

УДК 519.9

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.170-188

Хурдей Є. Л.

ORCID: 0000-0001-8317-8194,

Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна,
E-mail: yevheniia.khurdei@karazin.ua

Нефьодова І. В.

ORCID: 0000-0002-1645-7668,

канд. фіз.-мат. наук, Бахмутський навчально-науковий професійно-педагогічний інститут Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна,
E-mail: i.nefodova@karazin.ua

Заборний А. В.

ORCID: 0009-0006-7026-8215,

аспірант, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна,
E-mail: anton.zabornyi@karazin.ua

Летуґа А. А.

ORCID: 0009-0001-4353-4534,

аспірант, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна,
E-mail: letuta0506@gmail.com

ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСЦИЛЬОВАНИХ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ НА ЛІНІЯХ

Сучасне математичне моделювання фізичних та технічних процесів наразі передбачає розв'язання проблеми обробки й аналізу функцій декількох змінних, значення яких відомі на системах ліній. Така задача є актуальною в цифровій обробці зображень оскільки значна частина інформації про досліджуваний об'єкт може надходити у вигляді вимірювань уздовж окремих напрямів

Стаття надійшла до редакції: 20.03.2026

Рекомендовано до друку: 9.04.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

або ліній, що є характерним для томографічних методів, дистанційного зондування та систем візуалізації. У межах розв'язання таких задач значний інтерес становить проблема чисельного інтегрування осцильованих функцій на основі даних на системі ліній. Однією з підзадач цієї проблеми є інтегрування осцильованих експоненціальних функцій декількох змінних.

Дослідження в статті присвячено чисельному інтегруванню осцильованих експоненціальних функцій двох змінних. Наведено кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від осцильованої експоненти. Кубатурна формула в своїй побудові в якості даних про функцію використовує сліди на взаємно перпендикулярних лініях. На класі Гельдера та Ліпшиця представлено оцінки похибки наближення.

В роботі багато уваги приділено тестуванню кубатурної формули наближеного обчислення подвійних інтегралів від осцильованої експоненти. Отримані результати дозволяють підтвердити теоретичні оцінки похибки на класі Гельдера та Ліпшиця.

В чисельному експерименті в якості тестової функції використано томографічний фантом еліптичної форми. Обрана тестова функція має важливу властивість: відповідний інтеграл від такої функції має аналітичне представлення, що дозволяє отримати коректні еталонні значення інтегралу.

В роботі проведено детальний аналіз впливу параметра осциляції ω та розбиття ℓ на точність чисельного інтегрування осцильованих експоненціальних функцій двох змінних.

Ключові слова: *математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування осцильованих експоненціальних функцій багатьох змінних, кубатурна формула, дані функції на лініях.*

Вступ. Сучасне математичне моделювання фізичних та технічних процесів потребує обробки та аналізу функцій декількох змінних, визначених не на всій області, а лише на обмежених множинах, зокрема на лініях, зрізах, перетинах. До таких задач можна віднести комп'ютерну томографію, оптичну та сейсмічну томографію, цифрову візуалізацію, аерокосмічне зондування, де вимірювання доступні лише вздовж певних прямих або перетинних ліній, що зумовлено фізичною природою експерименту або технічними обмеженнями системи.

Особливо складними вважаються процеси, коли функція, що підлягає відновленню або інтегруванню, має швидкоосцильований характер, як це має місце, наприклад, у задачах височастотної акустики, квантової механіки, електромагнітного моделювання. Для таких випадків традиційні методи чисельного інтегрування або інтерполяції виявляються малоефективними або навіть непридатними. Виникає потреба в розробці нових математичних моделей та обчислювальних методів, які базуються

на операторах відновлення за мультимодальними даними. Зокрема, побудова нових математичних методів, де інформація про функцію декількох змінних задається на лініях, відкриває можливість точнішого моделювання внутрішніх властивостей об'єктів, що є критично важливим у медичній діагностиці, контролі матеріалів, геофізичних розвідках, цифровій обробці зображень та інших сферах.

Складним є питання побудови математичних моделей, де виникає необхідність обчислювати подвійні та потрійні інтеграли від швидкоосцильованих функцій загального виду. Така задача є більш складною, потребує більш детального вивчення та створення нових підходів до отримання значущих результатів.

Один із ефективних підходів до розв'язання подібних задач ґрунтується на використанні спеціальних операторів відновлення, які дозволяють апроксимувати або точно реконструювати функцію на всій області за її значеннями на лінійних множинах. До таких операторів відносяться інформаційні оператори О. М. Литвина (оператори інтерлінації, інтерфлетачії, інтерстріпації) [1, 2]. В роботах [3-5] найбільш повно висвітлено роль інформаційних операторів в математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів та зображень, комп'ютерній, сейсмічній томографії.

