z} \left(f(a) - \|z - a\|^2 \right) = p_z^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + f(z).$$

З урахуванням цієї рівності та рівності (7) одержимо, що

$$E_A^*(f) = \sup_{z \in A} \left(\frac{1}{4} \|f\|^2 + f(z) \right) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + \sup_{z \in A} f(z), \quad f \in Z^*.$$

Справедливість рівності (5) встановлено.

Теорему доведено.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукування величини (2).

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо A є опуклою множиною простору Z , то для будь-якого елемента $a \in Z$ справедлива рівність*

$$E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \max_{f \in Z} \left(f(a) - \frac{1}{4} \|f\|^2 - \sup_{z \in A} f(z) \right). \tag{8}$$

Доведення. Оскільки за умовою теореми множина A є опуклою множиною, то згідно з теоремою 1 функція найкращого наближення

$E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2$, $a \in Z$, є опуклою та неперервною на Z і, крім

того, $E_A^*(f) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + \sup_{z \in A} f(z)$, $f \in Z^*$. Згідно з теоремою Фенхеля-

Моро (див., наприклад, [8, с. 71]) має місце рівність

$$E_A(a) = \sup_{f \in Z^*} \left(f(a) - E_A^*(f) \right) = \sup_{f \in Z^*} \left(f(a) - \frac{1}{4} \|f\|^2 - \sup_{z \in A} f(z) \right). \tag{9}$$

Внаслідок опуклості і неперервності функції $E_A(a)$, $a \in Z$, її субдиференціал $\partial E_A(a)$ є непорожньою множиною в кожній точці $a \in Z$ (див., наприклад, [3, с. 353]).

Нехай для $a \in Z$ $f_a \in \partial E_A(a)$. Це означає, що f_a є субградієнтом функції $E_A(a)$, $a \in Z$, в точці a . Тоді $E_A(a) + E_A^*(f_a) = f_a(a)$ (див., наприклад, [8, с. 76]). Звідки отримуємо, що

$$E_A(a) = f_a(a) - E_A^*(f_a) = f_a(a) - \frac{1}{4} \|f_a\|^2 - \sup_{z \in A} f_a(z).$$

Отже, f_a є тим функціоналом із X^* , на якому реалізується супремум у правій частині рівності (9). Тому має місце рівність (8).

Теорему доведено.

Рівність (8) будемо називати співвідношенням двоїстості для задачі відшукування величини (2).

Теорема 3. *Нехай A є опуклою множиною простору Z . Для того щоб функціонал $f^* \in Z^*$ реалізував максимум у правій частині співвідношення двоїстості (8), необхідно і достатньо, щоб виконувались такі рівності:*

$$\inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \frac{1}{4} \|f^*\|^2, \quad (10)$$

$$f^*(a) - \sup_{z \in A} f^*(z) = \frac{1}{2} \|f^*\|^2. \quad (11)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $f^* \in Z^*$ і f^* реалізує максимум у правій частині співвідношення двоїстості (8). Тоді для фіксованого $z \in A$ мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 &= \left(\inf_{z \in A} \|a - z\| \right)^2 = f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z) \leq \\ &\leq f^*(a - z) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 \leq \|f^*\| \|a - z\| - \frac{1}{4} \|f^*\|^2. \end{aligned}$$

Перейшовши у цьому співвідношенні до інфімуму по $z \in A$, одержимо, що

$$\begin{aligned} \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 &= \left(\inf_{z \in A} \|a - z\| \right)^2 = f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z) \leq \\ &\leq \inf_{z \in A} f^*(a - z) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 \leq \|f^*\| \inf_{z \in A} \|a - z\| - \frac{1}{4} \|f^*\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

З (12) випливає, що

$$\left(\inf_{z \in A} \|a - z\| \right)^2 \leq \|f^*\| \inf_{z \in A} \|a - z\| - \frac{1}{4} \|f^*\|^2.$$

Звідки $\left(\inf_{z \in A} \|a - z\| - \frac{1}{2} \|f^*\| \right)^2 \leq 0$. Тому

$$\inf_{z \in A} \|a - z\| = \frac{1}{2} \|f^*\|, \quad \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \left(\inf_{z \in A} \|a - z\| \right)^2 = \frac{1}{4} \|f^*\|^2. \quad (13)$$

Співвідношення (10) встановлено.

