УДК 519.64:65
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.87-99

**Нечуйвітер О. П.**

ORCID: 0000-0003-2775-8471,
д-р фіз.-мат. наук, Навчально-науковий інститут
«Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського
національного університету ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
E-mail: olesia.nechuiviter@karazin.ua

**Іванов В. В.**

ORCID: 0009-0003-5379-9370,
аспірант, Навчально-науковий інститут
«Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського
національного університету ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
E-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua

**Шніцар А. С.**

ORCID: 0009-0008-4834-6971,
аспірант, Навчально-науковий інститут
«Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського
національного університету ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
E-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua

**Гіщак О. Р.**

ORCID: 0009-0002-9362-3647,
аспірант, Навчально-науковий інститут
«Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського
національного університету ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
E-mail: ostap.hishchak@karazin.ua

# ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЬОВАНИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ ЗА ДАНИМИ НА СИСТЕМІ ПЛОЩИН

Сучасний етап розвитку техніки передбачає стрімке впровадження нових цифрових технологій, алгоритмів і методів. Інформаційні технології зробили можливим використання нових підходів до збору, обробки та аналізу даних. Впровадження нових методів отримання вхідної інформації вимагає розробки нових алгоритмів та створення чисельних методів для

*Стаття надійшла до редакції: 23.03.2026*
*Рекомендовано до друку: 3.04.2026*
*Оприлюднено (online): 15.05.2026*

розв'язання актуальних задач. Це призводить до необхідності створення нових або вдосконалення існуючих математичних моделей та їх ефективної реалізації у комп'ютерних системах.

Однією з ключових задач у сучасному моделюванні систем та процесів, зокрема в цифровій обробці зображень, є чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Основна проблема чисельного інтегрування швидкоосцильованих функцій декількох змінних полягає в побудові нових кубатурних формул з використанням мультимодальних даних.

Наразі інтерес становлять методи чисельного інтегрування, розроблені з використанням інформаційних операторів, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції на площинах, лініях, у вузлах розріджених сіток тощо. До таких інформаційних операторів відносять оператори О. М. Литвина, використання яких ефективно зарекомендувало себе при наближеному обчисленні коефіцієнтів Фур'є функцій двох та трьох змінних.

Метою даної статті є побудова та дослідження на класі диференційовних функцій кубатурної формули наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду. Кубатурна формула в якості даних про функції використовує їх сліди на площинах. При побудові кубатурної формули в якості допоміжних функцій для інформаційних операторів використовуються кусково-лінійні сплайни.

**Ключові слова:** *математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування, швидкоосцильовані функції багатьох змінних, кубатурна формула.*

**Вступ.** Сучасний розвиток цифрових технологій спонукає науковців створювати нові або вдосконалювати існуючі підходи до моделювання технічних процесів. На часі є розробка математичних методів та моделей, які в своїй побудові використовують мультимодальні дані. До таких напрямків можна віднести цифрову обробку зображень, де стали широко застосовуватися інформаційні оператори з різними типами вхідних даних. Основні принципи побудови таких інформаційних операторів (операторів О. М. Литвина) викладено в [1, 2]. Оператори в своїй побудові використовують значення функцій на площинах, лініях, у вузлах розріджених сіток. За допомогою операторів О. М. Литвина можна ефективно розв'язувати задачі чисельного інтегрування функцій багатьох змінних [3, 4]. Окремо варто також зазначити, що вищезазначені інформаційні оператори ефективно зарекомендували себе при розв'язані таких задач цифрової обробки зображень як чисельне інтегрування швидкоосцильованих функцій декількох змінних. Побудовані кубатурні формули використовують в якості даних значення функції на площинах, на лініях та у вузлах розріджених двовимірних та тривимірних сіток [5, 6]. Доведено, що більшість таких формул є оптимальними за порядком точності.

Задачі чисельного інтегрування швидкоосцильованих функцій не залишаються без уваги світової наукової спільноти [7-11]. Більш складним та менш дослідженим питанням є наближене обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій декількох змінних в загальному вигляді. В [12-15] представлені квадратурні формули наближеного обчислення потрійних та подвійних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду на різних класах функцій. При побудові кубатурних формул в якості допоміжних функцій для інформаційних операторів використовувалися кусково-сталі сплайни. Дана робота має на меті представити та дослідити на класі диференційовних функцій кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидкоосцильованих функцій загального виду на основі оператора інтерфлетанта з кусково-лінійними допоміжними функціями. Інформація про функції буде задаватися слідами на системах взаємно перпендикулярних площин.