Задача наближеного обчислення інтегралів від осцильованих функцій декількох змінних має як класичне розв'язання [6-8], так і у випадку різних інформаційних операторів [9, 10].

В [11-15] наведено методи обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду. Методи побудовані на використанні інформаційних операторів О. М. Литвина. В якості даних про функції використовувалися значення функцій на площинах, лініях, у вузлах розріджених сіток.

Однак не досліджувалося питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій декількох змінних загального виду у випадку використання операторів відновлення за даними на лініях на класі Гельдера та Ліпшиця.

Інтегрування осцильованої експоненційної функцій двох змінних із заданими слідами на взаємно перпендикулярних лініях на класах Гельдера та Ліпшиця. Розглянемо клас дійсних функцій двох змінних, визначених на $G = [0,1]^2$ і таких, що задовольняють умові Гельдера по кожній змінній з константою L і показником α , $0 < \alpha \leq 1$. Виділимо підклас функцій $C_{2,L,\tilde{L},\alpha}^2$, $0 < \alpha \leq 1$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} |u(x_1, y) - u(x_2, y)| &\leq L|x_1 - x_2|^\alpha, \quad |u(x, y_1) - u(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|^\alpha \\ |u(x_1, y_1) - u(x_2, y_1) - u(x_1, y_2) + u(x_2, y_2)| &\leq \tilde{L}|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\alpha, \quad \tilde{L} = L^2. \end{aligned}$$

Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega, g) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy \quad (1)$$

пропонується кубатурна формула з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах кусково-сталої інтерлінації. Отримаємо оцінку похибки на класі Гельдера та Ліпшиця.

Означення. Під слідом функції $u(x, y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $u(x_k, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $u(x, y_j)$, $0 \leq x \leq 1$.

Використаємо наступні позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}, \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}, \quad k, j = \overline{1, \ell}.$$

Розглянемо оператори

$$Tg(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} g(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} g(x, y_j) H_{0j}(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$T_1 g(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} g(x_k, y) h_{0k}(x), \quad T_2 g(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} g(x, y_j) H_{0j}(y),$$

тоді справедлива наступна тотожності:

$$Tg = (T_1 + T_2 - T_1 T_2) g.$$

Кубатурна формула

$$\Phi^2(\omega, g) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega Tg(x,y)} dx dy$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу (1).

Теорема 1. Нехай $g(x, y) \in C_{2,L,\tilde{L},\alpha}^2$, тоді

$$\begin{aligned} \left| I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) \right| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega Tg(x,y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \min \left(2, \frac{\omega \tilde{L}}{\ell^{2\alpha} (\alpha + 1)^2 4^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Доведення. Використаємо такий факт:

$$\begin{aligned} e^{i\omega g(x,y)} - e^{i\omega Tg(x,y)} &= \cos(\omega g(x, y)) + i \sin(\omega g(x, y)) - \\ &\quad \cos(\omega Tg(x, y)) - i \sin(\omega Tg(x, y)) = \\ &= -2 \sin \frac{\omega g(x, y) + \omega Tg(x, y)}{2} \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega Tg(x, y)}{2} + \\ &\quad + 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega Tg(x, y)}{2} \cos \frac{\omega g(x, y) + \omega Tg(x, y)}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega Tg(x, y)}{2} \times \\ &\quad \times \left[i \sin \frac{\omega g(x, y) + \omega Tg(x, y)}{2} + \cos \frac{\omega g(x, y) + \omega Tg(x, y)}{2} \right] = \\ &= 2 \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega Tg(x, y)}{2} e^{i \frac{\omega}{2} (g(x,y) + Tg(x,y))}. \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку $\left| I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) \right|$:

$$\begin{aligned} \left| I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) \right| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega Tg(x,y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega g(x,y)} - e^{i\omega Tg(x,y)} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| 2 \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega Tg(x, y)}{2} e^{i \frac{\omega}{2} (g(x,y) + Tg(x,y))} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega (g(x, y) - Tg(x, y))}{2} \right| dx dy \leq \\ &2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1, \frac{\omega |g(x, y) - Tg(x, y)|}{2} \right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \min \left(1, \frac{\omega \tilde{L} |x - x_k|^\alpha |y - y_j|^\alpha}{2} \right) dx dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \min \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\omega}{2} \tilde{L} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |x-x_k|^\alpha |y-y_j|^\alpha dx dy \right) \leq \\ &\leq 2 \min \left(\ell^2 \Delta^2, \frac{\omega}{2} \tilde{L} \ell^2 \frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{2\alpha}} \frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{2\alpha}} \right) = 2 \min \left(1, \frac{\omega}{2} \tilde{L} \ell^2 \frac{\Delta^{2\alpha} \Delta^2}{(\alpha+1)^2 4^\alpha} \right) = \\ &= 2 \min \left(1, \frac{\omega}{2} \tilde{L} \frac{1}{\ell^{2\alpha} (\alpha+1)^2 4^\alpha} \right) = \min \left(2, \frac{\omega \tilde{L}}{\ell^{2\alpha} (\alpha+1)^2 4^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Розглянемо $C_{2,L,\tilde{L}}^2$ – клас функцій двох змінних, визначених на $G = [0,1]^2$ і задовольняючих умові Ліпшиця по кожній змінній з константою L :

