ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 29. P. 100-112.

УДК 519.624.2:517.988
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.100-112

Пархоменко В. Г.
ORCID: 0009-0008-7309-0875,
Харківський національний університет
радіоелектроніки, м. Харків, Україна,
E-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua

АНАЛІЗ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДОДАТНИХ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА З СИНГУЛЯРНОЮ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

У роботі проведено аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного диференціального рівняння з оператором Гельмгольца та сингулярною степеневою нелінійністю.

Задача розглядається у круговій області з однорідною умовою Діріхле на межі. Нелінійність носить антимонотонний характер і описується степеневою залежністю, де показник степеню набуває значень від –1 до 0. Шляхом переходу до полярних координат і з урахуванням того, що розв'язок має аксіальну симетрію (тобто залежність від кута повороту відсутня, а наявна лише залежність від відстані до центру круга), одержано крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння. При цьому полюс полярної системи координат є особливою точкою цього рівняння, і тоді постає необхідність у накладанні на розв'язок умови обмеженості в цій точці.

Для задачі будується функція Гріна з подальшим зведенням до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, що розглядається як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі неперервних на відрізку функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних на цьому відрізку функцій. Досліджено властивості відповідного інтегрального оператора такі, як антимонотонність (антитонність), додатність, обмеженість і псевдоувігнутість.

Наступним етапом дослідження є знаходження кінців сильно інваріантного конусного відрізка, що є початковими наближеннями для ітераційного процесу. Після цього здійснюється побудова двох паралельних ітераційних процесів. Перша ітераційна послідовність є неспадною за конусом (послідов-

Стаття надійшла до редакції: 19.03.2026
Рекомендовано до друку: 04.04.2026
Оприлюднено (online): 15.05.2026
Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

© Пархоменко В. Г., 2026

ність нижніх наближень), а друга – незростаючою за конусом (послідовність верхніх наближень). За поточне наближення на кожній ітерації обирається середнє арифметичне верхнього та нижнього наближень. Таким чином, на кожному кроці ітераційного процесу одержується апостеріорна оцінка похибки. Зроблено висновок про існування та єдиність додатного аксіально-симетричного розв'язку розглядуваної задачі.

Теоретичні результати, отримані в роботі, було підтверджено шляхом проведення обчислювального експерименту. Проаналізовано залежність розв'язку і швидкість збіжності ітераційного процесу від параметрів рівняння, що наведено на відповідних графіках.

Ключові слова: *аксіально-симетричний додатний розв'язок, антимонотонний оператор, інтегральне рівняння Гаммерштейна, метод двобічних наближень, нелінійна крайова задача, напівлінійне еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца, сильно інваріантний конусний відрізок, функція Гріна.*

Вступ. У сучасних дослідженнях значна увага приділяється розвитку методів математичного моделювання процесів, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних. Одним із важливих класів таких моделей є крайові задачі для еліптичних рівнянь, зокрема рівнянь вигляду [1]

$$-\Delta u+\kappa^2 u=f(\mathbf{x},u)\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,.$$

Це рівняння узагальнює класичні моделі дифузійних, теплових та потенціальних процесів. Подібні рівняння виникають у задачах теплопровідності з нелінійними джерелами, у моделях реакції-дифузії, електростатики, теорії пружності, біофізичних та хімічних процесів. Наявність нелінійної залежності правої частини від шуканої функції дозволяє враховувати складні ефекти взаємодії, насичення або внутрішніх джерел, що робить такі моделі більш адекватними для опису реальних явищ.

Якщо область Ω є кругом радіуса R, то можна поставити задачу знаходження аксіально-симетричного розв'язку рівняння, тобто розв'язку, що залежить лише від $\rho=|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, де $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$. Тоді вихідна задача для рівняння з частинними похідними зведеться до крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння.

