

УДК 517.26:517.928.1:519.615.3
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.134-150

Сеньо П. С.

ORCID: 0000-0002-9320-7638,

д-р фіз.-мат. наук, професор, Львівський національний
університет імені Івана Франка, м. Львів, Україна,

E-mail: petro.seno@lnu.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ТИПІВ ЗАГАЛЬНОЇ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ

У роботі запропонована методика розв'язування загальної початкової задачі та ітераційні алгоритми побудови двосторонніх апроксимацій на основі математики функціональних інтервалів розв'язування початкової задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та деяких видів інтегральних рівнянь. Розв'язки таких задач отримані у вигляді функціональних інтервалів. Адаптивний вибір довжини кроку в цих алгоритмах автоматично реагує на ступінь нелінійності задачі. Доведено, що функційні рівняння, інтегральні рівняння, задача Коші є частинними випадками загальної початкової задачі. Грунтуючись на понятті функції, її похідної, дотичної запропоновано основний принцип розвитку функціональної залежності, принцип узгодженості прямого і зворотного розвитку функціональної залежності з протилежних кінців проміжку інтегрування функціонального інтервалу функції та функціональних інтервалів її похідних. Показано, що функціональну залежність можна крім табличного, та аналітичного зображення подати ще і у таблично-аналітичному вигляді. Доведені в роботі леми та теореми дають можливість аналізувати та усувати різноманітні невизначеності, пов'язані з неперервно диференційовними функціями.

Запропонована у цій роботі методика розв'язування загальної початкової задачі та ітераційні алгоритми побудови двосторонніх апроксимацій основі математики функціональних інтервалів поєднує ідею двосторонніх наближень із математичним апаратом функціональних інтервалів. Адаптивний вибір довжини кроку в цих алгоритмах автоматично реагує на ступінь нелінійності задачі, а квадратична збіжність ширини функціонального інтервала розв'язку задачі забезпечує ефективне звуження невизначеності розв'язку на кожній ітерації.

Стаття надійшла до редакції: 20.03.2026

Рекомендовано до друку: 9.04.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

Ключові слова: загальна початкова задача, задача Коші, інтегральні рівняння, функціональна невизначеність, інтервал, функціональний інтервал, двостороння апроксимація, ітераційний процес.

Вступ. Задача побудови гарантованих двосторонніх апроксимацій розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь є одною з центральних у чисельному та системному аналізі. Класичні методи, як правило, дають лише точкові наближення розв'язку такої задачі без строгих оцінок похибки. Отже, критично важливим є отримання не просто наближених, а гарантованих апроксимацій розв'язків загальної початкової задачі. Інший напрям розвитку двосторонніх методів пов'язаний з інтервальним аналізом. Однак інтервальні методи спочатку перевіряють існування та єдиність розв'язку на проміжку інтегрування, а потім обчислюють лише тісніші включення. Основним обмеженням класичних інтервальних підходів є катастрофічне розширення функціональної невизначеності [1] на великих проміжках інтегрування.

Запропонована у цій роботі методика розв'язування загальної початкової задачі та ітераційні алгоритми побудови двосторонніх апроксимацій на основі математики функціональних інтервалів поєднує ідею двосторонніх наближень із математичним апаратом функціональних інтервалів [1, 3, 6]. Адаптивний вибір довжини кроку в цих алгоритмах автоматично реагує на ступінь нелінійності задачі, а квадратична збіжність ширини функціонального інтервала розв'язку задачі ($\omega \sim o(h^2)$) забезпечує ефективне звуження невизначеності розв'язку на кожній ітерації.

Зауваження 1. У зв'язку із специфікою об'єктів, що розглядаються в цій роботі для їх повнішої ідентифікації, відображення їх властивостей (об'єкт може мати одночасно їх декілька), впорядкованості та належності до перших класів геометричних фігур, використано ідентифікатори (впорядковані набори літер і цифр) та специфічні позначення, а не лише окремі літери та індекси. Зокрема: штрихи (', ") для позначення констант, що описують першу та другу похідні вказаної функції, відповідно, надкреслення та підкреслення для позначення верхніх та нижніх об'єктів, відповідно, додавання перед позначенням об'єкта групи літер *sp* для повідомлення про те, що цей об'єкт є списком. При цьому об'єкт позначаємо відповідною великою літерою, а номер елемента цього списку записуємо у квадратних дужках.

Наприклад, якщо k – кутовий коефіцієнт прямої, то \underline{k} – кутовий коефіцієнт нижньої прямої, а \overline{k}' – кутовий коефіцієнт деякої верхньої прямої певної першої похідної функції, spU – список об'єктів U ,

$spU[5] - 5$ (п'ятий) елемент списку об'єктів U , $\overline{p}2_b(x)$ – верхня парабола другої групи парабол, які побудовані у точці b (x – її аргумент).

Формулювання задачі та основні напрямки її розв'язання.

Означення 1. Точковою функціональною невизначеністю, або функціональною невизначеністю функції $y = f(x)$ у точці $x = a$, будемо називати інтервал Y , у якому гарантовано міститься значення $y_a = f(a)$ цієї функції. Ширина інтервалу Y називається величиною точкової функціональної невизначеності цієї функції у точці $x = a$.

Зауважимо, що аналітичний вираз функціональної залежності $f(x)$ може бути і невідомим.