З урахуванням (12) та (13) одержимо, що

$$\frac{1}{4} \|f^*\|^2 = f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z) \leq \|f^*\| \frac{1}{2} \|f^*\| - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 = \frac{1}{4} \|f^*\|^2.$$

Тому

$$f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z) = \frac{1}{4} \|f^*\|^2, \quad f^*(a) - \sup_{z \in A} f^*(z) = \frac{1}{2} \|f^*\|^2.$$

Рівність (11) встановлено. *Необхідність доведено.*

Достатність. Нехай для функціонала $f^* \in Z^*$ виконуються співвідношення (10), (11). З урахуванням (8), (10), (11) одержимо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|f^*\|^2 &= \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \max_{f \in Z^*} \left(f(a) - \frac{1}{4} \|f\|^2 - \sup_{z \in A} f(z) \right) \geq \\ &\geq f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z) = \frac{1}{2} \|f^*\|^2 - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 = \frac{1}{4} \|f^*\|^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \max_{f \in Z^*} \left(f(a) - \frac{1}{4} \|f\|^2 - \sup_{z \in A} f(z) \right) = f^*(a) - \frac{1}{4} \|f^*\|^2 - \sup_{z \in A} f^*(z).$$

Це й означає, що функціонал f^* реалізує максимум у правій частині співвідношення двоїстості (8).

Достатність доведено. Теорему доведено.

Критерій екстремальності допустимого елемента задачі відшукування величини (2). Надалі будемо припускати, що в задачі відшукування величини (2) $a \notin A$, оскільки очевидно, що в протилежному випадку екстремальним елементом для задачі відшукування цієї величини буде елемент $z^* = a$ та $E_A(a) = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \|a - a\|^2 = 0$.

Теорема 4. *Нехай A є опуклою множиною простору Z та $a \notin A$. Для того щоб елемент $z^* \in A$ був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (2), необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in Z^*$ з такими властивостями:*

- 1) $\|f^*\| > 0$;
- 2) $f^*(a - z^*) = \|f^*\| \|a - z^*\|$;
- 3) $f^*(z^*) = \max_{z \in A} f^*(z)$.

Доведення. Необхідність. Нехай елемент z^* множини A є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (2), тобто

$$\inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \|a - z^*\|^2. \quad (14)$$

Позначимо через f^* – функціонал простору Z^* , який реалізує максимум у правій частині співвідношення двоїстості (8). З урахуванням теореми 3 та рівностей (10), (11), (14) одержимо, що

$$\inf_{z \in A} \|a - z\|^2 = \|a - z^*\|^2 = \frac{1}{4} \|f^*\|^2 = \frac{1}{2} \left(f^*(a) - \sup_{z \in A} f^*(z) \right) \leq \\ \leq \frac{1}{2} f^*(a - z^*) \leq \frac{1}{2} \|f^*\| \|a - z^*\| = \frac{1}{2} \|f^*\| \frac{1}{2} \|f^*\| = \frac{1}{4} \|f^*\|^2 = \inf_{z \in A} \|a - z\|^2.$$

Звідси випливає, що $f^* \neq 0$ і

$$f^*(a - z^*) = \|f^*\| \|a - z^*\|, \max_{z \in A} f^*(z) = f^*(z^*).$$

Тому функціонал $f^* \in Z^*$ задовольняє умови 1)-3).

Достатність. Нехай для z^* із A існує функціонал $f^* \in Z^*$, який задовольняє умови 1)-3) теореми. З урахуванням цих умов для будь-якого $z \in A$ будемо мати, що

$$0 \leq f^*(z^*) - f^*(z) = f^*(-z) - f^*(-z^*) = f^*(a - z) - f^*(a - z^*) \leq \\ \leq \|f^*\| \|a - z\| - \|f^*\| \|a - z^*\|.$$

Оскільки $\|f^*\| > 0$, то звідси одержуємо, що

$$0 \leq \|a - z\| - \|a - z^*\|; \|a - z^*\|^2 \leq \|a - z\|^2, z \in A.$$

Це означає, що z^* є екстремальним елементом для величини (2).