Через обмеженість класу задач для напівлінійних диференціальних рівнянь, у яких можливо знайти точний розв'язок, виникає необхідність у чисельному розв'язанні цих задач з використанням, наприклад, сіткових, варіаційних чи ітераційних методів. Через зручність обчислювальної реалізації, а також завдяки властивості самовиправності, найбільш зручними є ітераційні методи. Особливої уваги серед ітераційних методів заслуговують методи двобічних наближень, оскільки вони є як універсальним засобом дослідження існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і надають можливість фактичного їх знаходження. Окрім того, двобічні наближення дозволяють одержати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу, що дає зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Теоретичним підґрунтям розробки двобічних ітераційних методів є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Ці методи були застосовані до нелінійних диференціальних рівнянь у роботах [3, 10, 11]. Вже мало місце дослідження аксіально-симетричних розв'язків для рівняння з оператором Гельмгольца, але розглядався тільки випадок монотонної степеневої нелінійності [3]. Саме тому є необхідним дослідити випадки з іншими характерами нелінійності.

Таким чином, наукова задача вдосконалення існуючих методів двобічних наближень у застосування їх до задачі знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь з оператором Гельмгольца та степеневою антимонотонною (сингулярною) нелінійністю є актуальною.

Дана стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [2-7, 10-13], в частині їх перенесення на випадок двовимірного напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца і антимонотонною степеневою нелінійністю.

1. Постановка задачі. У одиничному крузі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

розглядатимемо напівлінійне стаціонарне рівняння

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \mu u^{-q}, \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

з однорідною крайовою умовою першого роду (умова Діріхле)

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\kappa > 0$, $q > 0$, $\mu > 0$.

Задача (1), (2) є математичною моделлю стаціонарних процесів у системах типу дифузія-реакція з сингулярною нелінійністю, що виникають у теплопровідності, хімічній кінетиці, популяційній динаміці, електростатиці тощо. Тут, наприклад, κ – коефіцієнт втрат тепла, а нелінійність у правій частині задає потужність джерел тепла. Оператор $Lu = \Delta u - \kappa^2 u$ є оператором Гельмгольца.

Поставимо задачу знаходження додатного аксіально-симетричного розв'язку крайової задачі (1), (2).

2. Основна частина. Розв'яжемо задачу (1), (2) за допомогою методу двобічних наближень, заснованого на використання методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [8, 9].

У задачі (1), (2) перейдемо до полярної системи координат за формулами

$$x_1 = \rho\cos\varphi\,,\; x_2 = \rho\sin\varphi\,,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi\,,\; \rho \ge 0\,.$$

Оператор Гельмгольца у полярній системі координат має вигляд

$$Lu = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \kappa^2 u\,.$$

Оскільки поставлено задачу відшукання аксіально-симетричного розв'язку $u = u(\rho)$ задачі (1), (2), то рівняння (1) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) + \kappa^2 u = \mu u^{-q}\,. \qquad (3)$$

Крайова умови (2), задана на колі $|\mathbf{x}| = 1$, зводиться до вигляду

$$u(1) = 0\,.$$

Оскільки точка $\rho = 0$ є особливою точкою рівняння (3), то ще потрібно поставити умову обмеженості розв'язку при $\rho = 0$:

$$|u(0)| < +\infty\,.$$

Таким чином, задача (1), (2) зводиться до крайової задачі

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) + \kappa^2 u = \mu u^{-q}\,,\; \rho \in (0,1)\,, \qquad (4)$$

$$|u(0)| < +\infty\,,\; u(1) = 0\,. \qquad (5)$$

Функція Гріна задачі (4), (5) має вигляд [3]

$$G(\rho,s) = \begin{cases} \dfrac{I_0(\kappa\rho)[I_0(\kappa)K_0(\kappa s) - K_0(\kappa)I_0(\kappa s)]}{I_0(\kappa)}, & 0 \le \rho \le s, \\ \dfrac{I_0(\kappa s)[I_0(\kappa)K_0(\kappa\rho) - K_0(\kappa)I_0(\kappa\rho)]}{I_0(\kappa)}, & s < \rho \le 1, \end{cases} \qquad (6)$$

де $I_0(z)$ та $K_0(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду відповідно.