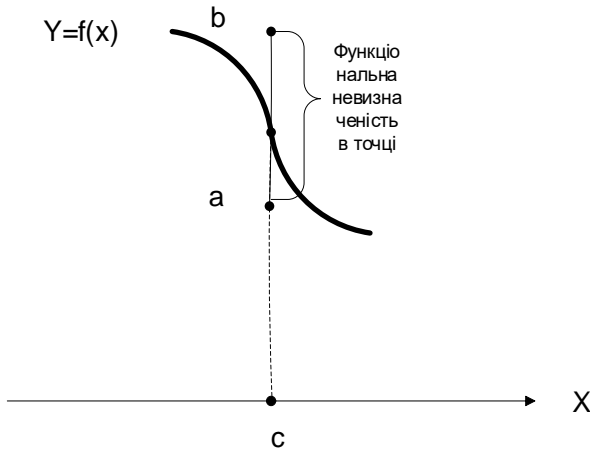


Рис. 1. Функціональна невизначеність функції $y = f(x)$ у точці $x = c$

Означення 2. Функціональною невизначеністю на інтервалі X , породженою функцією $y = f(x)$, на інтервалі $[a, b]$ будемо називати параметризовану множину точкових функціональних невизначеностей – інтервалів Y_X , у якій гарантовано містяться всі значення цієї функції для всіх значень аргументу $x \in X$. Максимальна ширина інтервалів Y_X називається величиною функціональної невизначеності цієї функції на інтервалі X .

Означення 3. [1] Функціональним інтервалом функції $f(x)$, на інтервалі X називатимемо параметризовану множину інтервалів $[f_1(x), f_2(x)]$, де $f, f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, і позначатимемо його відповідно $F(X)$, або $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$.

Отже, функціональний інтервал функції $f(x)$, це множина всіх точок частини координатної площини, які на інтервалі X розташовані між графіками функцій $f_1(x), f_2(x)$, включно з ними що містить всі значення функції $f(x)$ (її графік), де $f_1(x) \leq f_2(x)$.

Математичні моделі часто містять функції, аналітичні вирази яких невідомі. Це породжує функціональні невизначеності, які, однак, є визначальними для таких моделей і тому слугують основою побудови методів розв'язування відповідних задач. До таких задач, зокрема, належить і загальна початкова задача [6]. Суть її така.

Нехай на інтервалі $[a, b]$ потрібно знайти таку функцію $y(x)$, яка є розв'язком рівняння

$$g(x) = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}), \quad (1)$$

при умові, що

$$y(a) = c, \quad (2)$$

де c деяка константа, $F(\cdot)$ деякий оператор (зокрема функція, або функціонал), $y, y', y'', \dots, y^{(k)}$ – шуканий розв'язок, перша, друга і так далі k -та його похідні, Зокрема, якщо $g(x) \equiv y(x)$, $F(\cdot) \equiv F(x, y)$, то (1)-(2) функційне рівняння, якщо $g(x) \equiv y'(x)$, $F(\cdot) \equiv F(x, y)$, то (1)-

(2) задача Коші, якщо $g(x) \equiv y(x)$, $F(\cdot) \equiv f(x) + \lambda \int_a^x k(x, s)y(s) ds$,

константа $c = f(a)$, то (1)-(2) інтегральне рівняння Вольтерри другого роду, якщо $g(x) \equiv y(x)$, $F(\cdot) \equiv f(x) + \lambda \int_a^b k(x, s)y(s) ds$, константа $c = f(a)$, то (1)-(2) інтегральне рівняння Фредгольма другого роду.

Очевидно, що у такій постановці задача (1)-(2), як правило, розв'язку немає. Однак, якщо відомі деякі загальні властивості цієї функції (диференційовність, обмеженість її деяких похідних тощо), то задача має розв'язок. Зокрема, математика функціональних інтервалів в багатьох випадках дає можливість будувати двосторонні наближення функцій, аналітичні вирази яких, і аналітичні вирази її похідних невідомі.

Для цього, ґрунтуючись на понятті функції, її похідної, дотичної, у [2, 3, 4] запропоновано такі принципи:

Принцип 1. *Основний принцип розвитку функціональної залежності. У кожній точці області визначення будь-якої диференційовної функції відбувається уздовж її дотичної в цій точці.*

Принцип 2. *Розвиток функціональної залежності (прямий і зворотний), з протилежних кінців проміжку $[a, b]$ у точці зустрічі відповідним чином узгоджуються (попарно узгоджуються значення обмежувальних функцій функціонального інтервалу функції та функціональних інтервалів їх похідних).*

Принцип 3. *Функціональну залежність можна крім таблично-го, та аналітичного зображення подати ще і у таблично-аналітичному вигляді.*

Тому, реалізуючи *основний принцип* розвитку функціональної залежності (Принцип 1), кожен алгоритм розв'язування задачі (1)–(2) на підставі математики функціональних інтервалів розпочинає роботу із визначення функціонального інтервалу, який гарантовано містить невідомий розв'язок цієї задачі. Для цього попередньо вибираємо лінійний функціональний інтервал $Y([a, b]) = \{[a, b], \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, де

$$\underline{l}(x) = \underline{k} \cdot x + \underline{m}, \quad \bar{k} \cdot x + \bar{m},$$

$$\underline{k} = y'_a - \underline{\Delta}, \quad \bar{k} = y'_a + \bar{\Delta},$$

$$\underline{m} = y_a + \underline{k} \cdot a, \quad \bar{m} = y_a + \bar{k} \cdot a,$$

\underline{k} , \bar{k} , $\underline{\Delta}$, $\bar{\Delta}$, \underline{m} , \bar{m} – деякі константи, причому $\underline{\Delta} \geq 0$, $\bar{\Delta} \geq 0$, Отже, $\underline{k} \leq y'_a \leq \bar{k}$. Константи \underline{k} , \bar{k} , $\underline{\Delta}$, $\bar{\Delta}$, \underline{m} , \bar{m} вибираємо, реалізуючи Принцип 2. Реалізацію всіх цих принципів при розв'язуванні інтегральних рівнянь виду

$$y(x) \equiv f(x) + \lambda \int_a^x k(x, s, y(s)) ds,$$

частинним випадком якого є інтегральне рівняння Вольтерри другого роду, детально здійснено в [5]. Тому далі реалізацію їх детально розглянемо при розв'язуванні задачі Коші

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (3)$$

$$y(a) = y_a, \quad (4)$$

яка є найпростішою загальною початковою задачею коли в (1)–(2)

$$g(x) \equiv y'(x), \quad F(\cdot) \equiv F(x, y).$$

Нехай $y_a = y(a)$, $y_b = y(b)$, $y'_a = y'(a)$, $y'_b = y'(b)$, \underline{k} , \bar{k} , \underline{k}' , \bar{k}' – деякі константи.