$$|u(x_1, y) - u(x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad |u(x, y_1) - u(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

та додаткової умові

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_1) - u(x_1, y_2) + u(x_2, y_2)| \leq \tilde{L}|x_1 - x_2||y_1 - y_2|, \quad \tilde{L} = L^2.$$

Теорема 2. Нехай $g(x, y) \in C_{2,L,\tilde{L}}^2$, тоді

$$\left| I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) \right| = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega Tg(x,y)} dx dy \right| \leq \min \left(2, \frac{\omega \tilde{L}}{16\ell^2} \right).$$

Доведення. Якщо в умові теореми 1 покласти $\alpha = 1$, то отримаємо нерівність

$$\left| I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) \right| = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega Tg(x,y)} dx dy \right| \leq \min \left(2, \frac{\omega \tilde{L}}{16\ell^2} \right).$$

Теорема 2 доведена.

Результати обчислювального експерименту. Як тестову функцію використано томографічний фантом еліптичної форми, ненульовий лише всередині еліптичної області

$$g(x, y) = \max \{0, 1 - \rho(x, y)\}^\alpha, \quad \rho = \sqrt{\left(\frac{x-0.5}{0.22}\right)^2 + \left(\frac{y-0.5}{0.15}\right)^2},$$

де ρ задає еліптичну відстань до центра області, $a = 0.22$ та $b = 0.15$ – півосі еліпса. Параметр $\alpha > 0$ контролює регулярність функції та дозволяє моделювати різні типи крайових неоднорідностей. Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ функція має гельдерівську сингулярність

на межі еліпса, при $\alpha=1$ вона є ліпшицевою, при $\alpha > 1$ забезпечується вища гладкість.

Розглянемо осциляційний інтеграл

$$I^2(\omega, g) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy.$$

Обрана модель має важливу властивість: відповідний інтеграл має аналітичне представлення, що дозволяє отримати еталонні значення та виконати коректну оцінку похибки. Зокрема,

$$I(\omega) = 1 - \pi ab + \frac{2\pi ab}{\alpha} \left[z^{-\frac{1}{\alpha}} \gamma\left(\frac{1}{\alpha}, z\right) - z^{-\frac{2}{\alpha}} \gamma\left(\frac{2}{\alpha}, z\right) \right], \quad z = -i\omega,$$

де $\gamma(s, z) = \int_0^z t^{s-1} e^{-t} dt$ – нижня неповна гамма-функція.

Отримане представлення дозволяє обчислити $I^2(\omega, g)$ з високою точністю та використовувати його як еталонний розв'язок при чисельному дослідженні похибок методів обчислення осциляційних інтегралів.

На рис. 1-5 наведено графік фантомної плями, а також перерізи фантомної плями вздовж координатних осей.

Переріз при x при $y=0.5$ має більшу ширину, що відповідає півосі $a=0.22$, тоді як переріз по y при $x=0.5$ є вужчим і гострішим ($b=0.15$).