Тоді задача (4), (5) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\rho) = \mu\int_0^1 Q(\rho,s)u^{-q}(s)ds\,, \qquad (7)$$

де $Q(\rho,s) = sG(\rho,s)$.

Функція $Q(\rho,s)$ є додатною; її графік зображено на рис. 1.

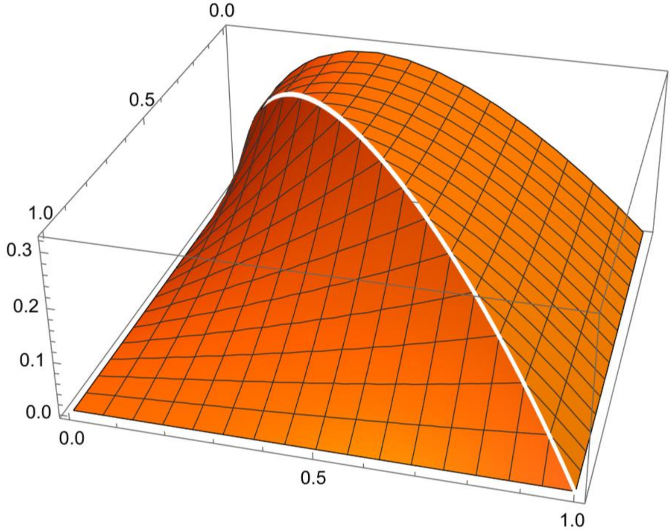

Рис. 1. *Графік функції* $Q(\rho, s)$

Означення. *Узагальненим розв'язком крайової задачі (4), (5) назвемо функцію* $u^* \in C[0,1]$*, що є розв'язком інтегрального рівняння (7).*

У сенсі даного означення розуміється еквівалентність крайової задачі (4), (5) та інтегрального рівняння (7).

Пов'яжемо з рівнянням (7) нелінійний інтегральний оператор, що діє у просторі $C[0,1]$ за наступним правилом:

$$T(u)(\rho) = \int_0^1 Q(\rho, s) u^{-q}(s) ds \,. \tag{8}$$

Тоді рівняння (7) можна подати у вигляді $u = \mu T(u)$. Дане рівняння розглядатимемо в банаховому просторі $C[0,1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $C[0,1]$ функцій [8, 9, 12].

Властивості оператора T досліджуються аналогічно, як це було проведено в [2, 10], і має місце наступна лема.

Лема. *Оператор* T*, що діє за правилом (8), має такі властивості:*

а) є додатним оператором;
б) є антимонотонним оператором, якщо $q > 0$*;*
в) є псевдоувігнутим і навіть u_0*-псевдоувігнутим, якщо* $q \in (0,1)$*,*

де $u_0(\rho) = \dfrac{1}{\kappa^2}\left(1 - \dfrac{I_0(\kappa\rho)}{I_0(\kappa)}\right)$.

Нехай $K(u_0)$ – множина тих елементів $u \in K_+$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \le u \le \beta u_0$. Оператор T перетворює конус K_+ в $K(u_0)$, тому кінці сильно інваріантного конусного відрізку $< v_0, w_0 >$ шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0 ,\ w_0 = \beta u_0 .$$

Умови, що визначають кінці сильно інваріантного конусного відрізка, приводять до наступних нерівностей для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$):

$$\mu \beta^{-q} \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^{-q}(s) ds \ge \alpha u_0(\rho) \text{ для всіх } \rho \in [0,1], \tag{9}$$

$$\mu \alpha^{-q} \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^{-q}(s) ds \le \beta u_0(\rho) \text{ для всіх } \rho \in [0,1]. \tag{10}$$

Нерівності (9) і (10) можуть бути зведені до вигляду

$$\alpha \le \mu m \beta^{-q} ,\ \beta \ge \mu M \alpha^{-q} , \tag{11}$$

де $m = \min\limits_{\rho \in [0,1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^{-q}(s) ds$, $M = \max\limits_{\rho \in [0,1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^{-q}(s) ds$.