Достатність доведено. Теорему доведено.

Лінійні нормовані простори $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ та $(Z^r)^* = (Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})^*$.

Нехай, як і вище, $(Z, \|\cdot\|)$ – лінійний нормований простір. Позначимо через Z^r – r -ий декартів (прямий) добуток множини Z на себе r разів.

Для $x = (x_1, \dots, x_r)$, $y = (y_1, \dots, y_r) \in Z^r$, $\alpha \in R$, покладемо:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r), \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_r).$$

Легко переконатися, що Z^r , з означеними вище операціями, є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Теорема 5 (див., наприклад, [2]). *Якщо для кожного елемента $(z_1, \dots, z_r) \in Z^r$ покласти $\|(z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r} = \max_{1 \leq i \leq r} \|z_i\|$, то $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ буде лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.*

Для того щоб елемент φ належав простору $(Z^r)^* = (Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})^*$, спряженому з $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$, необхідно і достатньо, щоб існували єдиним способом визначені функціонали $f_i \in Z^*$, $i = \overline{1, r}$, де $Z^* = (Z, \|\cdot\|)^*$,

такі, що $\varphi(z_1, \dots, z_r) = \sum_{i=1}^r f_i(z_i)$, $(z_1, \dots, z_r) \in Z^r$, причому справедлива

$$\text{рівність } \|\varphi\|_{(Z^r)^*} = \sup_{\substack{(z_1, \dots, z_r) \in Z^r, \\ (z_1, \dots, z_r) \neq 0}} \frac{|\varphi(z_1, \dots, z_r)|}{\|(z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r}} = \sum_{i=1}^r \|f_i\|.$$

Еквівалентність задачі відшукування величини (1) деякій задачі найкращого у розумінні квадрата норми простору $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ наближення елемента (a_1, \dots, a_r) простору Z^r множиною цього простору. По-

значимо через $D = \left\{ \left(\begin{array}{c} z, \dots, z \\ r \text{ разів} \end{array} \right) : z \in A \right\}$ – діагональ множини $A^r = \underbrace{A \times \dots \times A}_{r \text{ разів}}$

та розглянемо в просторі $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ задачу відшукування величини

$$\inf_{(z_1, \dots, z_r) \in D} \|(a_1, \dots, a_r) - (z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r}^2. \quad (15)$$

Зауважимо, що задача відшукування величини (15) є задачею найкращого у розумінні квадрата норми простору $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ наближення елемента $(a_1, \dots, a_r) \in Z^r$ множиною $D \subset Z^r$, тобто задачею типу задачі відшукування величини (2). Тому при її дослідженні можна використовувати результати дослідження задачі відшукування величини (2) з урахуванням специфіки просторів $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})$ та $(Z^r, \|\cdot\|_{Z^r})^*$.

Теорема 6. *Має місце рівність*

$$E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \inf_{(z_1, \dots, z_r) \in D} \|(a_1, \dots, a_r) - (z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r}^2. \quad (16)$$

Для того щоб елемент $z^ \in A$ був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент (z^*, \dots, z^*) був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (15).*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2 праці [2].

Зауважимо, що згідно з теоремою 6 задачі відшукування величин (1) та (15) можна вважати еквівалентними.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукування величини (1).

Теорема 7. *Якщо A є опуклою множиною простору Z , то для будь-яких елементів $a_1, \dots, a_r \in Z$ справедлива рівність*

$$\begin{aligned}
 E_A(a_1, \dots, a_r) &= \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \\
 &= \max_{f_i \in Z^*, i=1, \dots, r} \left[\sum_{i=1}^r f_i(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i\| \right)^2 - \sup_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i \right)(z) \right]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Доведення. Легко перекоонатися, що за умови опуклості множини A простору Z множина D є опуклою множиною простору Z^r . З урахуванням теорем 2 та 6 тоді одержимо, що