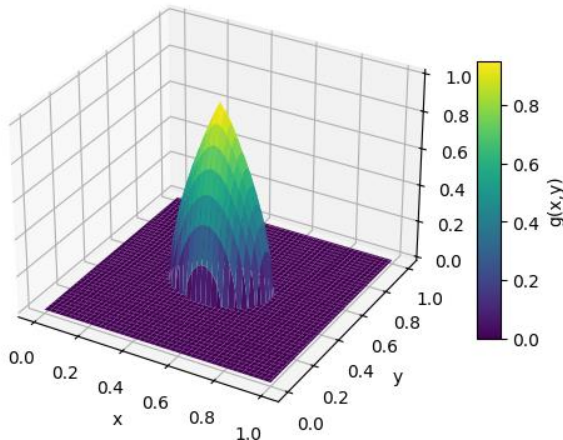


Рис. 1. Поверхня тестової функції $g(x, y)$ при $\alpha = 0.6$

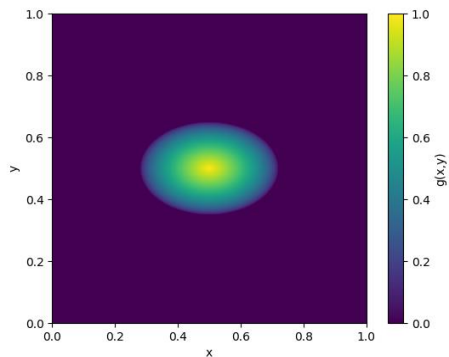


Рис. 2. Теплова карта $g(x, y)$ при $\alpha = 0.6$

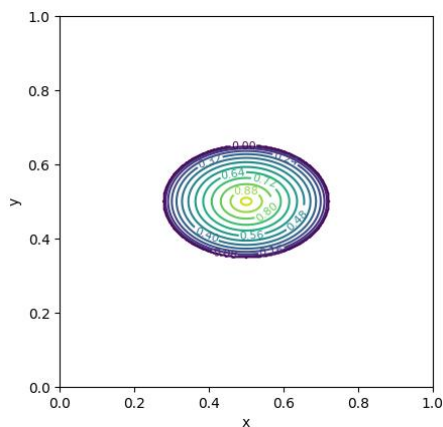


Рис. 3. Контурні лінії $g(x, y)$ при $\alpha = 0.6$

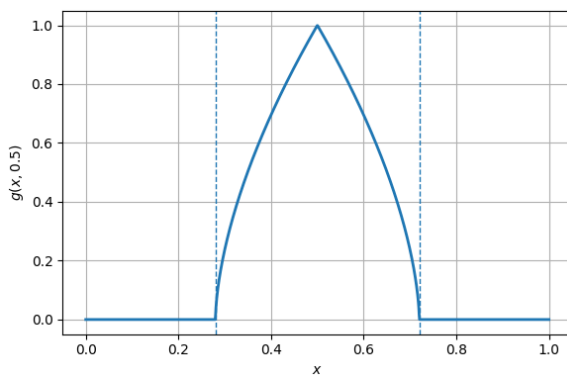


Рис. 4. Переріз $g(x, y)$ по x

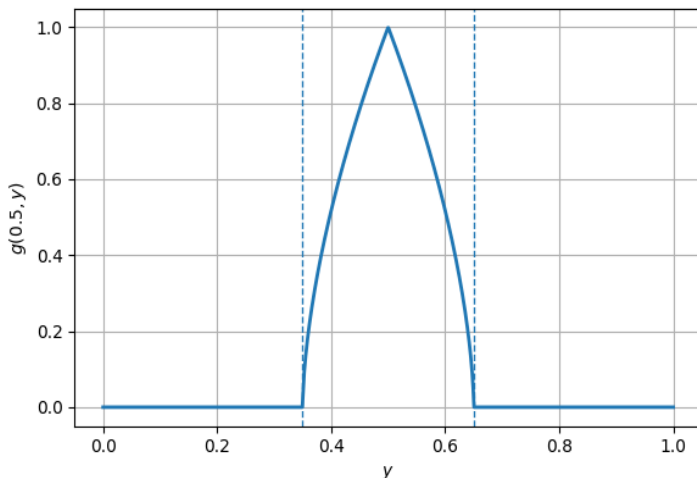


Рис. 5. Переріз $g(x, y)$ по y

Для $\alpha = 0.6$ спостерігається гельдерівська негладкість, що суттєво впливає на збіжність класичних методів.

Для функції двох змінних проведено чисельний експеримент, що дозволяє детально дослідити вплив параметрів ω , ℓ на точність чисельного інтегрування.