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка обиратимемо за початкові наближення при реалізації ітераційного процесу, а отже, для його швидшої збіжності слід обрати максимальне значення α і мінімальне значення β, що задовольняють нерівності (11). Таким чином, остаточно одержимо, що для величин α і β, які визначають кінці $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ сильно інваріантного конусного відрізка, обираємо значення

$$\alpha = (m M^{-q} \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}} ,\ \beta = (m^{-q} M \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}} , \tag{12}$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Рівності (12) задають розв'язок системи рівнянь, що відповідає системі нерівностей (11).

Для крайової задачі (4), (5) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(\rho) = \mu \int_0^1 Q(\rho, s) [w^{(n-1)}(s)]^{-q} ds ,\ n = 1, 2, \ldots , \tag{13}$$

$$w^{(n)}(\rho) = \mu \int_0^1 Q(\rho, s) [v^{(n-1)}(s)]^{-q} ds ,\ n = 1, 2, \ldots , \tag{14}$$

$$v^{(0)}(\rho) = \alpha u_0(\rho)\,,\; w^{(0)}(\rho) = \beta u_0(\rho)\,. \tag{15}$$

З огляду на властивості оператора T можна зробити висновок, що ітераційний процес (13)-(15) з двох боків збігається до єдиного в конусі K_+ додатного розв'язку крайової задачі (4), (5), а саме має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай* $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$ *– одиничний круг в* $\mathbb{R}^2$. *Крайова задача*

$$-\Delta u + \kappa^2 u = \mu u^{-q}\,,\; \mathbf{x} \in \Omega\,,$$

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0$$

при $\mu > 0$, $q \in (0,1)$ *має єдиний додатний аксіально-симетричний розв'язок*

$$u^*(\rho) = u^*\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою (13)-(15).

Двобічна збіжність послідовних наближень (13)-(15) розуміється у сенсі виконання ланцюга нерівностей

$$\alpha u_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(n)} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w^{(n)} \le \ldots w^{(1)} \le w^{(0)} \le \beta u_0\,.$$

З огляду на двобічний характер процесу (13)-(15) ітерації слід проводити до виконання умови

$$\frac{1}{2} \max_{\rho \in [0,1]} (w^{(k)}(\rho) - v^{(k)}(\rho)) < \varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\rho) \approx u^{(k)}(\rho) = \frac{w^{(k)}(\rho) + v^{(k)}(\rho)}{2}\,.$$

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4), (5) при $q = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 0{,}9$ та $\mu = 1, 2, 3$, $\kappa = 1$.

При $q = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $\kappa = 1$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій. При цьому $\left\| u^{(7)} \right\| = 0{,}392168$.

На рис. 2 зображено графіки верхніх $w^{(k)}(\rho)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\rho)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 3 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\rho)$, на рис. 4 – графік функції

$u^{(7)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$, а на рис. 5 – лінії рівня (з кроком 0,05) функції $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$. В таблиці 1 наведено як зменшується апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку при $q=\frac{1}{2}$, $\mu=1$, $\kappa=1$ в залежності від номера ітерації.

На рис. 6 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $q\in(0,1)$ для значень $\mu=1,2,3$ при фіксованому значенні параметра $\kappa=1$. Як бачимо, зі збільшенням μ і q збільшується і норма розв'язку крайової задачі. При фіксованому ж значенні параметра $\mu=1$ зі збільшенням параметра κ, норми наближених розв'язків зменшуються (рис. 7).