**Постановка задачі.** Розглянемо $H^{3,1}\left(M,\tilde{M}\right)$ – клас дійсних функцій $u(x,y,z)$ , визначених в області $G=\left[0,1\right]^3$ і таких, що

$$\left|u^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M,\quad \left|u^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M,\quad \left|u^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M,$$

$$\left|u(x,y,z)\right|\le M_u,\quad \left|u^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}_u .$$

Для наближеного обчислення інтегралу

$$I(f,g,\omega)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(x,y,z)dxdydz \tag{1}$$

побудувати кубатурну формулу, яка використовує оператор інтерфлетації з допоміжними функціями у вигляді лінійних сплайнів та значення функції $f\left(x,y,z\right)$ та $g\left(x,y,z\right)$ на плошинах

$$x_k=k\Delta_1,\ \ y_j=j\Delta_1,\ \ z_s=s\Delta_1,\ \ k,j,s=\overline{0,\ell_1}\,,\ \Delta_1=1/\ell_1,$$

$$\tilde{x}_p=p\Delta_2,\ \ \tilde{y}_q=q\Delta_2,\ \ \tilde{z}_r=r\Delta_2,\ \ p,q,r=\overline{0,\ell_2}\,,\ \Delta_2=1/\ell_2 .$$

Отримати оцінку похибки наближення інтегралу кубатурною формулою на класі диференційовних функцій.

**Чисельне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду на класі** $H^{3,1}\left(M,\tilde{M}\right)$. Введемо наступні позначення:

$$h1_{10}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_0,\\ \dfrac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0<x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\quad h1_{1\ell_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell_1-1},\\ \dfrac{x-x_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1}<x<x_{\ell_1},\\ 0, & x\ge x_{\ell_1},\end{cases}$$

$$h1_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta_1}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta_1}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell_1-1},$$

$$x_k=k\Delta_1,\ y_j=j\Delta_1,\ z_s=s\Delta_1,\ \ \Delta_1=1/\ell_1,\ \ k,j,s=\overline{1,\ell_1}.$$

Допоміжні функції $h2_{1p}(x)$, $h2_{2q}(y)$, $h2_{3r}(z)$ визначаються аналогічно при $\tilde{x}_p=p\Delta_2$, $\tilde{y}_q=q\Delta_2$, $\tilde{z}_r=r\Delta_2$, $\Delta_2=1/\ell_2$, $p,q,r=\overline{0,\ell_2}$.

Розглянемо оператор

$$Jf(x,y,z)=J_1f\left(x,y,z\right)+J_2f\left(x,y,z\right)+J_3f\left(x,y,z\right)-$$
$$-J_1J_2f\left(x,y,z\right)-J_2J_3f\left(x,y,z\right)-J_1J_3f\left(x,y,z\right)+J_1J_2J_3f\left(x,y,z\right),$$

де

$$J_1f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell_1}f(x_k,y,z)h1_{1k}(x),\ J_2f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\ell_1}f(x,y_j,z)h1_{2j}(y),$$

$$J_3f(x,y,z)=\sum_{s=0}^{\ell_1}f(x,y,z_s)h1_{3s}(z),$$

а також оператор

$$Og(x,y,z)=O_1g\left(x,y,z\right)+O_2g\left(x,y,z\right)+O_3g\left(x,y,z\right)-$$
$$-O_1O_2g\left(x,y,z\right)-O_2O_3g\left(x,y,z\right)-O_1O_3g\left(x,y,z\right)+O_1O_2O_3g\left(x,y,z\right),$$