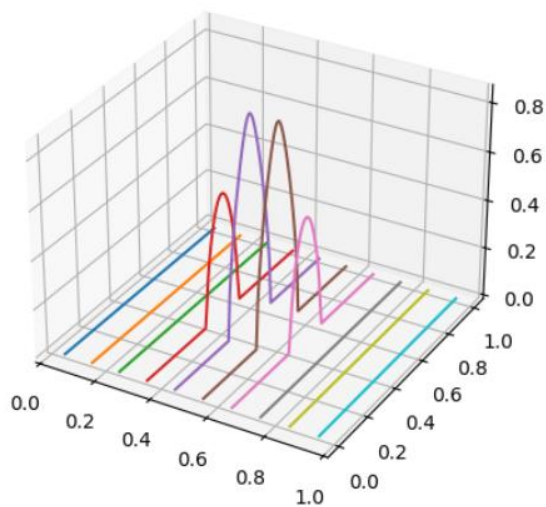


Рис. 6. Следи функції на прямих $x = x_k, k = 1, \dots, \ell$

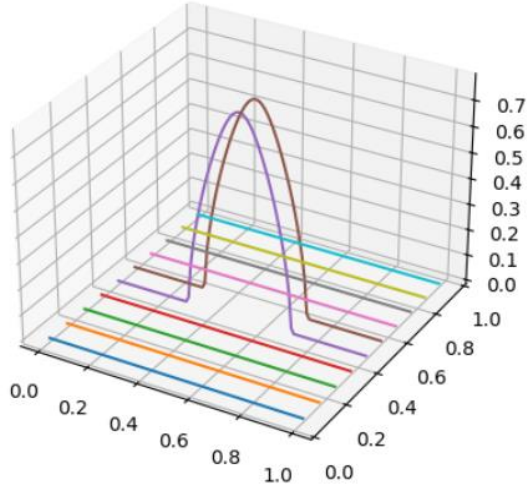


Рис. 7. Сліди функції на прямих $y = y_j, j = 1, \dots, \ell$

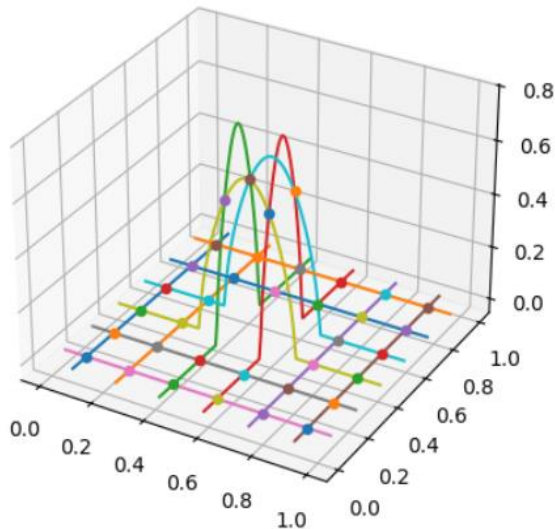


Рис. 8. Значення функції в вузлових точках $x = x_k, y = y_j, k, j = 1, \dots, \ell$

На рис. 9-10 зображено тривимірні графіки дійсної та уявної частини підінтегральної функції $e^{i\omega g(x,y)}$ при $\omega = 2\pi$. У цьому випадку коливання функції є відносно повільними, і поверхні змінюються плавно в області ненульових значень функції $g(x, y)$.

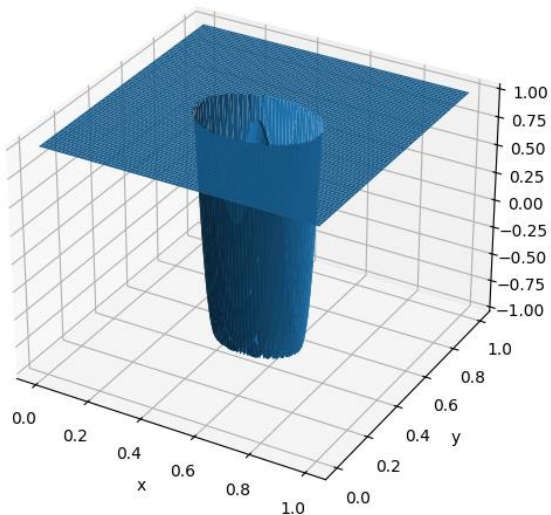


Рис. 9. 3D графік $\text{Re}(e^{i\omega g(x,y)})$, $\omega = 2\pi$

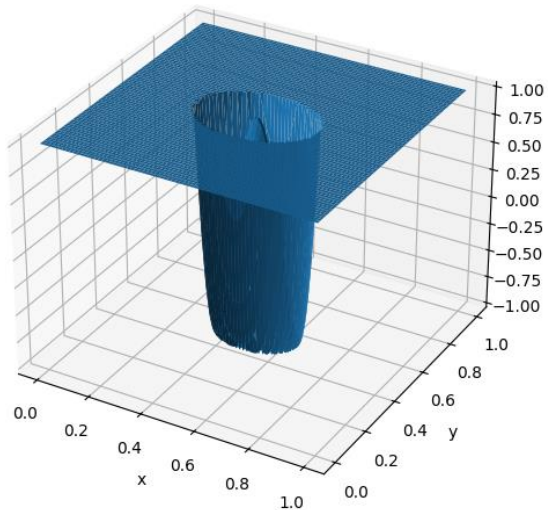


Рис. 10. 3D графік $\text{Im}(e^{i\omega g(x,y)})$, $\omega = 2\pi$

На рис. 11-12 показано аналогічні графіки при $\omega = 160\pi$. Із зростанням параметра ω значно збільшується частота коливань підінтегральної функції.

