

УДК 519.635.1:532.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.151-169

Сидоров М. В.

ORCID: 0000-0001-8022-866X,

д-р фіз.-мат. наук, професор, Харківський національний
університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна,

E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Чумаченко С. В.

ORCID: 0000-0001-8913-1194,

д-р техн. наук, професор, Харківський національний
університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна,

E-mail: svetlana.chumachenko@nure.ua

Шпакович М. О.

ORCID: 0009-0002-1108-8901,

д-р філософії, Харківський національний
університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна,

E-mail: maksym.shpakovych@nure.ua

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ R-ФУНКЦІЙ ТА НЕЛІНІЙНОГО
МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ
ПЛОСКИХ СТАЦІОНАРНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ**

У роботі розглядається плоскопаралельна течія в'язкої нести-
сливої рідини в обмеженій однозв'язній області з кусково-
гладкою межею. Такі дослідження є актуальними як з точки зору
розвитку теоретичних методів гідродинаміки та математичної фі-
зики, так і для розв'язання широкого кола прикладних задач су-
часної науки і техніки. При аналізі плоскопаралельних течій від
системи Нав'є-Стокса у природних змінних зручно переходити до
задачі відносно функції течії. Функція течії пов'язана з вектором
швидкостей і вводиться так, щоб тотожно задовільнити рівняння
неперервності, а також щоб перехресним диференціюванням ви-
ключити у вихідних рівняннях тиск. Математичною моделлю ро-
зглядуваного процесу є нелінійна крайова задача з еліптичним рі-
внянням четвертого порядку для функції течії. Для її чисельного
аналізу запропоновано використати метод R -функцій з апрокси-
мацією невизначеної компоненти нелінійним методом Гальоркі-
на. Використання методів R -функцій та Гальоркіна дозволило
отримати наближений розв'язок задачі у чисельно-аналітичному

Стаття надійшла до редакції: 19.03.2026

Рекомендовано до друку: 4.04.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

вигляді (що спрощує процедуру знаходження різних характеристик течії, зокрема, поля швидкостей, завихореності та тиску) і дозволило точно врахувати у чисельному алгоритмі геометрію області та крайові умови задачі.

Обчислювальний експеримент було проведено у одиничному квадраті для різних чисел Рейнольдса. Результати наведено у вигляді ліній рівня функції течії, завохореності, тиску та векторного поля швидкості, а також у вигляді таблиць з порівнянням числових характеристик течії для різних значень чисел Рейнольдса. Отримані результати добре узгоджуються з результатами фізичних експериментів та з числовими результатами, відомими з літератури.

Ключові слова: *в'язка рідина, математичне моделювання, метод R -функцій, нелінійна крайова задача, нелінійний метод Гальоркіна, функція течії.*

Вступ. Необхідність дослідження методом математичного моделювання стаціонарної або нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини часто виникає при дослідженні різних процесів у геофізиці, біології, теплоенергетиці, біомедицині тощо. За математичну модель при цьому зазвичай використовують систему диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса. Складність її безпосереднього аналізу пов'язана перш за все з її нелінійністю і з тим, що вона складається з чотирьох рівнянь: три рівняння, що пов'язують поля швидкостей та тиску, та рівняння неперервності. У випадку плоскопаралельних течій за допомогою введення функції течії система Нав'є-Стокса спрощується: від неї можна перейти до одного нелінійного рівняння четвертого порядку для функції течії. Після знаходження функції течії за нею можна відновити поле швидкостей, поле завихореності та поле тиску.

Останніми роками з розвитком обчислювальної техніки все активніше у гідродинаміці використовується обчислювальний експеримент. Існує багато чисельних методів, які застосовуються для розрахунку в'язких течій. Найбільш вживаними є метод скінченних різниць і метод скінченних елементів. Основною перевагою цих методів є простота реалізації, але вони мають істотний недолік – відсутність властивості універсальності. Це призводить до того, що при переході до нової області (особливо складної геометрії) необхідно генерувати нову сітку, а часто і замінювати складні ділянки межі геометрично простими, складеними, наприклад, з відрізків прямих. Точно врахувати геометричну і аналітичну інформацію, що входить в постановку крайової задачі, можна, скориставшись конструктивним апаратом теорії R -функцій академіка НАН України В. Л. Рвачова.

Отже, вдосконалення існуючих методів математичного моделювання течій в'язкої нестисливої рідини методом R -функцій є актуальною науковою задачею. При розв'язанні задач гідродинаміки в'язкої рідини

цей метод застосовувався, наприклад, у роботах [1, 2, 4, 7, 9-12, 14, 17, 22, 23]. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [2, 10, 12, 14].

Метою роботи є вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних течій в'язкої рідини у обмежених одноп'язких областях. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

- на основі системи рівнянь Нав'є-Стокса отримати задачу для функції течії;
- для крайової задачі відносно функції течії побудувати метод її чисельного аналізу на основі сумісного використання методів R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна;
- описати процедуру відновлення характеристик в'язкого потоку (поля швидкостей, завихореності, поля тиску) за знайденою функцією течією;
- провести обчислювальні експерименти для тестової задачі.

1. Постановка задачі. Стаціонарні плоскопаралельні течії в'язкої нестисливої рідини в області Ω з межею $\partial\Omega$ характеризуються полем швидкостей та тиском і описуються системою диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса [5, 6]

$$\mathbf{v} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

де (x, y) – змінні декартової системи координат, що задана в області Ω , $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – поле швидкостей рідини, ρ – густина рідини, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини, p – тиск. Рівняння (3) називається рівнянням неперервності.