в якому

$$O_1g(x,y,z)=\sum_{p=0}^{\ell_2}g(\tilde{x}_p,y,z)h2_{1p}(x),$$

$$O_2g(x,y,z)=\sum_{q=0}^{\ell_2}g(x,\tilde{y}_q,z)h2_{2q}(y),\ O_3g(x,y,z)=\sum_{r=0}^{\ell_2}f(x,y,\tilde{z}_r)h2_{3r}(z).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується кубатурна формула

$$\Phi(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz. \qquad (2)$$

**Теорема.** *Нехай* $f(x,y,z),\ g(x,y,z)\in H^{3,r}\left(M,\tilde{M}\right)$, *та* $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ *задані слідами* $f(x_k,y,z)$, $f(x,y_j,z)$, $f(x,y,z_s)$, $k,j,s=\overline{0,\ell_1}$ *і* $g\left(\tilde{x}_p,y,z\right)$, $g\left(x,\tilde{y}_q,z\right)$, $g\left(x,y,\tilde{z}_r\right)$, $p,q,r=\overline{0,\ell_2}$ *на системах взаємно перпендикулярних прямих в області* $G=\left[0,1\right]^3$. *Тоді для кубатурної формули* $\Phi(f,g,\omega)$ *справедлива наступна оцінка:*

$$\rho\left(I(f,g,\omega),\Phi(f,g,\omega)\right)=\frac{\tilde{M}_f}{27}\frac{1}{\ell_1^3}+M_f\min\left(2;\frac{\tilde{M}_g\omega}{27}\frac{1}{\ell_2^3}\right).$$

**Доведення.** Розглянемо додаткові функції, які будуть використані при доведені теореми для представлення похибки наближення $f\left(x,y,z\right)$ оператором інтерфлетантом $Jf\left(x,y,z\right)$ через $f^{(1,1,1)}\left(x,y,z\right)$ та для представлення похибки наближення $g\left(x,y,z\right)$ оператором інтерфлетантом $Og\left(x,y,z\right)$ через $g^{(1,1,1)}\left(x,y,z\right)$:

$$K_{1k}\left(x,\xi\right)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}, & x_k\le\xi<x,\\[2mm] \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}, & x<\xi\le x_{k+1},\end{cases}$$

$$K_{2j}\left(y,\eta\right)=\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}, & y_j\le\eta<y,\\[2mm] \dfrac{y_j-y}{y_{j+1}-y_j}, & y<\eta\le y_{j+1},\end{cases}$$

$$K_{3s}\left(z,\zeta\right)=\begin{cases}\dfrac{z_{s+1}-z}{z_{s+1}-z_j}, & z_s\le\zeta<z,\\[2mm] \dfrac{z_s-z}{z_{s+1}-z_s}, & z<\zeta\le z_{s+1},\end{cases}$$

$$G_{1p}\left(x,\tilde{\xi}\right)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_{p+1}-x}{\tilde{x}_{p+1}-\tilde{x}_p}, & \tilde{x}_p\le\tilde{\xi}<x,\\[2mm] \dfrac{\tilde{x}_p-x}{\tilde{x}_{p+1}-\tilde{x}_p}, & x<\tilde{\xi}\le\tilde{x}_{p+1},\end{cases}$$

$$G_{2q}\left(y,\tilde{\eta}\right)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{y}_{q+1}-y}{\tilde{y}_{q+1}-\tilde{y}_q}, & \tilde{y}_q\le\tilde{\eta}<y,\\[2mm] \dfrac{\tilde{y}_q-y}{\tilde{y}_{q+1}-\tilde{y}_q}, & y<\tilde{\eta}\le\tilde{y}_{q+1}.\end{cases}$$

$$G_{3r}\left(z,\tilde{\zeta}\right)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{z}_{r+1}-z}{\tilde{z}_{r+1}-\tilde{z}_r}, & \tilde{z}_r\le\tilde{\zeta}<z,\\[2mm] \dfrac{\tilde{z}_r-z}{\tilde{z}_{r+1}-\tilde{z}_r}, & z<\tilde{\zeta}\le\tilde{z}_{r+1}.\end{cases}$$

Інтеграл $I(f,g,\omega)$ може бути записаний у вигляді

$$I(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(x,y,z)dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right]\sin\omega Og(x,y,z)dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\left[\sin\omega g(x,y,z)-\sin\omega Og(x,y,z)\right]dxdydz\,,$$