Тоді маємо наступні дві леми та дві теореми, висновки яких є основою отримання висновків про попарну узгоджуваність значень обмежувальних функцій функціонального інтервалу функції та функціональних інтервалів їх похідних.

Лема 1. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і виконується така подвійна нерівність:

$$\underline{k} \leq y'(x) \leq \bar{k}, \quad (5)$$

Тоді

$$\underline{k} x + y_a - \underline{k} a \leq y(x) \leq \bar{k} x + y_a - \bar{k} a, \quad (6)$$

$$\bar{k} x + y_b - \bar{k} b \leq y(x) \leq \underline{k} x + y_b - \underline{k} b. \quad (7)$$

$$x_1 = (y_b - y_a + \bar{k} a - \underline{k} b) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (8)$$

$$x_2 = -(y_b - y_a - \bar{k} b + \underline{k} a) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (9)$$

$$x_1 + x_2 = a + b. \quad (10)$$

де (x_1, x_2) розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \bar{k} x + y_a - \bar{k} a = \underline{k} x + y_b - \underline{k} b, \\ \underline{k} x + y_a - \underline{k} a = \bar{k} x + y_b - \bar{k} b. \end{cases} \quad (11)$$

Доведення. Використавши висновки лем 1 з [2] проінтегруємо нерівність (5) на проміжках $[a, x]$, та $[x, b]$. Тоді отримуємо (6), (7), відповідно. Істинність твердження (формули) (10) перевіряємо безпосередньою підстановкою (8) і (9) у (10). Лема доведена.

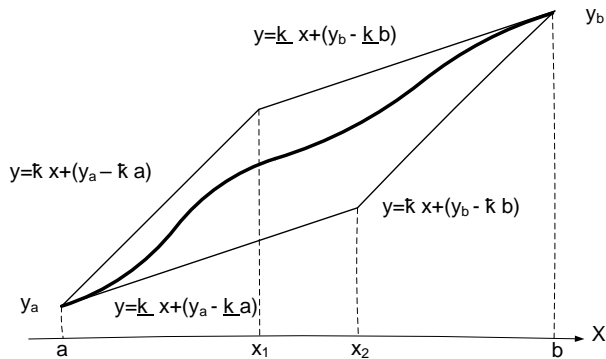


Рис. 2. Лінійний функціональний інтервал функції $y(x)$

Лема 2. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна і виконується така подвійна нерівність:

$$\underline{k}' \leq y''(x) \leq \bar{k}', \quad (12)$$

Тоді

$$\underline{k}' x + y'_a - \underline{k}' a \leq y'(x) \leq \bar{k}' x + y'_a - \bar{k}' a, \quad (13)$$

$$\bar{k}' x + y'_b - \bar{k}' b \leq y'(x) \leq \underline{k}' x + y'_b - \underline{k}' b, \quad (14)$$

$$x_1' = (y_b' - y_a' + \bar{k}'a - \underline{k}'b) / (\bar{k}' - \underline{k}'), \quad (15)$$

$$x_2' = -(y_b' - y_a' + \bar{k}'b - \underline{k}'a) / (\bar{k}' - \underline{k}'), \quad (16)$$

$$x_1' + x_2' = a + b. \quad (17)$$

де (x_1', x_2') розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \bar{k}'x + y_a - \bar{k}'a = \underline{k}'x + y_b - \underline{k}'b, \\ \underline{k}'x + y_a - \underline{k}'a = \bar{k}'x + y_b - \bar{k}'b. \end{cases} \quad (18)$$

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 1. Але інтегруємо нерівність (12) на проміжках $[a, x]$, та $[x, b]$.

Аналогічно будуємо і лінійний функціональний інтервал функції $y'(x)$.

Зауваження 2. У парах точок (x_1, x_1') та (x_2, x_2') , як правило, відповідні точки не співпадають, тобто $x_1 \neq x_1'$, $x_2 \neq x_2'$. Але, якщо точки x_1, x_2 співпадають, то з (10) маємо $x_1 = x_2 = s = (a+b)/2$. Якщо точки x_1', x_2' співпадають, то з (17) маємо $x_1' = x_2' = s = (a+b)/2$. Отже, завжди у парах точок (x_1, x_2) та (x_1', x_2') , точки розміщені симетрично відносно точки s – середини інтервалу $[a, b]$.

Випадки $x_1 = x_2$ і $x_1' = x_2'$ характерні тим, що тоді мають місце наступні теорема 1 та теорема 2, висновки яких є ключовими для знаходження основного співвідношення між величинами y_a, y_b, y_a', y_b' – значеннями функції і її похідної на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Теорема 1. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і виконується подвійна нерівність $\underline{k} \leq y'(x) \leq \bar{k}$, де кутові коефіцієнти \underline{k}, \bar{k} прямих $y = \underline{k}x + y_a - \underline{k}a$ $y = \bar{k}x + y_a - \bar{k}a$ такі, що

$$x_1 = x_2 = (a+b)/2. \quad (19)$$

Тоді

$$(\bar{k} + \underline{k})/2 = (y_b - y_a)/(b - a). \quad (20)$$

І навпаки, якщо виконується умова (20), то точки x_1, x_2 співпадають, тобто виконується умова (19).