У векторній формі система (1)-(3) має вигляд

$$\nu \Delta \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \Delta p,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – оператор Га-

мільтона, $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор дивергенції.

Ці рівняння необхідно доповнити крайовою умовою

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \quad (4)$$

де $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ – заданий вектор швидкості рідини на $\partial\Omega$. При цьому має виконуватися рівність $\int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds = 0$, де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до

$\partial\Omega$. Фізичний зміст крайової умови (4) пояснюється тим, що на твердих стінках виконується умова прилипання, яка полягає в тому, що між поверхнею твердого тіла і всякою в'язкою рідиною існують сили молекулярного зв'язку, які приводять до того, що швидкість рідини в точках, що примикають до стінки, співпадає за величиною і напрямком зі швидкістю руху цих точок стінки.

Питання існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4) розглянуто, наприклад, у монографіях [3, 21, 24].

У випадку плоскопаралельних течій від системи (1)-(3) у змінних «швидкість-тиск» зручно перейти до задачі для функції течії ψ , що пов'язана з вектором швидкості $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Цей перехід зумовлений тим, що, вводячи функцію течії в такий спосіб, ми тотожно задовольняємо рівняння неперервності (3), а перехресним диференціюванням рівнянь (1), (2) виключаємо з них тиск і зводимо (1), (2) до одного рівняння з бігармонічним оператором відносно функції ψ .

Крайові умови для функції течії $\psi(x, y)$ можна отримати із заданого на $\partial\Omega$ розподілу швидкості рідини [9]. З (4), ураховуючи (5), отримуємо

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right|_{\partial\Omega} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (6)$$

де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $\boldsymbol{\tau}$ – одиничний вектор, який направлено за дотичною до $\partial\Omega$.

Зінтегрувавши перше зі співвідношень (6) вздовж $\partial\Omega$, отримаємо крайові умови на $\partial\Omega$ найбільш загального вигляду

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega.$$

На непроникній для рідини ділянці $\partial\Omega$ значення функції течії не змінюється, тобто $\psi = \text{const}$. Якщо весь контур $\partial\Omega$ є непроникним, то на ньому можна покласти $\psi = 0$.

Отже, задача (1)-(4) зводиться до наступної нелінійної крайової задачі для функції течії:

$$v\Delta^2\psi = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \text{у } \Omega, \quad (7)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (8)$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор. Область Ω вважатимемо обмеженою і однозв'язною областю з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = c/\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$.

2. Метод чисельного аналізу. Для розв'язування задачі (7), (8) використаємо метод R -функцій [8-10, 23]. Побудована відповідно до методу R -функцій структура розв'язку крайової задачі (7), (8) має вигляд [9]

$$\psi = f - \omega(g + D_1f) + \omega^2\Phi, \quad (9)$$

де $f = ECf_0$, $g = ECg_0$ – продовження в область Ω межових значень $f_0(s)$, $g_0(s)$, $s \in \partial\Omega$, D_1 – оператор продовження в область Ω похідної за внутрішньою нормаллю до $\partial\Omega$, $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$, а Φ – невизначена компонента.

Нагадаємо [10, 23], що $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$, якщо

$$\omega(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \omega(x, y) > 0 \quad \text{у } \Omega, \quad \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1,$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Для побудови зазначених у (9) продовжень межових значень можна скористатися наступним підходом [10, 23]. Нехай задані $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_{0,i}$, а $\omega_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\omega_i(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_i$ і $\omega_i(x, y) > 0$ в $\Omega \setminus \partial\Omega_i$. Тоді функція

$$\varphi = \frac{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \dots + \frac{\varphi_n}{\omega_n}}{\frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j} \quad (10)$$

має властивість

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0.$$

Формулу (10) називають формулою «склейки» і позначають $\varphi = EC\varphi_0$, де EC називають оператором склеювання межових значень.

Другий підхід [10, 23] пов'язаний з продовженням диференціальних операторів, що задані на $\partial\Omega$, в середину області Ω . Нехай $\omega=0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ області Ω . Тоді оператор D_1 , що діє за правилом

$$D_1u \equiv (\nabla\omega, \nabla u) = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

в регулярних точках $\partial\Omega$ задовольняє рівність

$$-D_1u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Значимо, що вираз D_1u має сенс всюди в $\bar{\Omega}$ і за допомогою оператора D_1 можна будувати жмутки функцій, нормальна похідна яких або довільна лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області набуває задані значення.

Позначимо $\varphi = f - \omega(g + D_1f)$. Тоді структура розв'язку задачі (7), (8) запишеться у вигляді

$$\psi = \varphi + \omega^2\Phi. \quad (11)$$

Оберемо повну в $L_2(\Omega)$ послідовність функцій $\{\tau_k\}$ і шукатимемо апроксимацію невизначеної компоненти Φ у вигляді

$$\Phi \approx \Phi_N = \sum_{k=1}^N c_k \tau_k.$$

Тоді з (11) випливає, що наближений розв'язок задачі (7), (8) ми шукаємо у вигляді

$$\psi_N = \varphi + \omega^2\Phi_N = \varphi + \omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \tau_k = \varphi + \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, \quad (12)$$

де $\varphi_k = \omega^2 \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, – координатна послідовність.