$$\begin{aligned}
 \inf_{(z_1, \dots, z_r) \in D} \|(a_1, \dots, a_r) - (z_1, \dots, z_r)\|_{Z^r}^2 &= \inf_{z \in A} \|(a_1, \dots, a_r) - (z, \dots, z)\|_{Z^r}^2 = \\
 &= \max_{\varphi \in (Z^r)^*} \left(\varphi(a_1, \dots, a_r) - \frac{1}{4} \|\varphi\|_{(Z^r)^*}^2 - \sup_{z \in A} \varphi(z, \dots, z) \right) = \quad (18) \\
 &= \varphi^*(a_1, \dots, a_r) - \frac{1}{4} \|\varphi^*\|_{(Z^r)^*}^2 - \sup_{z \in A} \varphi^*(z, \dots, z).
 \end{aligned}$$

Відповідно до теореми 5 існують єдиним способом визначені функціонали $f_i^* \in Z^*$, $i = \overline{1, r}$, такі, що $\varphi^*(z_1, \dots, z_r) = \sum_{i=1}^r f_i^*(z_i)$, $(z_1, \dots, z_r) \in Z^r$. З урахуванням цього, теореми 6 та співвідношення (18) одержимо, що

$$\begin{aligned}
 E_A(a_1, \dots, a_r) &= \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^r f_i^*(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right)^2 - \sup_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i^* \right)(z). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Якщо ж $f_i \in Z^*$, $i = \overline{1, r}$, а $\varphi(z_1, \dots, z_r) = \sum_{i=1}^r f_i(z_i)$, $(z_1, \dots, z_r) \in Z^r$, то згідно з теоремою 5 $\varphi \in (Z^r)^*$, $\|\varphi\|_{(Z^r)^*} = \sum_{i=1}^r \|f_i\|$. З урахуванням (18) та (19) тоді одержимо, що

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^r f_i(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i\| \right)^2 - \sup_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i \right)(z) &= \\
 &= \varphi(a_1, \dots, a_r) - \frac{1}{4} \|\varphi\|_{(Z^r)^*}^2 - \sup_{z \in A} \varphi(z, \dots, z) \leq \\
 &\leq \varphi^*(a_1, \dots, a_r) - \frac{1}{4} \|\varphi^*\|_{(Z^r)^*}^2 - \sup_{z \in A} \varphi^*(z, \dots, z) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^r f_i^*(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right)^2 - \sup_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i^* \right)(z) = \\
 &= E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2.
 \end{aligned}$$

Звідси й випливає справедливість рівності (17).

Теорему доведено.

Рівність (17) будемо називати співвідношенням двоїстості для задачі відшукування величини (1).

Наслідок 1. *Якщо A є підпростором простору Z , то для будь-яких елементів $a_1, \dots, a_r \in Z$ справедлива рівність*

$$E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \max_{\substack{f_i \in Z^*, i=1, r, \\ \sum_{i=1}^r f_i \in A^\perp}} \left(\sum_{i=1}^r f_i(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i\| \right)^2 \right),$$

де A^\perp – анулятор підпростору A , тобто

$$A^\perp = \left\{ f \in Z^* : f(z) = 0, z \in A \right\}.$$

Наслідок 2. *Нехай z_1, \dots, z_n – фіксовані елементи простору Z ,*

$$A = \left\{ z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j : \lambda_j \in R, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Тоді для будь-яких елементів $a_1, \dots, a_r \in Z$ справедлива рівність

$$E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \max_{\substack{f_i \in Z^*, i=1, r, \\ \left(\sum_{i=1}^r f_i \right)(z_j) = 0, j = \overline{1, n}}} \left(\sum_{i=1}^r f_i(a_i) - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i\| \right)^2 \right).$$

Теорема 8. *Нехай A є опуклою множиною простору Z . Для того щоб функціонали $f_i^* \in Z^*$, $i = \overline{1, r}$, реалізовували максимум у правій частині співвідношення двоїстості (17), необхідно і достатньо, щоб мали місце такі рівності:*

$$\begin{aligned}
 \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right)^2, \\
 \sum_{i=1}^r f_i^*(a_i) - \sup_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i^* \right)(z) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right)^2.
 \end{aligned}$$

Справедливість теореми випливає з теорем 2-7.