Доведення. При виконанні умов теореми виконуються і умови леми 1. Тому, згідно висновків (8), (9) леми 1,

$$x_1 = (y_b - y_a + \bar{k} a - \underline{k} b) / (\bar{k} - \underline{k}),$$

$$x_2 = -(y_b - y_a - \bar{k} b + \underline{k} a) / (\bar{k} - \underline{k}).$$

Отже, якщо виконується умова (19), то

$$(y_b - y_a + \bar{k} a - \underline{k} b) / (\bar{k} - \underline{k}) =$$

$$= -(y_b - y_a - \bar{k} b + \underline{k} a) / (\bar{k} - \underline{k}).$$

Звідси послідовно маємо:

$$(2(y_b - y_a) + (\bar{k} + \underline{k})a - (\bar{k} + \underline{k})b) / (\bar{k} - \underline{k}) = 0,$$

$$(2(y_b - y_a) - (\bar{k} + \underline{k})(b - a)) / (\bar{k} - \underline{k}) = 0.$$

Оскільки $\underline{k} \neq \bar{k}$, то

$$2(y_b - y_a) - (\bar{k} + \underline{k})(b - a) = 0.$$

Отже,

$$(\bar{k} + \underline{k})(b - a) = 2(y_b - y_a).$$

Оскільки $a \neq b$, то маємо (20). Провівши міркування у зворотному напрямку, з (20) отримуємо (19). **Теорема доведена.**

Теорема 2. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна і виконується подвійна нерівність $\underline{k}' \leq y''(x) \leq \bar{k}'$, де кутові коефіцієнти \underline{k}' , \bar{k}' прямих $y = \underline{k}'x + y_a - \underline{k}'a$, $y = \bar{k}'x + y_a - \bar{k}'a$ такі, що

$$x'_1 = x'_2 = (a + b) / 2. \quad (21)$$

Тоді

$$(\bar{k}' + \underline{k}') / 2 = (y'_b - y'_a) / (b - a). \quad (22)$$

І навпаки, якщо виконується умова (22), то точки x_1, x_2 співпадають, тобто виконується умова (21).

Доведення. При виконанні умов теореми виконуються і умови леми 2. Тому, згідно висновків (15), (16) леми 2,

$$x'_1 = (y'_b - y'_a + \bar{k}'a - \underline{k}'b) / (\bar{k}' - \underline{k}'),$$

$$x'_2 = -(y'_b - y'_a + \bar{k}'b - \underline{k}'a) / (\bar{k}' - \underline{k}').$$

Якщо виконується умова (21), то

$$0.5 \underline{k} x^2 + = -(y'_b - y'_a + \bar{k}'b - \underline{k}'a) / (\bar{k}' - \underline{k}').$$

Тому послідовно маємо:

$$\left(2(y'_b - y'_a) + (\bar{k}' + \underline{k}')a - (\bar{k}' + \underline{k}')b\right) / (\bar{k}' - \underline{k}') = 0,$$

$$\left(2(y'_b - y'_a) - (\bar{k}' + \underline{k}')b + (\bar{k}' + \underline{k}')a\right) / (\bar{k}' - \underline{k}') = 0.$$

Оскільки $\underline{k} \neq \bar{k}$, то

$$2(y'_b - y'_a) - (\bar{k}' + \underline{k}')b + (\bar{k}' + \underline{k}')a = 0.$$

Отже,

$$(\bar{k}' + \underline{k}')b - (\bar{k}' + \underline{k}')a = 2(y'_b - y'_a).$$

Оскільки $a \neq b$, то маємо (22). Провівши міркування у зворотному напрямку, з (22) отримуємо (21). **Теорема доведена.**

Але умову (19) виконати підбором кутових коефіцієнтів \underline{k}, \bar{k} проблемно, оскільки тут використовується невідома величина y_b . Аналогічно, умову (21) виконати підбором кутових коефіцієнтів \underline{k}', \bar{k}' також проблемно, оскільки тут використовується невідома величина y'_b . Тому потрібно методи розв'язування загальної початкової задачі (1)-(2) і, зокрема, задачі Коші (3)-(4) будувати так, щоб одночасно забезпечити виконання обох умов (19) і (21).

В [2, 3] доведено (теорема 2, та теорема 5, відповідно), що функціональний інтервал розв'язку задачі Коші можна побудувати у вигляді «гіперболічного паралелограма», обмежувальні функції якого є квадратичними сплайнами. Однак, такі сплайни мають дефекти, що породжує невизначеності в точці $x = b$ інтервалу $[a, b]$.

Лема 1, 2, та Теорема 1, 2 дають змогу так конкретизувати вигляд парабол, з яких складаються обмежувальні функції функціонального інтервал розв'язку задачі Коші:

$$\overline{p1}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_a - \bar{k} a) x - 0.5 \bar{k} a^2 - (y'_a - \bar{k} a) a + y_a, \quad (23)$$

$$\underline{p1}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x - 0.5 \underline{k} a^2 - (y'_a - \underline{k} a) a + y_a, \quad (24)$$

$$\overline{p1}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_a - \bar{k} a) x - 0.5 \bar{k} b^2 - (y'_a - \bar{k} a) b + y_b, \quad (25)$$

$$\underline{p1}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x - 0.5 \underline{k} b^2 - (y'_a - \underline{k} a) b + y_b, \quad (26)$$

$$\overline{p2}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_b - \bar{k} b) x - 0.5 \bar{k} a^2 - (y'_b - \bar{k} b) a + y_a, \quad (27)$$

$$\underline{p2}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x - 0.5 \underline{k} a^2 - (y'_b - \underline{k} b) a + y_a, \quad (28)$$

$$\overline{p2}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_b - \bar{k} b) x - 0.5 \bar{k} b^2 - (y'_b - \bar{k} b) b + y_b, \quad (29)$$

$$\underline{p2}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x - 0.5 \underline{k} b^2 - (y'_b - \underline{k} b) b + y_b. \quad (30)$$