Очевидно, що функції φ_k , $k = 1, 2, \dots$, задовольняють умови

$$\varphi_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (13)$$

Коефіцієнти c_1, \dots, c_N у (12) відповідно до нелінійного методу Гальоркіна знайдемо з системи нелінійних рівнянь (умова ортогональності нев'язки до перших N координатних функцій)

$$\left(\nu \Delta^2 \psi_N - \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial x} \frac{\partial \psi_N}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial y} \frac{\partial \psi_N}{\partial x}, \varphi_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Помітимо, що

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Тоді ліву частину системи рівнянь (14) можна записати у вигляді

$$\left(\nu \Delta^2 \psi_N - \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial x} \frac{\partial \psi_N}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial y} \frac{\partial \psi_N}{\partial x}, \varphi_j \right) = \nu \iint_{\Omega} \Delta^2 \psi_N \varphi_j dx dy -$$

$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi_N \frac{\partial \psi_N}{\partial y} \right) \varphi_j dx dy + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi_N \frac{\partial \psi_N}{\partial x} \right) \varphi_j dx dy.$$

Перетворивши кожен з інтегралів у останній формулі за допомогою формул векторного аналізу і урахувавши вигляд (12) функції ψ_N , ліву частину системи рівнянь (14) зведемо до вигляду

$$\left(\nu \Delta^2 \psi_N - \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial x} \frac{\partial \psi_N}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \psi_N}{\partial y} \frac{\partial \psi_N}{\partial x}, \varphi_j \right) =$$

$$= \iint_{\Omega} \Delta \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \nu \Delta \varphi_j \right) dx dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^N c_k \left[\nu \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \Delta \varphi_j dx dy - \iint_{\Omega} \Delta \varphi \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dx dy + \right.$$

$$\left. + \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dx dy \right] +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^N c_i c_k \iint_{\Omega} \Delta \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy.$$

Введемо позначення

$$f_j = \iint_{\Omega} \Delta \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \nu \Delta \varphi_j \right) dx dy, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\beta_{jk} = \nu \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \Delta \varphi_j dx dy - \iint_{\Omega} \Delta \varphi \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dx dy +$$

$$+ \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dx dy, \quad j, k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\alpha_{jik} = \iint_{\Omega} \Delta \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad j, i, k = 1, 2, \dots, N.$$

Тоді остаточно для визначення c_1, \dots, c_N у (12) матимемо систему нелінійних рівнянь

$$f_j + \sum_{k=1}^N \beta_{jk} c_k + \sum_{i,k=1}^N \alpha_{jik} c_i c_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Систему (15) можна розв'язати чисельно, наприклад, методом Ньютона.

Розв'язавши задачу (7), (8), ми дістанемо функцію течії $\psi(x, y)$ і за формулами (5) відновимо поле швидкостей $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ в'язкої рідини. Для знаходження поля тиску $p(x, y)$ можна скористатися таким підходом. З рівнянь (1), (2) з урахуванням (5) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \rho \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \\ &= \nu \rho \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \rho \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= -\nu \rho \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Тоді, застосовуючи процедуру відновлення функції за її повним диференціалом, отримаємо

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \int_{M_0, M} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + C = \\ &= \int_{M_0, M} \left(\nu \rho \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx + \\ &+ \left(-\nu \rho \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) dy + C, \end{aligned}$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – фіксована точка області Ω , $M(x, y)$ – довільна точка області Ω .

Оскільки важлива лише різниця тиску, а не його абсолютне значення, то можна покласти $C = 0$.

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для квадратної каверни $\bar{\Omega} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, бічні стінки якої нерухомі, а верхня кришка рухається вправо з одиничною швидкістю. В цьому випадку задача для функції течії матиме вигляд:

$$\nu \Delta^2 \psi = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{в } \Omega, \quad (16)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -1, & y = 1, \\ 0, & x = 0, x = 1, y = 0, \end{cases} \quad (17)$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Область Ω описується формулою

$$\omega(x, y) = [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)], \quad (18)$$

де \wedge_0 – R -кон'юнкція, $u \wedge_0 v \equiv u + v - \sqrt{u^2 + v^2}$.

Відповідно до (9), отримаємо, що структура розв'язку задачі (16), (17) має вигляд

$$\psi = -\omega g + \omega^2 \Phi, \quad (19)$$

де $\omega(x, y)$ – функція (18), $g(x, y) = -\frac{xy(1-x)}{x(1-x) + y(1-y)}$ – функція по-

будована за допомогою формули склейки і така, що враховує неоднорідність крайових умов, Φ – невизначена компонента структури.

За базисні функції було обрано сплайни п'ятого порядку, оскільки для розрахунку поля тиску рідини необхідно обчислювати треті похідні, тобто невизначена компонента Φ апроксимувалася виразом

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=-2}^{N_x+2} \sum_{j=-2}^{N_y+2} c_{ij} B_5 \left(\frac{N_x x}{a} - i \right) B_5 \left(\frac{N_y y}{b} - j \right) = \sum_{i=-2}^{N_x+2} \sum_{j=-2}^{N_y+2} c_{ij} \varphi_{ij}(x, y),$$

де $B_5(t)$ – сплайн Шенберга п'ятого степеню [13].