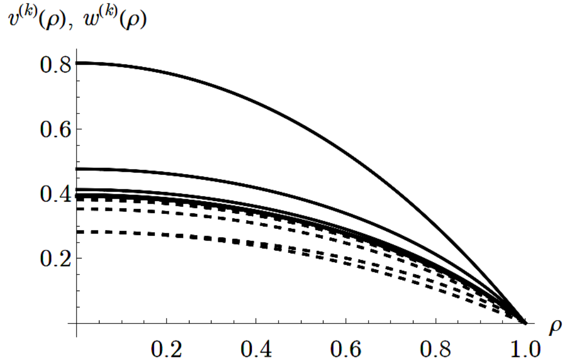

Рис. 2. *Графіки верхніх і нижніх наближень*

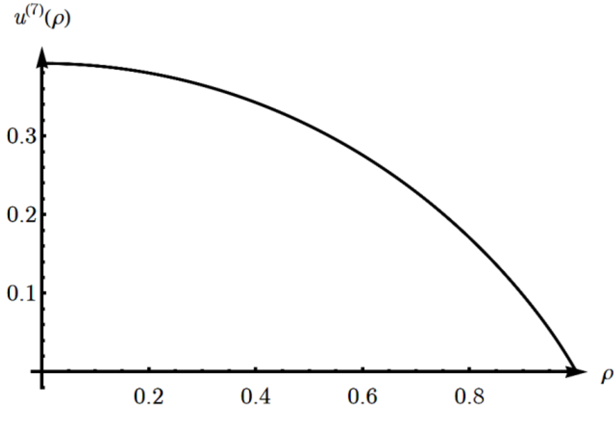

Рис. 3. *Графік наближеного розв'язку* $u^{(7)}(\rho)$

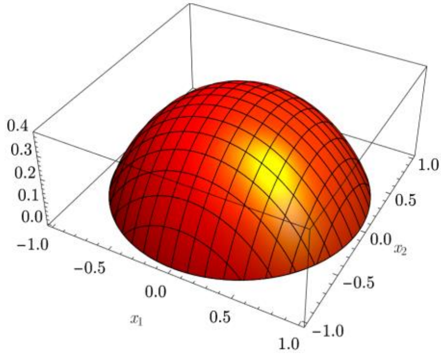

Рис. 4. *Графік наближеного розв'язку* $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

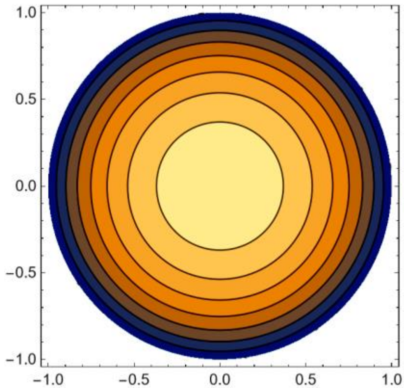

Рис. 5. Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

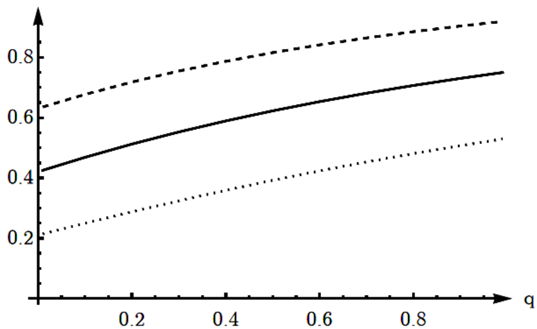

Рис. 6. *Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра* q, $\mu = 1, 2, 3$, $\kappa = 1$