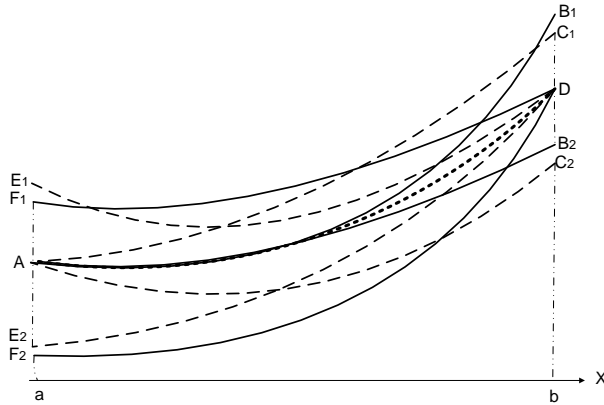


Рис. 3. Параболы узгодження значень функції на інтервалі її визначення та значень її похідної на кінцях цього інтервалу

На рисунку криві AB_1 , AB_2 зображують графіки парабол $\overline{p^1_a(x)}$, $\underline{p^1_a(x)}$; криві AC_1 , AC_2 зображують графіки парабол $\overline{p^2_a(x)}$, $\underline{p^2_a(x)}$; криві DF_1 , DF_2 зображують графіки парабол $\overline{p^1_b(x)}$, $\underline{p^1_b(x)}$; криві DE_1 , DE_2 зображують графіки парабол $\overline{p^2_b(x)}$, $\underline{p^2_b(x)}$; крива AD зображає графік функції $y(x)$.

Висновки теореми 1 та теореми 2 гарантують, що при виконанні їх умов на тих інтервалах, на яких ці умови виконуються, дефекти E_1F_1 , E_2F_2 та E_1F_1 , E_2F_2 можна усунути ітераційно і отримати двосторонню апроксимацію розв'язку задачі Коші у вигляді функціонального інтервалу, який гарантовано містить цей розв'язок.

Отже, так на проміжку $[a, b]$ отримуємо розв'язок задачі (3)-(4) у вигляді функціонального інтервалу, а у точці $x = b_1$ точне значення його, де $[a, b_1]$ інтервал, на якому виконуються обидві умови (5), (12). Отже, далі потрібно на інтервалі $[b_1, b]$ розв'язувати нову задачу Коші

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y(a) = y_a,$$

і так далі.

Алгоритм розв'язання задачі Коші. Врахувавши попередні висновки та використавши специфіку числення функціональних інтервалів отримуємо для розв'язування задачі Коші (3)-(4) такий ітераційний алгоритм.

Алгоритм.

Крок 1. Реалізуючи основний принцип розвитку функціональної залежності, та принцип 2, вибираємо лінійний функціональний інтервал $Y([a, b]) = \{[a, b], \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, де $\underline{l}(x) = \underline{k} \cdot x + \underline{m}$, $\bar{l}(x) = \bar{k} \cdot x + \bar{m}$, який у точці $x = a$ гарантовано містить невідомий розв'язок y_a цієї задачі. Тому кутові коефіцієнти та зміщення прямих $\underline{l}(x)$, $\bar{l}(x)$ вибираємо так:

$$\underline{k} = y'_a - \Delta, \quad \bar{k} = y'_a + \Delta, \quad \underline{m} = y_a + \underline{k} \cdot a, \quad \bar{m} = y_a + \bar{k} \cdot a,$$

де константа $\Delta > 0$.

Крок 2. Підставляємо цей лінійний функціональний інтервал у праву частину рівняння (3) і виконавши всі дії згідно аналітичного виразу функції $f(x, y(x))$, отримаємо функціональний інтервал похідної розв'язку задачі (3)-(4) у вигляді таких списків значень: spX – список точок розбиття інтервалу $[a, b]$ на підінтервали, $sp\bar{Y}'$ – список верхніх значень похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу $[a, b]$, $sp\underline{Y}'$ – список нижніх значень похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу $[a, b]$, $sp\bar{K}'$ – список верхніх значень кутових коефіцієнтів функціонального інтервалу похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу $[a, b]$, $sp\underline{K}'$ – список нижніх значень кутових коефіцієнтів функціонального інтервалу похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу, $sp\bar{M}'$ – список верхніх значень зміщень функціонального інтервалу похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу $[a, b]$, $sp\underline{M}'$ – список нижніх значень зміщень функціонального інтервалу похідної розв'язку у точках розбиття інтервалу $[a, b]$.

Крок 3. Будуємо прямі $y = \underline{k}$, $y = \bar{k}$, $y = sp\underline{K}'[1] \cdot x + sp\underline{M}'[1]$, $y = sp\bar{K}'[1] \cdot x + sp\bar{M}'[1]$ і аналізуючи списки $sp\bar{U}'$ та $sp\underline{U}'$ знаходимо в проміжку $[a, b]$ таку точку \tilde{b}_1 , до якої, разом з нею, всі елементи цих списків знаходяться одночасно між всіма так побудованими прямими. Це гарантує, що на проміжку $[a, \tilde{b}_1]$ виконується умова (5) і умова (12).

Крок 4. Згідно висновків теорем 1, 2 та теореми 5 з [3], виставивши формули (23)-(24), будуємо гіпотетичний функціональний інтервал розв'язку задачі (3)-(4). Для цього будуємо квадратні параболу

$$\bar{p}_a(x) = 0.5 \bar{k} (x^2 - a^2) + (y'_a - \bar{k} a) (x - a) + y_a, \quad (31)$$

$$p_a(x) = 0.5 \underline{k} (x^2 - a^2) + (y'_a - \underline{k} a) (x - a) + y_a, \quad (32)$$