Критерій екстремальності допустимого розв'язку для задачі відшукування величини (1). Надалі будемо припускати, що в задачі відшукування величини (1) $(a_1, \dots, a_r) \notin D$, оскільки очевидно, що в протилежному випадку існує така точка $z^* \in A$, що $a_1 = \dots = a_r = z^*$. Ця точка і буде екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), а $E_A(a_1, \dots, a_r) = \inf_{z \in A} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 = \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|^2 = 0$.

Крім того, для $z^* \in A$ через I^* будемо позначати множину тих індексів $i \in \{1, \dots, r\}$, на яких реалізується максимум у виразі $\max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|$, тобто $I^* = \left\{ i \in \{1, \dots, r\} : \|a_i - z^*\| = \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \right\}$.

Теорема 9. Нехай A є опуклою множиною простору Z та $(a_1, \dots, a_r) \notin D$. Для того щоб елемент $z^* \in A$ був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), необхідно і достатньо існування функціоналів $f_i^* \in Z^*$, $i \in I^*$, з такими властивостями:

- 1) $\sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| > 0$;
- 2) $f_i^*(a_i - z^*) = \|f_i^*\| \|a_i - z^*\|$, $i \in I^*$;
- 3) $\max_{z \in A} \left(\sum_{i \in I^*} f_i^* \right)(z) = \left(\sum_{i \in I^*} f_i^* \right)(z^*)$.

Доведення. Необхідність. Нехай елемент z^* множини A є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1). Згідно з теоремою 6 елемент (z^*, \dots, z^*) є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (15). Оскільки D є опуклою множиною та $(a_1, \dots, a_r) \notin D$, то відповідно до теореми 4 існує функціонал $\varphi^* \in (Z^r)^*$ з такими властивостями:

- 1') $\|\varphi^*\| > 0$;
- 2') $\varphi^*((a_1, \dots, a_r) - (z^*, \dots, z^*)) = \|\varphi^*\| \|(a_1, \dots, a_r) - (z^*, \dots, z^*)\|$;
- 3') $\varphi^*(z^*, \dots, z^*) = \max_{z \in A} \varphi^*(z, \dots, z)$.

Оскільки $\varphi^* \in (Z^r)^*$, то згідно з теоремою 5 існують єдиним способом визначені функціонали $f_i^* \in Z^*$, $i = \overline{1, r}$, такі, що

$$\varphi^*(z_1, \dots, z_r) = \sum_{i=1}^r f_i^*(z_i), \quad (z_1, \dots, z_r) \in Z^r, \quad (20)$$

причому справедлива рівність

$$\|\varphi^*\|_{(Z^r)^*} = \sum_{i=1}^r \|f_i^*\|. \quad (21)$$

Зі співвідношень 1'), 2'), 3'), (20), (21) отримаємо, що

$$\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| > 0; \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^r f_i^*(a_i - z^*) = \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|; \quad (23)$$

$$\max_{z \in A} \left(\sum_{i=1}^r f_i^* \right)(z) = \left(\sum_{i=1}^r f_i^* \right)(z^*). \quad (24)$$

З урахуванням (22), (23) одержимо, що

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| &= \sum_{i=1}^r f_i^*(a_i - z^*) \leq \sum_{i=1}^r (\|f_i^*\| \|a_i - z^*\|) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^r \left(\|f_i^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \right) = \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \sum_{i=1}^r \|f_i^*\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^r \|f_i^*\| \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| &= \sum_{i=1}^r f_i^*(a_i - z^*) = \\ &= \sum_{i=1}^r (\|f_i^*\| \|a_i - z^*\|) = \sum_{i=1}^r \left(\|f_i^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Позначимо $I_* = \{1, \dots, r\} \setminus I^*$. Переконаємося, що для всіх $i \in I_*$ $\|f_i^*\| = 0$ ($f_i^* = 0$). Припустимо, що існує $i_0 \in I_*$, для якого $0 < \|f_{i_0}^*\|$. Оскільки $\|a_{i_0} - z^*\| < \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|$, то з двох останніх нерівностей одержуємо, що $\|f_{i_0}^*\| \|a_{i_0} - z^*\| < \|f_{i_0}^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|$.