Для розрахунку інтегралів у системі (15) використано кубатурну формулу Гаусса з 16 вузлами по кожній координаті.

Обчислювальний експеримент було проведено для різних чисел Рейнольдса $Re = \frac{1}{\nu}$. При відновленні поля тиску за початкову точку

інтегрування обрано точку $M_0 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$. Через $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ позначати-
 мемо координати вихрового центру, тобто точки, у якій $v_x = v_y = 0$.

Для чисел Рейнольдса $Re = 25, 50, 100, 200, 500, 1000$ відповідно на рис. 1, 5, 9, 13, 17, 21 наведено лінії рівня функції течії, на рис. 2, 6, 10, 14, 18, 22 наведено лінії рівня завихореності $\zeta = -\Delta\psi$, на рис. 3, 7, 11, 15, 19, 23 зображено векторне поле швидкостей рідини, а на рис. 4, 8, 12, 16, 20, 24 зображено лінії рівні розподілу тиску в рідині для $N_x = N_y = 25$ (усього 625 базисних функцій). Залежність характеристик течії від числа Рейнольдса наведено в таблиці 1.

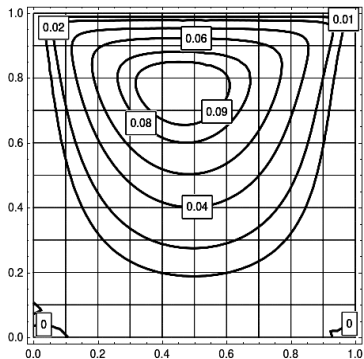


Рис. 1. Лінії рівня функція течії при $Re = 25$

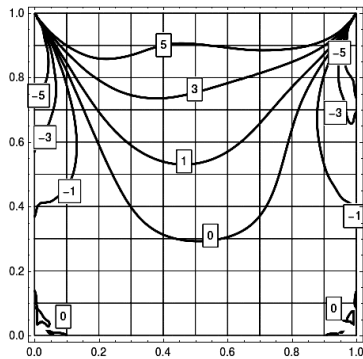


Рис. 2. Лінії рівня завихореності при $Re = 25$

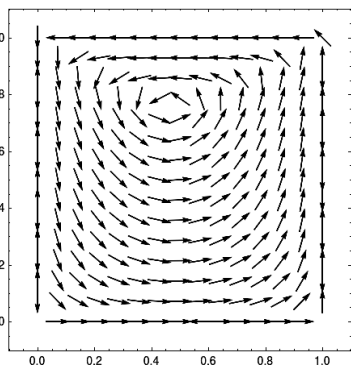


Рис. 3. Поле швидкостей при $Re = 25$

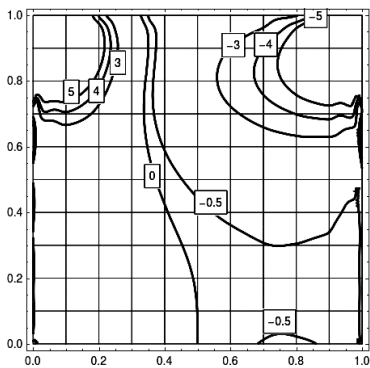


Рис. 4. Поле тиску рідини при $Re = 25$

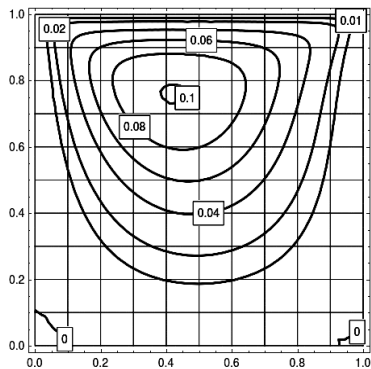


Рис. 5. Лінії рівня функція течії при $Re = 50$

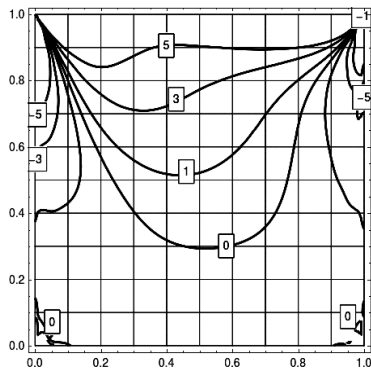


Рис. 6. Лінії рівня завихореності при $Re = 50$

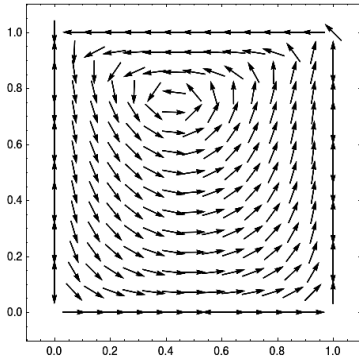


Рис. 7. Поле швидкостей при $Re = 50$

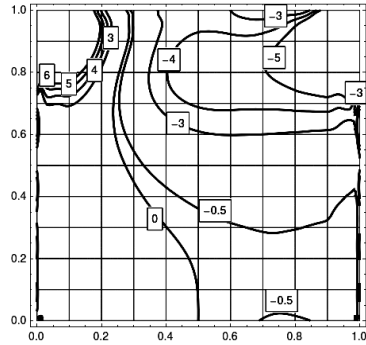


Рис. 8. Поле тиску рідини при $Re = 50$

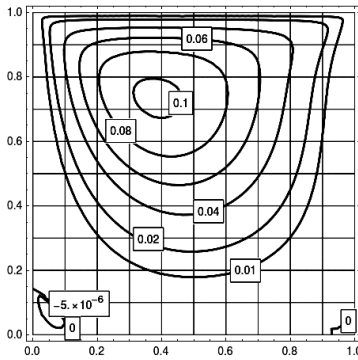


Рис. 9. Лінії рівня функції течії при $Re = 100$

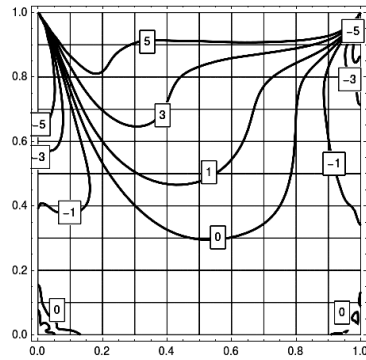


Рис. 10. Лінії рівня завихореності при $Re = 100$

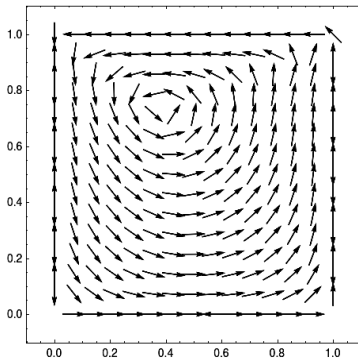


Рис. 11. Поле швидкостей при $Re = 100$