такі, що $p_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x)$ для всіх $x \in [a, \tilde{b}_1]$. Знаходимо точку $\tilde{s} = (a + \tilde{b}_1)/2$ – середину інтервалу $[a, \tilde{b}_1]$, та, обчисливши в ній значення $\bar{y}_{\tilde{s}}$, $\underline{y}_{\tilde{s}}$ парабол (31) та (32), відповідно, будуємо параболу

$$\bar{p}_{\tilde{s}}(x) = 0.5 \bar{k} (x^2 - \tilde{s}^2) + (y'_{\tilde{s}} - \bar{k} a) (x - \tilde{s}) + \bar{y}_{\tilde{s}}, \quad (33)$$

$$p_{\tilde{s}}(x) = 0.5 \underline{k} (x^2 - \tilde{s}^2) + (y'_{\tilde{s}} - \underline{k} a) (x - \tilde{s}) + \underline{y}_{\tilde{s}}, \quad (34)$$

які проходять через точки $(\tilde{s}, \bar{y}_{\tilde{s}})$, $(\tilde{s}, \underline{y}_{\tilde{s}})$, відповідно. Обчислюємо значення $\bar{y}_{\tilde{b}_1}$, $\underline{y}_{\tilde{b}_1}$ парабол (33), (34) у точці $x = \tilde{b}_1$. Оскільки нам не відомі значення кутових коефіцієнтів \underline{k} , \bar{k} , то, як правило, в точці $x = \tilde{b}_1$ значення $\bar{y}_{\tilde{b}_1}$, $\underline{y}_{\tilde{b}_1}$ парабол (33), (34) не співпадають.

Якщо ширина інтервалу $\omega = |\bar{y}_{\tilde{b}_1} - \underline{y}_{\tilde{b}_1}| \leq \varepsilon$ де ε бажана гарантована, задана нами, точність двосторонньої апроксимації розв'язку задачі у точці $x = \tilde{b}_1$, то $b_1 = \tilde{b}_1$ і, згідно теореми 1 з [7, с. 147], вважаємо, що $y_{b_1} = (\bar{y}_{\tilde{b}_1} + \underline{y}_{\tilde{b}_1})/2$. На інтервалі $[a, b_1]$ задача розв'язана. Інакше переходимо до виконання наступного кроку 5 алгоритму.

Якщо при цьому $b_1 < b$, то далі переходимо до розв'язування на проміжку $[b_1, b]$ наступної задачі Коші

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y(b_1) = y_{b_1},$$

і так далі.

Якщо $b_1 = b$, то на всьому проміжку $[a, b]$ задача розв'язана.

Крок 5. Корегуємо кутові коефіцієнти обмежувальних функцій функціонального інтервалу розв'язку задачі. Для цього обчислюємо кутові коефіцієнти прямих, що проходять через точки (a, y_a) , $(\tilde{s}, \bar{p}_a(\tilde{s}))$ і (a, y_a) , $(\tilde{s}, p_a(\tilde{s}))$:

$$\tilde{\bar{k}} = (\bar{p}_a(\tilde{s}) - y_a) / (\tilde{s} - a),$$

$$\tilde{\underline{k}} = (p_a(\tilde{s}) - y_a) / (\tilde{s} - a).$$

Обчислюємо відхилення цих коефіцієнтів від значення похідної y'_a розв'язку у точці $x = a$:

$$\bar{\Delta} = \tilde{\bar{k}} - y'_a,$$

$$\tilde{\Delta} = y'_a - \tilde{k}.$$

Обчислюємо нове значення відхилення $\Delta = \max\left(\left|\frac{\tilde{m}}{\tilde{k}}\right|, \left|\frac{\tilde{l}}{\tilde{k}}\right|\right)$. Тому нові значення коефіцієнтів та зміщень обмежувальних прямих функціонального інтервалу розв'язку є такими:

$$\underline{k} = y'_a - \Delta, \quad \underline{m} = y_a - \underline{k} \cdot a, \quad (35)$$

$$\bar{k} = y'_a + \Delta, \quad \bar{m} = y_a - \bar{k} \cdot a. \quad (36)$$

Отже, новий зкорегований функціональний інтервал $Y([a, b]) = \{[a, b], \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, де $\underline{l}(x) = \underline{k} \cdot x + \underline{m}$, $\bar{l}(x) = \bar{k} \cdot x + \bar{m}$, а коефіцієнт \underline{k} , \bar{k} та зміщення \underline{m} , \bar{m} обмежувальних прямих обчислюємо за формулами (35), (36), також у точці $x = a$ гарантовано містить невідомий розв'язок y_a цієї задачі. Тому далі побудову функціонального інтервалу розв'язку продовжуємо з кроку 2.

Кінець алгоритму.

Отже, запропонований алгоритм послідовно знаходить розв'язок у точках b_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$), де $b_0 = a, b_n = b$, породжуючи табличне задання функції (розв'язку задачі), а на кожному інтервалі $[b_i, b_{i+1}]$ розв'язок задачі зображається функціональним інтервалом, обмежувальні функції якого є конкретними кусково-параболічними функціями, аналітичні вирази яких повністю відомі, тобто відповідна функціональна залежність (розв'язок задачі) задана аналітично. Отже, такі функції, двосторонні апроксимації розв'язків загальної початкової задачі, які отримуємо за допомогою математики функціональних інтервалів, мають таблично-аналітичне зображення, тобто такі методи реалізують Принцип 3.