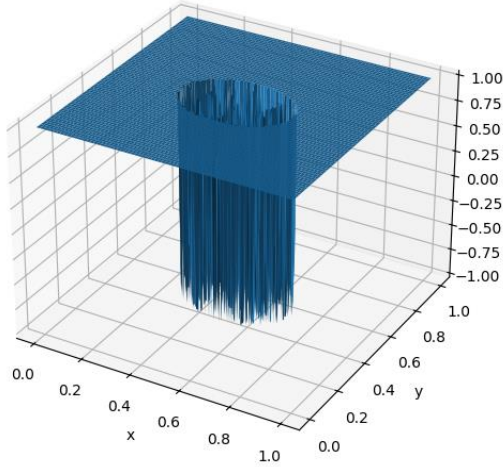


Рис. 11. 3D графік $\operatorname{Re}\left(e^{i\omega g(x,y)}\right)$, $\omega = 160\pi$

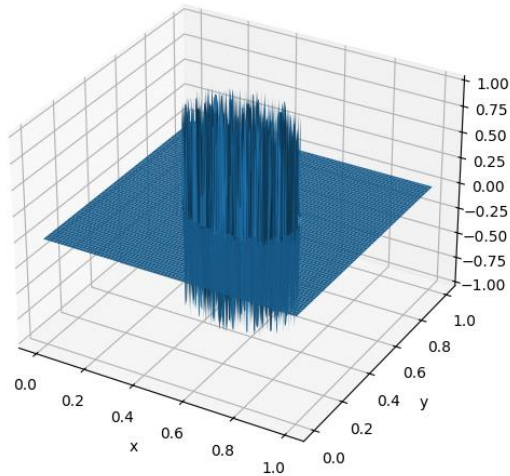


Рис. 12. 3D графік $\operatorname{Im}\left(e^{i\omega g(x,y)}\right)$, $\omega = 160\pi$

Отже, збільшення параметра ω призводить до суттєвого ускладнення структури підінтегральної функції. Це є характерною особливістю осциляційних інтегралів і створює додаткові труднощі для їх чисельного обчислення.

Для детального аналізу впливу параметра осциляції ω та розбиття ℓ на точність чисельного інтегрування та з метою порівняння

отриманих оцінок похибки з теоретичними було виконано серію чисельних експериментів.

В таблицях 1-5 наведені результати обчислень для різних значень ω . Проведені чисельні експерименти демонструють збіжність запропонованого підходу до обчислення осциляційних інтегралів.

Із зростанням параметра розбиття ℓ абсолютна похибка систематично зменшується, що підтверджує ефективність застосованого методу.

Таблиця 1

Результати обчислень при $\omega = 10\pi$

ℓ	$I^2(\omega, g)$	$\Phi^2(\omega, g)$	$ I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) $
20	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.888434671380678- 0.00007289786184i	6.464E-3
40	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.892492311003823+ 0.001510664854924i	2.6E-3
80	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.894332292319959+ 0.000524475958459i	5.457E-4
160	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.89482746907374+ 0.000450114239159i	5.212E-5
320	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.894839656042284+ 0.00045209747762i	4.025E-5
640	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.894869709563736+ 0.00045966097214i	1.237E-5
1280	0.894875365589685+ 0.0004706642222i	0.894874180262284+ 0.000468803205386i	2.206E-6

Таблиця 2

Результати обчислень при $\omega = 20\pi$

ℓ	$I^2(\omega, g)$	$\Phi^2(\omega, g)$	$ I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) $
20	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.889295139029257+ 0.00172414772417i	6.797E-3
40	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.89168331218702- 0.00111057646995i	4.41E-3
80	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.893990848785882+ 0.000225783258804i	1.919E-3
160	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.895503468653166+ 0.000333978496305i	4.43E-4
320	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.895813593441695+ 0.000162506077737i	9.508E-5
640	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.895895215929443+ 0.000137812896772i	2.093E-5
1280	0.895908303257522+ 0.000154143492446i	0.895905156998935+ 0.000150718802776i	4.651E-6

Таблиця 3

Результати обчислень при $\omega = 40\pi$

ℓ	$I^2(\omega, g)$	$\Phi^2(\omega, g)$	$ I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) $
20	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.889630918680394+ 0.000033101088583i	6.571E-3
40	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.891021577504887 – 0.000345611163075i	5.196E-3
80	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.89419799101443- 0.000021165800266i	2.006E-3
160	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.895374213368798+ 0.000051875104021i	8.281E-4
320	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.895745628381564+ 0.00008856222002i	4.584E-4
640	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.896123880719992+ 0.000082869053837i	8.537E-5
1280	0.89620230369806+ 0.00004914529152i	0.896193517380913+ 0.000053790560908i	9.939E-6