Для $i \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i_0\}$ маємо, що $\|f_i^*\| \|a_i - z^*\| \leq \|f_i^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|$.

Тому $\sum_{i=1}^r (\|f_i^*\| \|a_i - z^*\|) < \sum_{i=1}^r (\|f_i^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|)$, що суперечить (25).

Тому $f_i^* = 0$ ($\|f_i^*\| = 0$) $i \in I_*$. З урахуванням цього та (25) отримаємо,

$$\text{що } \sum_{i \in I^*} f_i^*(a_i - z^*) = \sum_{i \in I^*} (\|f_i^*\| \|a_i - z^*\|).$$

Оскільки $f_i^*(a_i - z^*) \leq \|f_i^*\| \|a_i - z^*\|$, $i \in I^*$, то звідси випливає, що $f_i^*(a_i - z^*) = \|f_i^*\| \|a_i - z^*\|$, $i \in I^*$. Рівність 2) встановлено. Рівності 1) та 3) випливають з рівностей (22) та (24) відповідно, оскільки, як встановлено вище, $f_i^* = 0$, $i \in I_*$. *Необхідність доведено.*

Достатність. Нехай для $z^* \in A$ існують функціонали $f_i^* \in Z^*$, $i \in I^*$, для яких виконуються умови 1)-3) теореми. Тоді для всіх $z \in A$ одержимо:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i \in I^*} f_i^*(z^*) - \sum_{i \in I^*} f_i^*(z) = \sum_{i \in I^*} f_i^*(-z) - \sum_{i \in I^*} f_i^*(-z^*) = \\ &= \sum_{i \in I^*} f_i^*(a_i - z) - \sum_{i \in I^*} f_i^*(a_i - z^*) = \sum_{i \in I^*} f_i^*(a_i - z) - \sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| \|a_i - z^*\| \leq \\ &\leq \sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| \|a_i - z\| - \sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \leq \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\| \sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| - \\ &- \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| = \left(\max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\| - \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \right) \left(\sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| \right). \end{aligned}$$

Оскільки згідно 1) $\sum_{i \in I^*} \|f_i^*\| > 0$, то звідси одержуємо, що

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\| &\geq \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|, \quad \left(\max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\| \right) \geq \left(\max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\| \right)^2, \\ \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z\|^2 &\geq \max_{1 \leq i \leq r} \|a_i - z^*\|^2, \quad z \in A. \end{aligned}$$

Це й означає, що z^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1).

Достатність доведено. Теорему доведено.

Наслідок 3. Нехай в задачі відшукування величини (1) A є підпростором простору Z та $(a_1, \dots, a_r) \notin D$. Для того щоб елемент $z^* \in A$ був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), необхідно і достатньо існування функціоналів $f_i^* \in Z^*$, $i \in I^*$, таких, які задовольняють умовам 1), 2) теореми 9 та умові

$$3') \sum_{i \in I^*} f_i^* \in A^\perp, \text{ тобто } \left(\sum_{i \in I^*} f_i^* \right)(z) = 0, z \in A.$$

Наслідок 4. Нехай z_1, \dots, z_n – фіксовані елементи простору Z ,

$$A = \left\{ z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j : \lambda_j \in R, j = \overline{1, n} \right\}, \quad (a_1, \dots, a_r) \notin D. \text{ Для того щоб елемент } z^* \in A \text{ був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), необхідно і достатньо існування функціоналів } f_i^* \in Z^*, i \in I^*, \text{ таких, які задовольняють умовам 1), 2) теорема 9 та умові}$$

3'') $\left(\sum_{i \in I^*} f_i^* \right) (z_j) = 0, j = \overline{1, n}.$

$$3'') \left(\sum_{i \in I^*} f_i^* \right) (z_j) = 0, j = \overline{1, n}.$$

Достатня умова екстремальності допустимого елемента для задачі відшукування величини (1) у випадку довільної множини A та критерій колмогоровського типу екстремальності цього елемента у випадку, коли A є опуклою множиною.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 10. Нехай в задачі відшукування величини (1) A є довільною множиною, $z^* \in A$. Якщо для кожного $z \in A$ існують такі функціонали $f_i^z \in Z^*, i \in I^*$, що

- 1) $\sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| > 0$;
- 2) $f_i^z(a_i - z^*) = \|f_i^z\| \|a_i - z^*\|, i \in I^*$;
- 3) $\left(\sum_{i \in I^*} f_i^z \right) (z - z^*) \leq 0$,

то z^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1).