Приклад. На проміжку $[0, 0.4]$ розв'язати таку задачу Коші:

$$y' = e^x \cdot y^2 - 2 \cdot y, \quad (37)$$

$$y(0) = 2. \quad (38)$$

Отже, $a = 0, b = 0.4, y_a = 2$. Очевидно, що $y'(0) = 0$, тобто $y'_a = 0$. Тому для побудови початкового функціонального інтервалу розв'язку візьмемо $\underline{\Delta} = 0.1, \bar{\Delta} = 0.3$. Тоді $\underline{k} = -0.1, \bar{k} = 0.3$. Підставивши побудований початковий функціональний інтервал у праву частину рівняння (37) та виконавши всі арифметичні дії, отримаємо функціональний інтервал похідної розв'язку у вигляді таких списків:

$$\begin{aligned} spX &= \{0, 0.002293, 0.004586, 0.00687201, 0.00915802, \\ &0.011451, 0.013744, 0.01603, 0.018316, 0.0269987, \\ &0.0356814, 0.0442647, 0.052848, 0.0615307, 0.0702133, \\ &0.0787967, 0.08738, 0.089673, 0.091966, 0.094252, 0.096538, \\ &0.098831, 0.101124, 0.10341, 0.105696\}, \\ sp\bar{Y}' &= \{0, 0.0124115, 0.0248356, 0.0372766, 0.0497303, \\ &0.0622811, 0.0748446, 0.0874253, 0.100019, 0.141449, \\ &0.183066, 0.225013, 0.267146, 0.310657, 0.354362, 0.39841, \\ &0.44265, 0.450558, 0.458456, 0.466377, 0.474289, 0.482273, \\ &0.490248, 0.498246, 0.506234\}, \\ sp\underline{Y}' &= \{0, 0.0068769, 0.0137496, 0.0206812, 0.0276086, \\ &0.0345538, 0.0414948, 0.0484951, 0.0554912, 0.0961916, \\ &0.13726, 0.179092, 0.221295, 0.264102, 0.307293, 0.351279, \\ &0.437094, 0.409344, 0.423062, 0.43683, 0.450627, 0.464475, \\ &0.47835, 0.492278, 0.506234\}, \\ sp\bar{K}' &= \{5.41277, 5.41829, 5.44224, 5.44777, 5.47352, 5.4791, \\ &5.50333, 5.50891, 4.7716, 4.79312, 4.88704, 4.90869, 5.01124, \\ &5.03364, 5.13175, 5.15427, 3.44857, 3.4445, 3.4651, 3.46103, \\ &3.48192, 3.47782, 3.49859, 3.49449\}, \\ sp\underline{K}' &= \{2.99908, 2.99725, 3.03219, 3.03035, 3.02887, 3.02702, \\ &3.06225, 3.06039, 4.68754, 4.72995, 4.87357, 4.91697, 4.93008, \\ &4.97443, 5.12464, 5.17002, 5.97002, 5.98215, 6.02313, 6.03533, \\ &6.03896, 6.05123, 6.0927, 6.10504\}, \\ sp\bar{M}' &= \{0., -0.0000126565, -0.000122488, -0.000160477, \\ &-0.000396316, -0.00046019, -0.000793186, -0.000882739, \\ &0.012622, 0.0120409, 0.00868955, 0.00773133, 0.00231168, \\ &0.00093375, -0.00595505, -0.00772983, 0.141314, 0.141679, \\ &0.139784, 0.140168, 0.138152, 0.138557, 0.136456, 0.136881\}, \\ sp\underline{M}' &= \{0., 4.20628 \cdot 10^{-6}, -0.000156044, -0.000143361, -0.000129826, \\ &-0.000108647, -0.000592885, -0.000563054, -0.0303661, -0.031511, \\ &-0.0366356, -0.0385565, -0.0392492, -0.0419783, -0.052525, -0.0561013, \\ &-0.126005, -0.127092, -0.130861, -0.132011, -0.132361, -0.133574, - \\ &0.137767, -0.139044\}. \end{aligned}$$

Отже, $sp\underline{K}'[1] = 5.41277$, $sp\underline{M}'[1] = 0$, $sp\bar{K}'[1] = 2.99908$, $sp\bar{M}'[1] = 0$. Тому використавши ці отримані результати і послідовно реалізуючи кроки алгоритму на кожному інтервалі $[b_i, b_{i+1}]$, отримуємо значення розв'язку задачі у точках b_i , та двосторонні апроксимації його на кожному цьому інтервалі.

Результати цих обчислень наведені у наступній таблиці 1.

Таблиця 1

Динаміка усунення невизначеності на кінцях інтервалів $[b_i, b_{i+1}]$

Номер інтервалу	Точки b_i розбиття інтервалу	Інтервал невизначеності розв'язку в точці b_{i+1}	Ширина інтервалу невизначеності	Значення точного розв'язку
1	0	[2.0000232, 2.0000245]	0.0000013	2.00002388
2	0,0034493	[2.0000739, 2.0000744]	0.0000005	2.00007422
3	0,0060734	[2.0001514, 2.0001519]	0.0000005	2.00015170
4	0,0086712	[2.0002554, 2.0002559]	0.0000005	2.00025570
5	0,0112431	[2.0003854, 2.0003859]	0.0000005	2.00038566
...
$n-2$	0.3923604	[2.6127758, 2,6127764]	0.0000006	2.61277625
$n-1$	0.3949323	[2.6253970, 2,6253974]	0.0000004	2.62539706
n	0.3974787	[2.6381445, 2,6381450]	0.0000005	2.63814492

На Рис. 4 зображено графік функціонального інтервалу розв'язку задачі (37)-(38), та графік його точного аналітичного виразу $y(x) = 2 / (2e^x - e^{2x})$.

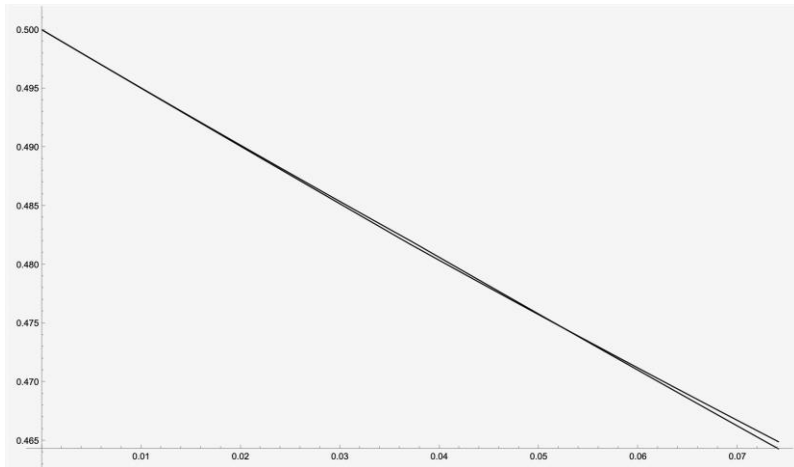


Рис. 4. Двостороння апроксимація розв'язку задачі у вигляді функціонального інтервалу