Таблиця 4

Результати обчислень при $\omega = 80\pi$

ℓ	$I^2(\omega, g)$	$\Phi^2(\omega, g)$	$ I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) $
20	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.888985530425729 – 0.000649638583511i	7.34E-3
40	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.89128587402506+ 0.000217897323149i	5.015E-3
80	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.89395727858977- 0.000005512108881i	2.339E-3
160	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.895404692495268+ 0.000019646006197i	8.916E-4
320	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.895833769111957+ 0.000033210221334i	4.632E-4
640	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.896093689116036+ 0.000002143513634i	2.025E-4
1280	0.896296177757329+ 0.000006624900505i	0.89620446180334+ 0.000034926995793i	9.598E-5

Таблиця 5

Результати обчислень при $\omega = 160\pi$

ℓ	$I^2(\omega, g)$	$\Phi^2(\omega, g)$	$ I^2(\omega, g) - \Phi^2(\omega, g) $
20	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.891382476945563+ 0.002063321560255i	5.365E-3
40	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.89254134887817- 0.000714422745105i	3.859E-3

Продовження таблиці 5

80	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.894198200351754+ 0.000041544930762i	2.137E-3
160	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.89538869618352+ 0.00003261959787i	9.465E-4
320	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.895833759826344+ 0.000037610457956i	5.023E-4
640	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.896080106231199+ 0.000001943555625i	2.544E-4
1280	0.89633451510045 – 0.000002027211195i	0.896207867798066+ 0.000004723291006i	1.268E-4

На рис. 13 для відносно малих значень параметра осциляції спостерігається швидке спадання похибки, яка при достатньо великих значеннях ℓ досягає рівня 10^{-6} . Це свідчить про високу точність методу в умовах помірної осциляції підінтегральної функції.

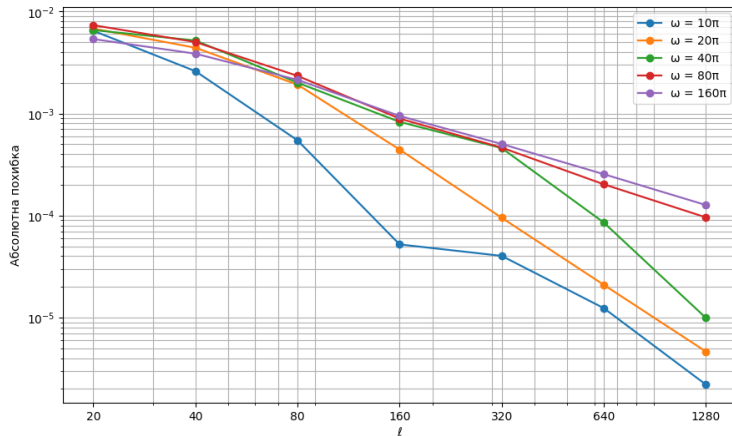


Рис. 13. Залежність абсолютної похибки від параметра ℓ для різних значень ω

Із збільшенням параметра ω характер збіжності змінюється. Зростання частоти коливання підінтегральної функції призводить до більш складної структури та уповільнення зменшення похибки. Для більших значень параметра ω досягнення високої точності потребує більш тонкого розбиття області інтегрування.

Отримані результати узгоджуються з відомими властивостями осциляційних інтегралів: зі збільшенням параметра осциляції задача стає суттєво складнішою для чисельного обчислення. Запропонований підхід демонструє стабільність і передбачувану поведінку похибки при збільшенні параметра розбиття.

Таким чином, результати дослідження підтверджують ефективність запропонованого методу та свідчать про перспективність його застосування для чисельного обчислення багатовимірних осциляційних інтегралів.

Висновки. Побудова та вдосконалення математичних моделей та методів з використанням мультимодальних даних є актуальним напрямком сучасних досліджень, зокрема для задач цифрової обробки зображень. Стаття присвячена чисельному інтегруванню швидкоосцильованих експоненціальних функцій двох змінних, у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями на лініях. Наведено кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від осцильованої експоненти. Кубатурна формула в своїй побудові в якості даних про функцію використовує сліди на взаємно перпендикулярних лініях. На класі Гельдера та Ліпшиця представлено оцінки похибки наближення, які підтверджено чисельним експериментом. В роботі проведено детальний аналіз впливу параметра осциляції та розбиття на точність чисельного інтегрування швидкоосцильованих експоненціальних функцій двох змінних.