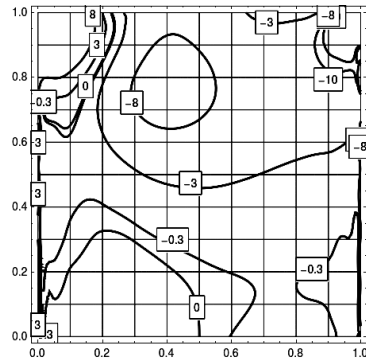


Рис. 12. Поле тиску рідини при $Re = 100$

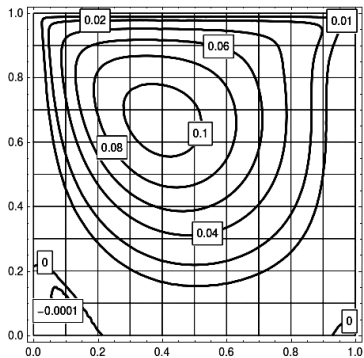


Рис. 13. Лінії рівня функція течії при $Re = 200$

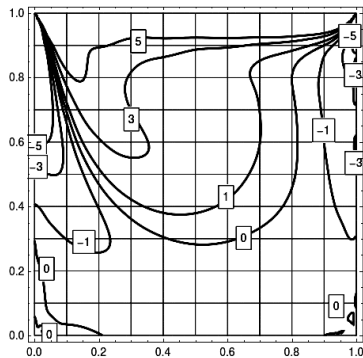


Рис. 14. Лінії рівня завихореності при $Re = 200$

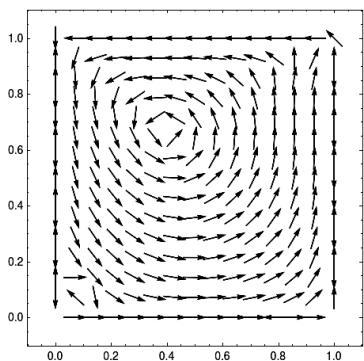


Рис. 15. Поле швидкостей при $Re = 200$

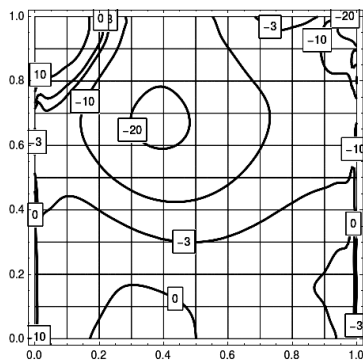


Рис. 16. Поле тиску рідини при $Re = 200$

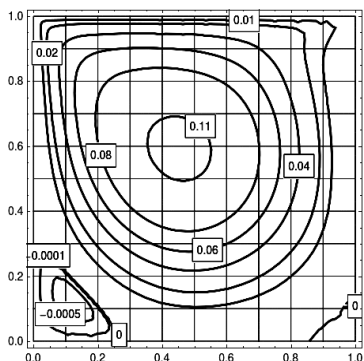


Рис. 17. Лінії рівня функція течії при $Re = 500$

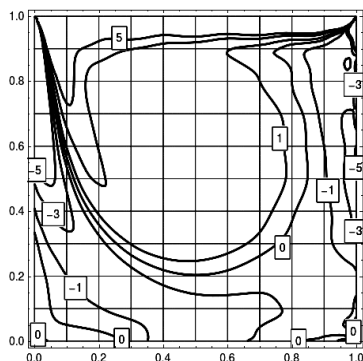


Рис. 18. Лінії рівня завихореності при $Re = 500$

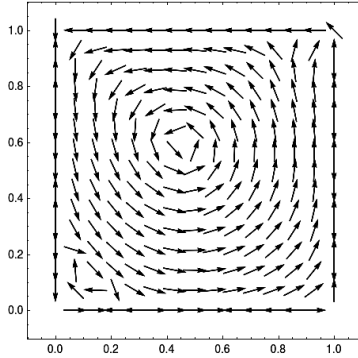


Рис. 19. Поле швидкостей
при $Re = 500$

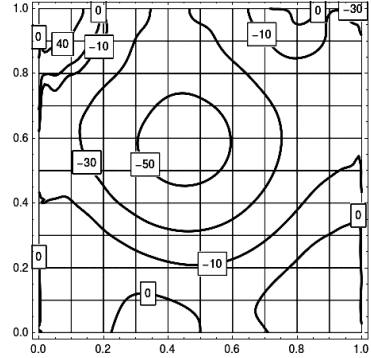


Рис. 20. Поле тиску рідини
при $Re = 500$

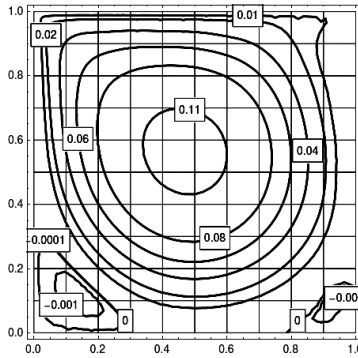


Рис. 21. Лінії рівня функція течії
при $Re = 1000$

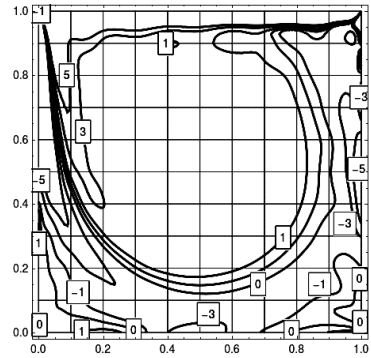


Рис. 22. Лінії рівня завихореності
при $Re = 1000$

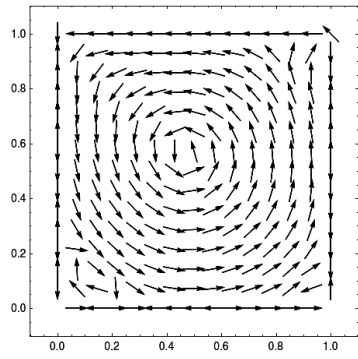


Рис. 23. Поле швидкостей
при $Re = 1000$

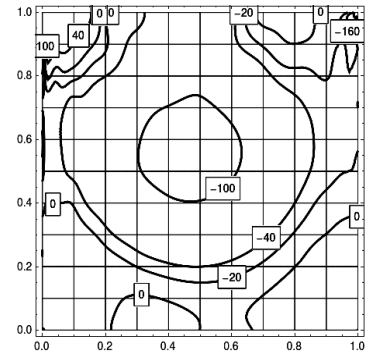


Рис. 24. Поле тиску рідини
при $Re = 1000$

Отримані результати порівнювалися з результатами отриманими іншими авторами у роботах [12, 15, 16, 18-20]. Результати добре узгоджуються як у числовій формі, так і у графічній. Так, наприклад, при порівнянні з результатами з [12] значення $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ при $Re = 50$ відносно відхилення склала 0,1%, а при $Re = 100$ – 0,02%. Також застосування нелінійного методу Гальоркіна для апроксимації невизначеної компоненти структури (9) дозволило отримати результати для значно більших чисел Рейнольдса, ніж у роботі [12], де було застосовано метод ітерацій за нелінійністю та варіаційний метод Ріт-ца (збіжність було доведено для малих чисел Re).

Таблиця 1

Характеристики течії в залежності від числа Рейнольдса