Висновки. В роботі запропонована методика розв'язування загальної початкової задачі та ітераційні алгоритми побудови двосторонніх апроксимацій на основі математики функціональних інтервалів розв'язування початкової задачі Коші для звичайних диференціа-

льних рівнянь та деяких видів інтегральних рівнянь. Розв'язки таких задач отримані у вигляді функціональних інтервалів. Доведено, що функційні рівняння, інтегральні рівняння та задача Коші є частинними випадками загальної початкової задачі. Доведені дві леми та дві теореми є основою отримання висновків про попарну узгоджуваність значень обмежувальних функцій функціонального інтервалу функції та функціональних інтервалів їх похідних. Запропоновано і досліджено на цій основі ітераційний алгоритм розв'язання задачі Коші.

Список використаних джерел:

1. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2014. Вип. 21. С. 38-57. DOI: 10.30970/vam.2014.21.8541.
2. Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів. *Матем. та комп. моделювання. Серія: Фізико-матем. науки.* 2016. Вип. 13. С. 182-193. DOI: 10.32626/2308-5878.2016-13.182-193.
3. Сеньо П. С. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2017. Вип. 24. С. 18-37. DOI: 10.30970/vam.2017.25.8475.
4. Сеньо П. С. Методи розв'язування граничних задач на основі математики функціональних інтервалів. *Матем. та комп. моделювання. Серія: Фізико-матем. науки.* 2018. Вип. 17. С. 133-144. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-17.133-144.
5. Сеньо П. С., Заяць А. Р. Ітераційний двосторонній метод розв'язування інтегральних рівнянь. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* 2026. Вип. 36. С. 255-265. DOI: 10.30970/vam.2026.36.00000.
6. Senio P. S. Two-sided approximatio finding of a function based on mathematics of functional intervals. *Proceedings of XXXII International Conference PDMU.* Prague, 2018. P. 146-154. ISBN 978-80-7582-068-6. URL: http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2018W/home.php.
7. Senio P. S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces. *Mathem. Studii.* 2019. Vol. 51. № 1. P. 92-106. DOI: 10.15330/ms.51.1.92-106.

References:

1. Seno P. S. Aryfmetryka liniinykh funksiionalnykh intervaliv. *Visn. Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform.* 2014. Vyp. 21. S. 38-57. DOI: 10.30970/vam.2014.21.8541.
2. Seno P. S. Deiaki zastosuvannia matematyky funksiionalnykh intervaliv. *Matem. ta komp. modeliuvannia. Seria: Fyzyko-matem. nauky.* 2016. Vyp. 13. S. 182-193. DOI: 10.32626/2308-5878.2016-13.182-193.
3. Seno P. S. Dvostoronni metody rozviazuvannia zadachi Koshi na pidstavi matematyky funksiionalnykh intervaliv. *Visn. Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform.* 2017. Vyp. 24. S. 18-37. DOI: 10.30970/vam.2017.25.8475.
4. Seno P. S. Metody rozviazuvannia hranychnykh zadach na osnovi matematyky funksiionalnykh intervaliv. *Matem. ta komp. modeliuvannia. Seria: Fyzyko-matem. nauky.* 2018. Vyp. 17. S. 133-144. DOI: 10.32626/2308-5878.2018-17.133-144.

5. Seno P. S., Zaiats A. R. Iteratsiyni dvostoronnii metod rozviazuvannia intehralnykh rivnian. *Visn. Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform.* 2026. Vyp. 36. S. 255-265. DOI: 10.30970/vam.2026.36.00000.
6. Senio P. S. Two-sided approximatia finding of a function based on mathematics of functional intervals. *Proceedings of XXXII International Conference PDMU*. Prague, 2018. R. 146-154. ISBN 978-80-7582-068-6. URL: http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2018W/home.php.
7. Senio P. S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces. *Mathem. Studii*. 2019. Vol. 51. № 1. P. 92-106. DOI: 10.15330/ms.51.1.92-106.

APPLICATION OF THE MATHEMATICS OF FUNCTIONAL INTERVALS TO SOLVING SOME TYPES OF GENERAL INITIAL PROBLEMS

This research provides a method for solving the general initial problem and iterative algorithms for constructing two-sided approximations based on the mathematics of functional intervals for solving the Cauchy initial problem for ordinary differential equations and some types of integral equations. Solutions of such problems are obtained in the form of functional intervals. An adaptive choice of the step length in these algorithms automatically responds to the problem nonlinearity degree. It is proved that functional equations, integral equations, and the Cauchy problem are special cases of the general initial problem. Based on the concept of a function, its derivative, and the tangent, the basic development principle of the functional dependence is proposed, the consistency principle of the direct and reverse development of the functional dependence from opposite ends of the integration interval of the functional interval of the function and the functional intervals of its derivatives. It is shown that except for the tabular and analytical representation, the functional dependence can be presented in the tabular-analytical form. The lemmas and theorems proved in this research make it possible to analyze and eliminate various uncertainties associated with the continuously differentiable functions.

In this research there is the method proposed for solving the general initial problem and iterative algorithms for constructing two-sided approximations based on the mathematics of functional intervals that combines the idea of two-sided approximations with the mathematical apparatus of functional intervals. The adaptive choice of the step length in these algorithms automatically responds to the level of nonlinearity of the problem, and the quadratic convergence of the width of the functional interval of the problem solution provides an effective narrowing of the uncertainty of the solution at each iteration.

Key words: *general initial problem, Cauchy problem, integral equations, functional uncertainty, interval, functional interval, two-sided approximation, iterative process.*