Список використаних джерел:

1. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer*. 2021. 378 p. DOI:10.1007/978-3-030-90908-6.
2. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. № 54 (1). P. 21-30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
3. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements). *Cybernetics and systems analysis*. 2014. Vol. 50. № 4. P. 594-602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
4. Nechuviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 1031 (1). Art. 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
5. Задірака В. К., Луц Л. В., Швідченко І. В. Теорія обчислень інтегралів від швидкоосцильованих функцій. Київ: Наукова думка, 2023. DOI: 10.15407/978-966-00-1843-3.
6. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. № 60. P. 276-284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
7. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Luts L. V. Optimal quadrature evaluation of integrals of rapidly oscillating functions in Lipschitz interpolation class in case of strong oscillation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46. № 2. P. 264-270. DOI: 10.1007/s10559-010-9203-4.
8. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Luts L. V. Optimal integration of rapidly oscillating functions in the class $W_{2, L, N}$ with the use of different information

- operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49. № 2. P. 229-238. DOI: 10.1007/s10559-013-9504-5.
9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interpolation. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. № 44 (3). P. 45-56. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40.
 10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. № 50 (3). P. 410-418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
 11. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020. Vol. 4. P. 65-73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
 12. Нечук О. П., Иванов С. С., Ковальчук К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП», 2022. № 1. С. 82-91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.
 13. Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2025. № 61. P. 589-595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
 14. Хурдей Є. Л., Иванов В. В. Кубатурні формули для осциляційних інтегралів із заданими слідами функції на лініях. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2025. № 3. P. 59-67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.5
 15. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical integration of rapidly oscillating functions using reconstruction operators based on data on lines. *Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2025. Iss. 28. P. 137-154. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

References:

1. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer*. 2021. 378 p. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.
2. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. № 54 (1). P. 21-30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
3. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements). *Cybernetics and systems analysis*. 2014. Vol. 50. № 4. P. 594-602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
4. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. Vol. 1031 (1). Art. 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
5. Zadiraka V. K., Luts L. V., Shvidchenko I. V. Teoriia obchyslen intehraliv vid shvydkoostsylovanых funktsii. Kyiv: Naukova dumka, 2023. DOI: 10.15407/978-966-00-1843-3.
6. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. № 60. P. 276-284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.

7. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Luts L. V. Optimal quadrature evaluation of integrals of rapidly oscillating functions in Lipschitz interpolation class in case of strong oscillation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46. № 2. P. 264-270. DOI: 10.1007/s10559-010-9203-4.
8. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Luts L. V. Optimal integration of rapidly oscillating functions in the class $W_{2,L,N}$ with the use of different information operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49. № 2. P. 229-238. DOI: 10.1007/s10559-013-9504-5.
9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interpolation. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. № 44 (3). P. 45-56. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40.
10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. № 50 (3). P. 410-418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
11. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020. Vol. 4. P. 65-73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
12. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Novi informatsiini operator v zadachakh chyselnoho intehrivannia funksi trokh zminnykh. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychni modeliuвання v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2022. № 1. P. 82-91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.
13. Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2025. № 61. P. 589-595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
14. Khurdei Ye. L., Ivanov V. V. Kubaturni formuly dlia ostsyliaitsiinykh intehruliv iz zadanymy slidamy funksi na liniyakh. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2025. № 3. P. 59-67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.5.
15. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical integration of rapidly oscillating functions using reconstruction operators based on data on lines. *Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2025. Iss. 28. P. 137-154. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

CALCULATION OF DOUBLE INTEGRALS OF OSCILLATING EXPONENTIAL FUNCTIONS FROM DATA ON LINES

Modern mathematical modelling of physical and technical processes currently involves solving the problem of processing and analysing functions of several variables, the values of which are known along lines. This problem is relevant in digital image processing, as a significant portion of the information about the object under study may be obtained in the form of measurements along individual directions or lines, which is characteristic of tomographic methods, remote sensing and visualisation systems. Within the scope of solving such problems, the problem of numerical integration of oscillating functions based on data on a system of lines is of

considerable interest. One of the subproblems of this problem is the integration of oscillating exponential functions of several variables.

The research in this article is devoted to the numerical integration of oscillating exponential functions of two variables. A cubature formula for the approximate calculation of double integrals of an oscillating exponential is presented. In its construction, the cubature formula utilises traces on mutually perpendicular lines as data on the function. Error estimates for the approximation are presented in the Hölder and Lipschitz classes.

The paper devotes considerable attention to testing the cubature formula for the approximate calculation of double integrals of an oscillating exponential. The results obtained confirm the theoretical error estimates in the Lipschitz and Hölder classes.

In the numerical experiment, an elliptical tomographic phantom was used as the test function. The chosen test function has an important property: the corresponding integral of such a function has an analytical representation, which allows one to obtain correct reference values of the integral.

The paper presents a detailed analysis of the influence of the oscillation parameter ω and the partition ℓ on the accuracy of numerical integration of oscillating exponential functions of two variables.

Key words: *mathematical modelling of processes, digital image processing, numerical integration of oscillating exponential functions of several variables, cubature formula, data of functions on lines.*