Число Рейнольдса	25	50	100	200	500	1000
$(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,459135; 0,763662	0,423900; 0,759111	0,384300; 0,737297	0,399190; 0,667011	0,453964; 0,594065	0,469110; 0,566275
$\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	0,100306	0,101001	0,103520	0,108732	0,115427	0,118995
$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	3,227650	3,254640	3,166530	2,662110	2,184800	2,041500
$\max_{y \in [0, b]} v_x \left(\frac{a}{2}, y \right)$	0,206756	0,205393	0,214050	0,265907	0,345489	0,387754
$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	0,041543	0,041760	0,043134	0,047801	0,055129	0,059132
$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	0,217239	0,216199	0,214052	0,213567	0,215287	0,217172
$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	0,141335	0,14355	0,151857	0,170238	0,193306	0,204800
$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$	4,644540	4,67503	4,770320	4,985300	5,533560	6,232780

Як бачимо з рис. 1-24, зі збільшенням числа Рейнольдса вихровий центр переміщується у напрямку геометричного центру області, у нижніх кутах розвиваються вторинні вихори, тиск у середині каверни зменшується і збільшується у кутах області.

Висновки. У даній статті продовжено дослідження застосовності структурного методу (методу R -функцій) у математичному моделюванні в'язких течій, розпочаті в роботах [12], в частині застосування для апроксимації невизначеної компоненти структури нелінійного методу Гальоркіна. Результати роботи можуть бути використані в багатьох сучасних галузях науки і техніки. Наприклад, у дослідженнях фізичних та хімічних процесів течії в'язкої рідини, а також у інженерних задачах гідродинаміки. Зважаючи на швидкі темпи зростання обчислювальної потужності комп'ютерної

техніки, програмна реалізація запропонованого методу може застосовуватися для розв'язування практичних задач дослідження течій в'язкої нестисливої рідини.