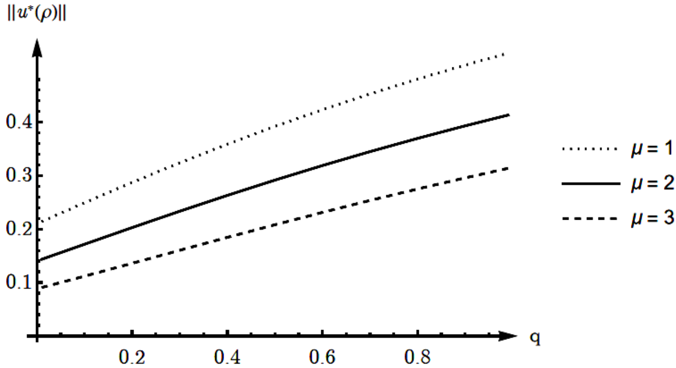

***Рис.** 7. Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра* q , $\kappa = 1, 2, 3$, $\mu = 1$

Таблиця 1

Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку на k *-й ітерації*

Номер ітерації k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\varepsilon^{(k)}$	$0{,}97\cdot10^{-1}$	$0{,}30\cdot10^{-1}$	$0{,}78\cdot10^{-2}$	$0{,}20\cdot10^{-2}$	$0{,}48\cdot10^{-3}$	$0{,}13\cdot10^{-3}$	$0{,}31\cdot10^{-4}$

Висновки. У даній статті вперше досліджено застосовність методу двобічних наближень до знаходження аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца зі степеневою сингулярною нелінінйстю. Результати, що було одержано в роботі, можна поширити на рівняння з іншими типами нелінійностей та крайовими умовами інших типів. Окрім того, отримані результати застосовні для розв'язування прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фізико-механічних полів в нелінійних середовищах. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Список використаних джерел:

1. Chang X., Liu M., Yan D. Normalized Ground State Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations Involving Exponential Critical Growth. *The Journal of Geometric* Analysis. 2023. Vol. 33. Article 83. DOI: https://doi.org/-10.1007/s12220-022-01130-8.
2. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків крайових задач із сингулярними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. № 27. С. 39-52. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-27.39-52

3. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з монотонною степеневою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. № 28. С. 81-92. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.81-92
4. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
5. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107-120.
6. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35-42.
7. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2013. № 3 (62). С. 28-31.
8. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
9. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
10. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Матеріали XXVIII Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* (Харків, ХНУРЕ, 16-18 квітня 2024). Т. 7. С. 259-261.
11. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2019. № 3 (86). С. 16-23.
12. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-6.
13. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. 2018. № 3 (99). С. 78-91. DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS-2018-3-460.

References:

1. Chang X., Liu M., Yan D. Normalized Ground State Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations Involving Exponential Critical Growth. *The Journal of Geometric Analysis.* 2023. Vol. 33. Article No 83. DOI: https://doi.org/10.1007/s12220-022-01130-8.
2. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do znakhodzhennia dodatnykh aksialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach iz synhuliarnymy neliniinostiamy. *Matematychne ta*

kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky. 2025. № 27. S. 39-52. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-27.39-52
3. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Analiz metodom dvobichnykh nablyzhen dodatnykh aksialno-symetrychnykh rozviazkiv pershoi kraiovoi zadachi dlia rivniannia Helmholtsa z monotonnoiu stepenevoiu neliniinistiu. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky.* 2025. № 28. C. 81-92. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.81-92
4. Voronenko M. D., Sydorov M. V. Konstruktyvne doslidzhennia neliniinykh kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian. *Radioelektronika ta informatyka.* 2018. № 1 (80). S. 48-54.
5. Kolosova S. V., Lukhanyn V. S., Sydorov M. V. O postroenyy dvustoronnykh pryblyzhenyi k polozhytelnomu reshenyiu uravnenyia Lane-Emdena. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Seriia: fizyko-matematychni nauky.* 2015. № 3. S. 107-120.
6. Kolosova S. V., Lukhanyn V. S., Sydorov M. V. O postroenyy yteratsyonnykh metodov reshenyia kraevykh zadach dlia nelyneinykh ellyptycheskykh uravnenyi. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Seriia: fizyko-matematychni nauky.* 2013. № 1. S. 35-42.
7. Kolosova S. V., Sydorov M. V. Prymenenye yteratsyonnykh metodov k reshenyiu эllyptycheskykh kraevykh zadach s эksponentsyalnoi nelyneinostiu. *Radioelektronika ta informatyka.* 2013. № 3 (62). S. 28-31.
8. Krasnoselskyi M. A. Polozhytelnye reshenyia operatornykh uravnenyi. Moskva: Fyzmathyz, 1962. 394 s.
9. Opoitsev V. Y., Khurodze T. A. Nelyneinye operatoy v prostranstvakh s konusom. Tbylysy: Yzd-vo Tbylys. un-ta, 1984. 246 s.
10. Parkhomenko V. H. Metod dvobichnykh nablyzhen poshuku aksialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach z monotonnymy neliniinostiamy. *Materialy XXVIII Mizhnarodnoho molodizhnoho forumu «Radioelektronika i molod u XXI stolitti»* (Kharkiv, KhNURE, 16-18 kvitnia 2024). T. 7. S. 259-261.
11. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do znakhodzhennia dodatnykh radialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach z monotonnymy neliniinostiamy. *Radioelektronika ta informatyka.* 2019. № 3 (86). S. 16-23.
12. Sydorov M. V. Metod dvobichnykh nablyzhen rozviazannia pershoi kraiovoi zadachi dlia neliniinykh zvychainykh dyferentsialnykh rivnian na osnovi vykorystannia funktsii Hrina. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia.* 2019. № 1 (48). S. 57-66. DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-6.
13. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science.* 2018. № 3 (99). S. 78-91. DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS-2018-3-460.

ANALYSIS BY THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS OF POSITIVE AXIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION WITH A SINGULAR POWER NONLINEARITY

The paper analyzes, by means of the method of two-sided approximations, positive axially symmetric solutions of the first boundary value problem for a semilinear elliptic differential equation with the Helmholtz operator and a singular power nonlinearity.

The problem is considered in a circular domain with a homogeneous Dirichlet condition on the boundary. The nonlinearity has an antimonotonic character and is described by a power dependence, where the exponent takes values from −1 to 0. By transforming to polar coordinates and taking into account that the solution is axially symmetric (that is, there is no dependence on the rotation angle and only the dependence on the distance from the center of the circle remains), a boundary value problem for a semilinear ordinary differential equation is obtained. In this case, the pole of the polar coordinate system is a singular point of this equation, which necessitates imposing a boundedness condition on the solution at this point.

For the problem under consideration, the Green's function is constructed, followed by a reduction to an equivalent Hammerstein integral equation, which is treated as a nonlinear operator equation in a Banach space of functions continuous on a segment and semi-ordered by the cone of nonnegative functions on this segment. The properties of the corresponding integral operator, such as antimonotonicity (antitonicity), positivity, boundedness, and pseudoconcavity, are investigated.

The next stage of the study involves determining the endpoints of a strongly invariant conical segment, which serve as initial approximations for the iterative process. After that, two parallel iterative processes are constructed. The first iterative sequence is nondecreasing with respect to the cone (a sequence of lower approximations), while the second is nonincreasing with respect to the cone (a sequence of upper approximations). At each iteration, the arithmetic mean of the upper and lower approximations is chosen as the current approximation. In this way, an a posteriori error estimate is obtained at every step of the iterative process. A conclusion is drawn about the existence and uniqueness of a positive axially symmetric solution to the problem under consideration.

The theoretical results obtained in the paper were confirmed by conducting a computational experiment. The dependence of the solution and the convergence rate of the iterative process on the parameters of the equation were analyzed, and the corresponding results are presented in the relevant graphs.

Key words: *antimonotone operator, axially symmetric positive solution, Hammerstein integral equation, Green's function, method of two-sided approximations, nonlinear boundary value problem, semilinear elliptic equation with the Helmholtz operator, strongly invariant conical segment.*