Доведення. Згідно з умовами теореми для кожного $z \in A$ одержимо, що

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left(\sum_{i \in I^*} f_i^z \right) (z - z^*) = \sum_{i \in I^*} f_i^z(a_i - z^*) - \sum_{i \in I^*} f_i^z(a_i - z) \geq \\ &\geq \sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| \|a_i - z^*\| - \sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| \|a_i - z\| \geq \\ &\geq \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\| \sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| - \sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| \max_{i \in I^*} \|a_i - z\| = \\ &\sum_{i \in I^*} \|f_i^z\| \left(\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\| - \max_{i \in I^*} \|a_i - z\| \right) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i \in I} \|f_i^z\| \left(\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\| - \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z\| \right).$$

Звідси випливає, що

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z\|, \left(\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\| \right)^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z\| \right)^2, \\ \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z^*\|^2 \leq \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - z\|^2, z \in A.$$

Це й означає, що z^* є екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1). **Теорему доведено.**

Теорема 11. *Нехай в задачі відшукування величини (1) A є опуклою множиною простору Z та $(a_1, \dots, a_r) \notin D$, $z^* \in A$. Для того щоб елемент z^* був екстремальним елементом для задачі відшукування величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $z \in A$ існували такі функціонали $f_i^z \in Z^*$, $i \in I^*$, для яких виконуються умови 1)-3) теореми 10.*

Доведення. Необхідність. Нехай z^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки за умовою теореми A є опуклою множиною простору Z та $(a_1, \dots, a_r) \notin D$, то відповідно до теореми 9 існують функціонали $f_i^* \in Z^*$, $i \in I^*$, для яких виконуються умови 1)-3) цієї теореми. Для кожного $z \in A$ покладемо $f_i^z = f_i^*$, $i \in I^*$. Тоді функціонали $f_i^z \in Z^*$, $i \in I^*$, і, згідно з умовами 1)-3) теореми 9, задовольняють умовам 1)-3) теореми 10. **Необхідність доведено.**

Справедливість достатності теореми випливає з теореми 10.

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі найкращого в розумінні квадрата норми одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В., Гнатюк В.О. Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 17. С. 33-48.

2. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукування узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого поліномованого простору відносно множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип. 25: Пам'яті доктора технічних наук, професора, почесного академіка НАПНУ Анатолія ВЕРЛАНЯ. С. 52-69.
3. Laurent P-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Herman, Paris, 1972. 531p.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в поліномованому просторі, в якій відхилення між елементами визначається з допомогою сублінійних функціоналів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 24. С. 45-63.
5. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукування узагальненого чебишовського центра кількох замкнених куль деякого поліномованого простору відносно множини цього простору. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. Вінниця: ВДПУ, 2025. Том 2, № 1. С. 9-23.
6. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. *Український математичний журнал*. 1996. Вип. 48. № 97. С. 1183-1193.
7. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення. *Доповіді НАН України*. 1995. № 6. С. 23-26.
8. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с.

References:

1. Hudyma U. V., Hnatiuk V.O. Kryterii uzahalnenoho chebyshevskoho u rozuminni zvezhenykh vzdstanei tsentra kilkokh tochok liniinoho normovanoho prostoru vidnosno opukloi mnozhyuny tsoho prostoru. *Matematychnе ta kompiuterne modeliuвання. Serii: Fizyko-matematychni nauky*: zб. nauk. prats. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiiienka, 2018. Vyp. 17. S. 33-48.
2. Hudyma U. V., Hnatiuk V. O. Umovy ekstremalnosti dopustymoho elementa dlia zadachi vidshukannia uzahalnenoho chebyshevskoho tsentra kilkokh tochok deiakoho polinormovanoho prostoru vidnosno mnozhyuny tsoho prostoru. *Matematychnе ta kompiuterne modeliuвання. Serii: Fizyko-matematychni nauky*: zб. nauk. prats. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiiienka, 2024. Vyp. 25: Pamiati doktora tekhnichnykh nauk, profesora, pochesnoho akademika NAPNU Anatoliia VERLANIA. S. 52-69.

3. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Herman, Paris, 1972. 531 p.
4. Hudyma U. V., Hnatiuk V. O. Umovy isnuvannia ekstremalnoho elementa uzahalnoi zadachi Shteinera v polinormovanomu prostori, v yakii vidkhylennia mizh elementamy vyznachaietsia z dopomohoiu subliniinykh funktsionaliv. *Matematychni ta kompiuterne modeliuвання. Serii: Fizyko-matematychni nauky*: zb. nauk. prats. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiiienka, 2023. Vyp. 24. S. 45-63.
5. Hudyma U.V., Hnatiuk V.O. Umovy ekstremalnosti dopustymoho elementa dlia zadachi vidshukannia uzahalnenoho chebyshevskoho tsentra kilkokh zamknyenykh kul deiakoho polinormovanoho prostoru vidnosno mnozhyny tsoho prostoru. *Matematyka, informatyka, fizyka: nauka ta osvita*. Vinnytsia: VDPU, 2025. Tom 2, № 1. S. 9-23.
6. Hnatiuk Yu.V. Osnovni vlastyvoli zadachi naikrashchoho odnochasnoho nablyzhennia kilkokh elementiv. *Ukrainskyi matematychnyi zhurnal*. 1996. Vyp. 48. № 97. S. 1183-1193.
7. Hnatiuk Yu.V. Dvoisti spivvidnoshennia dlia zadachi naikrashchoho za drobovo-opukloiu funktsiiei nablyzhennia kilkokh elementiv ta kryterii elementa naikrashchoho nablyzhennia. *Dopovidi NAN Ukrainy*. 1995. № 6. S. 23-26.
8. Hudyma U. V., Hnatiuk V. O. Opuklyi analiz: navchalnyi posibnyk. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiiienka, 2019. 112 s.

CONDITIONS OF EXTREMALITY OF AN ADMISSIBLE ELEMENT FOR THE PROBLEM OF BEST SIMULTANEOUS APPROXIMATION IN THE SENSE OF THE SQUARED NORM OF SEVERAL ELEMENTS OF A LINEAR NORMED SPACE BY A SUBSET OF THIS SPACE

An important class in approximation theory is formed by problems of best simultaneous approximation of several elements of a linear normed space by a subset of this space.

The problem of best simultaneous approximation of several elements of a linear normed space by a subset of this space consists in finding, within a given subset of the space, a point for which the maximum distance to each of several fixed points of the space is minimal, that is, does not exceed the maximal distance from each of these points to any other point of the given subset.

There arise problems, in particular in approximation theory, in which the deviations between fixed elements of a linear normed space and elements of the approximating set are defined by so-called distorted metrics (weighted norms, seminorms, sublinear functionals, convex functionals, etc.).

In particular, in [1] a criterion of extremality of an admissible element was established for the problem of best simultaneous approximation, in the sense of weighted distances, of several elements of a linear normed space by a convex subset of this space; in [2] conditions of extremality of an admissible element were obtained for the problem of best simultaneous ap-

proximation of several elements of a certain polynormed space by a subset of this space; in [3] a criterion of extremality of an admissible element was proved for the problem of best approximation, in the sense of a seminorm, of an element of a linear normed space by a convex subset of this space; in [4] conditions for the existence of an extremal element were established for a generalized Steiner problem in a polynormed space, where deviations between elements are defined by sublinear functionals; in [5] conditions of extremality of an admissible element were established for the problem of finding a generalized Chebyshev center of several closed balls in a certain polynormed space relative to a subset of this space.

From a unified standpoint, problems of best simultaneous approximation of several elements of a linear normed space by convex subsets of this space are considered in [6, 7].

If, in the problem of best simultaneous approximation of several elements of a linear normed space where distances between points are defined by the norm, the norm is replaced by the square of the norm, one obtains the problem of best simultaneous approximation in the sense of the squared norm, which is studied in this paper.

Key words: *linear normed space, squared norm, extremal element, extremality conditions.*