На відміну від сіткових методів, які дають розв'язок задачі у вигляді матриці значень функції, розв'язок поставленої крайової задачі отримано у наближеному аналітичному вигляді, що полегшує подальше застосування результатів на практиці для відновлення поля швидкостей та поля тиску. Необхідно також зауважити, що реалізовані в даній роботі методи можуть бути застосовані для більш складних областей течії рідини. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Наступні дослідження в'язких плоскопаралельних течій в'язкої нестисливої рідини доцільно зосередити на розв'язанні подібних крайових задач для багатозв'язних областей та нестационарних течій.

Список використаних джерел:

1. Артюх А. В., Сидоров М. В. Применение методов R-функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки.* 2011. № 2. С. 5-12.
2. Гибкіна Н. В., Сидоров М. В., Шпакович М. О. Застосування методу R-функцій до математичного моделювання плоских стаціонарних повільних течій в'язкої рідини. *Радіоелектроніка та інформатика.* 2019. № 2 (85). С. 18-25.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1970. 288 с.
4. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью. *Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки.* 2012. № 2. С. 57-65.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 736 с.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва: Дрофа, 2003. 840 с.
7. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Математическое моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим с пристеночными винтовыми вставками методом R-функций. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2005. Т. 48, № 1. С. 163-169.
8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
9. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса. *Радіоелектроніка та інформатика.* 2002. № 3. С. 52-54.
10. Сидоров М. В. Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса. *Радіоелектроніка та інформатика.* 2002. № 4. С. 77-78.
11. Суворова И. Г., Кравченко О. В., Баранов И. А. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимае-

- мой жидкости с использованием метода R-функций. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. Т. 54. № 2. С. 139-149.
12. Тевяшев А. Д., Гибкина Н. В., Сидоров М. В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2007. № 2 (37). С. 50-57.
 13. Федотова Е. А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программирующих системах серии «Поле»: Препринт. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; 202. Харьков, 1984. 60 с.
 14. Шпакович М. О. Нелінійний метод Гальоркіна у чисельному аналізі стаціонарних в'язких течій. *23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»*: зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Харків: ХНУРЕ, 2019. Т. 7. С. 126-127.
 15. Alkahtani B. Numerical Solutions to the Navier-Stokes Equations in Two and Three Dimensions: A thesis submitted to the University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Science. The University of Manchester (United Kingdom), 2013. 213 p.
 16. Amin A., Houat S., Benhizia O. Numerical study of steady flow inside a lid-driven square cavity for Reynolds number up to 50000. 23ème Congrès Français de Mécanique (Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017). AFM, Association Française de Mécanique, 2017. P. 15.
 17. Artiukh A. V., Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of slow steady and unsteady viscous flow by means of R-functions method. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 29-39. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-3.
 18. Aslan E., Taymaz I., Benim A. C. Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*. 2014. Vol. 2. № 4. P. 317-324. DOI: 10.7763/IJMMM.2014.V2.149.
 19. Burggraf O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1966. Vol. 24. № 1. P. 113-151. DOI: 10.1017/S0022112066000545.
 20. Earn L. C., Yen T. W., Ken T. L. The investigation on SIMPLE and SIMPLER algorithm through lid driven cavity. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*. 2017. Vol. 29. № 1. P. 10-23.
 21. Korobkov M., Pileckas K., Russo R. The Steady Navier-Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Cham: Birkhäuser, 2024. 285 p. DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1.
 22. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of stationary flow past bodies of revolution by viscous fluid. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2018. № 1 (44). С. 50-57. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-1-6.
 23. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-Functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 48. № 4. P. 151-188. DOI: 10.1115/1.3005099.
 24. Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Providence: American Mathematical Society, 2001. 408 p. DOI: 10.1090/chel/343.

References:

1. Artiukh A. V., Sydorov M. V. Prymenenye metodov R-funktsyi y Halerkyna k raschetu ploskykh nestatsyonarnykh viazkykh techenyi. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Seriya: fizyko-matematychni nauky*. 2011. № 2. S. 5-12.
2. Hybkina N. V., Sydorov M. V., Shpakovych M. O. Zastosuvannia metodu R-funktsii do matematychnoho modeliuвання ploskykh statsionarnykh povilnykh techii viazkoi ridyny. *Radioelektronika ta informatyka*. 2019. № 2 (85). S. 18-25.
3. Ladyzhenskaia O. A. Matematycheskye voprosy dynamyky viazkoi neshzymaemoi zhydkosty. Moskva: Nauka, 1970. 288 s.
4. Lamtiuhova S. N. Matematycheskoe modelyrovanye statsyonarnoho obtekaniya tsylindrycheskoho tela viazkoi zhydkosti. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Ser. Fizyko-matematychni nauky*. 2012. № 2. S. 57-65.
5. Landau L. D., Lyfshyts E. M. Teoretycheskaia fizyka. T. VI. Hydrodynamyka. Moskva: Nauka, 1986. 736 s.
6. Loitsianskyi L. H. Mekhanyka zhydkosty y haza. Moskva: Drofa, 2003. 840 s.
7. Maksymenko-Sheiko K. V., Sheiko T. Y. Matematycheskoe modelyrovanye dvyzheniia neshzymaemoi viazkoi zhydkosty po tsylindrycheskym s prystenochnymy vyntovymy vstavkamy metodom R-funktsyi. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*. 2005. T. 48, № 1. S. 163-169.
8. Rvachev V. L. Teoriya R-funktsyi y nekotorye ee prylozheniia. Kyev: Naukova dumka, 1982. 552 s.
9. Sydorov M. V. O postroennyi struktur reshenyi zadachy Stoksa. *Radioelektronika ta informatyka*. 2002. № 3. S. 52-54.
10. Sydorov M. V. Prymenenye metoda R-funktsyi k raschetu techeniia Stoksa v kvadratnoi kaverne pry malom chysle Reynoldsa. *Radioelektronika ta informatyka*. 2002. № 4. S. 77-78.
11. Suvorova Y. H., Kravchenko O. V., Baranov Y. A. Matematycheskoe y kompiuternoe modelyrovanye osesymmetrychnykh techenyi viazkoi neshzymaemoi zhydkosty s yspolzovanyem metoda R-funktsyi. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*. 2011. T. 54. № 2. S. 139-149.
12. Teviashev A. D., Hybkyna N. V., Sydorov M. V. Ob odnom podkhode k matematycheskomu modelyrovaniyu ploskykh statsionarnykh techenyi viazkoi neshzymaemoi zhydkosty v konechnykh odnosviazykh oblastiakh. *Radioelektronika ta informatyka*. 2007. № 2 (37). S. 50-57.
13. Fedotova E. A. Praktycheskye ukazaniia po yspolzovaniyu splain-approksymatsyy v prohrammyruishchykh systemakh seryy «Pole»: Preprint. AN USSR. Yn-t probl. mashynostr.; 202. Kharkov, 1984. 60 s.
14. Shpakovych M. O. Neliniinyi metod Halorkina u chyselnomu analizi statsionarnykh viazkykh techii. *23-y Mizhnarodnyi molodizhnyi forum «Radioelektronika ta molod u XXI stolitti»: zb. materialiv forumu (m. Kharkiv, 16-18 kvitnia 2019 r.)*. Kharkiv: KhNURE, 2019. T. 7. S. 126-127.
15. Alkahtani B. Numerical Solutions to the Navier-Stokes Equations in Two and Three Dimensions: A thesis submitted to the University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Science. The University of Manchester (United Kingdom), 2013. 213 p.

16. Amin A., Houat S., Benhizia O. Numerical study of steady flow inside a lid-driven square cavity for Reynolds number up to 50000. 23ème Congrès Français de Mécanique (Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017). AFM, Association Française de Mécanique, 2017. P. 15.
17. Artiukh A. V., Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of slow steady and unsteady viscous flow by means of R-functions method. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia*. 2019. № 1 (48). S. 29-39. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-3.
18. Aslan E., Taymaz I., Benim A. C. Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*. 2014. Vol. 2. № 4. P. 317-324. DOI: 10.7763/IJMMM.2014.V2.149.
19. Burggraf O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1966. Vol. 24. № 1. P. 113-151. DOI: 10.1017/S0022112066000545.
20. Earn L. C., Yen T. W., Ken T. L. The investigation on SIMPLE and SIMPLER algorithm through lid driven cavity. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*. 2017. Vol. 29. № 1. P. 10-23.
21. Korobkov M., Pileckas K., Russo R. The Steady Navier-Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Cham: Birkhäuser, 2024. 285 p. DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1.
22. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of stationary flow past bodies of revolution by viscous fluid. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia*. 2018. № 1 (44). S. 50-57. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-1-6.
23. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-Functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 48. № 4. P. 151-188. DOI: 10.1115/1.3005099.
24. Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Providence: American Mathematical Society, 2001. 408 p. DOI: 10.1090/chel/343.

APPLICATION OF R-FUNCTION METHODS AND THE NONLINEAR GALERKIN METHOD IN THE MATHEMATICAL MODELING OF PLANE STEADY VISCOUS FLOWS

The paper considers a plane-parallel flow of a viscous incompressible fluid in a bounded simply connected domain with a piecewise smooth boundary. Such studies are relevant both from the standpoint of the development of theoretical methods of hydrodynamics and mathematical physics and for solving a wide range of applied problems in modern science and engineering.

When analyzing plane-parallel flows, it is convenient to pass from the system of Navier-Stokes equations in natural variables to a problem formulated in terms of the stream function. The stream function is related to the velocity vector and is introduced in such a way that the continuity equation is satisfied identically and the pressure is eliminated from the governing equations by cross differentiation.

The mathematical model of the considered process is a nonlinear boundary value problem with a fourth-order elliptic equation for the stream

function. For its numerical analysis, it is proposed to use the R-function method with approximation of the unknown component by the nonlinear Galerkin method. The use of the R-function and Galerkin methods made it possible to obtain an approximate solution of the problem in a numerical-analytical form (which simplifies the procedure for determining various flow characteristics, in particular the velocity field, vorticity, and pressure) and to exactly incorporate the geometry of the domain and the boundary conditions into the numerical algorithm.

A computational experiment was carried out in a unit square for different values of the Reynolds number. The results are presented in the form of contour lines of the stream function, vorticity, and pressure, as well as the velocity vector field, and in the form of tables comparing numerical characteristics of the flow for different Reynolds numbers. The obtained results are in good agreement with the results of physical experiments and with numerical results reported in the literature.

Key words: *viscous fluid, mathematical modeling, R-function method, nonlinear boundary value problem, nonlinear Galerkin method, stream function.*