тоді

$$\rho\left(I(f,g,\omega),\Phi(f,g,\omega)\right)=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(x,y,z)dxdydz-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(x,y,z)dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)\right|\left|\sin\omega g(x,y,z)-\sin\omega Og(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)\right|\left|\sin\frac{\omega g(x,y,z)-O\omega g(x,y,z)}{2}\right.\times$$

$$\times\cos\frac{\omega g(x,y,z)+\omega Og(x,y,z)}{2}\Bigg|dxdydz\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{j=0}^{\ell_1-1}\sum_{s=0}^{\ell_1-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\Bigg|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}f^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\varsigma)K_{1k}(x,\xi)\times$$

$$\times K_{2j}(y,\eta)K_{3s}(z,\varsigma)\,d\xi d\eta d\varsigma\Bigg|dxdydz+$$

$$+2M_f\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{q=0}^{\ell_2-1}\sum_{r=0}^{\ell_2-1}\int_{\tilde{x}_p}^{\tilde{x}_{p+1}}\int_{\tilde{y}_q}^{\tilde{y}_{q+1}}\int_{\tilde{z}_r}^{\tilde{z}_{r+1}}\left|\sin\frac{\omega(g(x,y,z)-\omega Og(x,y,z))}{2}\right|dxdydz\leq$$

$$\leq\tilde{M}_f\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{j=0}^{\ell_1-1}\sum_{s=0}^{\ell_1-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|K_{1k}(x,\xi)\right|d\xi dx\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|K_{2j}(y,\eta)\right|d\eta dy\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|K_{2s}(z,\varsigma)\right|d\zeta dz+$$

$$+2M_f\sum_{p=0}^{\ell_2-1}\sum_{q=0}^{\ell_2-1}\sum_{r=0}^{\ell_2-1}\int_{\tilde{x}_p}^{\tilde{x}_{p+1}}\int_{\tilde{y}_q}^{\tilde{y}_{q+1}}\int_{\tilde{z}_r}^{\tilde{z}_{r+1}}\min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,y,z)-Og(x,y,z)\right|}{2}\right)dxdydz\leq$$

$$\leq\tilde{M}_f\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{j=0}^{\ell_1-1}\sum_{s=0}^{\ell_1-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|K_{1k}(x,\xi)\right|d\xi dx\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|K_{2j}(y,\eta)\right|d\eta dy\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|K_{3s}(z,\varsigma)\right|d\zeta dz+$$

$$+2M_f\sum_{p,q,r=0}^{\ell_2-1}\int_{\tilde{x}_p}^{\tilde{x}_{p+1}}\int_{\tilde{y}_q}^{\tilde{y}_{q+1}}\int_{\tilde{z}_r}^{\tilde{z}_{r+1}}\min\left(1;\frac{\omega}{2}\left|\int_{\tilde{x}_p}^{\tilde{x}_{p+1}}\int_{\tilde{y}_q}^{\tilde{y}_{q+1}}\int_{\tilde{z}_r}^{\tilde{z}_{r+1}}g^{(1,1,1)}(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\varsigma})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times G_{1p}(x,\tilde{\xi})G_{2q}(y,\tilde{\eta})G_{3r}(z,\tilde{\varsigma})\,d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}d\tilde{\varsigma}\right|\right)dxdydz\leq$$

$$\leq\tilde{M}_f\ell_1^3\frac{\Delta_1^2}{3}\frac{\Delta_1^2}{3}\frac{\Delta_1^2}{3}+2M_f\min\left(\ell_2^3\Delta_2^3,\frac{\tilde{M}_g\omega}{2}\ell_2^3\frac{\Delta_2^2}{3}\frac{\Delta_2^2}{3}\frac{\Delta_2^2}{3}\right)=$$

$$=\frac{\tilde{M}_f}{27}\Delta_1^3+M_f\min\left(2;\frac{\tilde{M}_g\omega}{27}\Delta_2^3\right)=\frac{\tilde{M}_f}{27}\frac{1}{\ell_1^3}+M_f\min\left(2;\frac{\tilde{M}_g\omega}{27}\frac{1}{\ell_2^3}\right).$$

**Теорема доведена.**

**Вплив параметра осциляції, розподілу площин дискретизації та допоміжних функцій на точність чисельного інтегрування.** Ефективність чисельного інтегрування функцій декількох змінних суттєво залежить від класу гладкості підінтегральних функцій. Порядок диференційовності визначає можливість отримання більш точних теоретичних оцінок похибки та обґрунтовує вибір параметрів дискретизації, що продемонстровано, наприклад, в роботі [14]. Однак і при фіксованому порядку диференційовності функцій важливо знати залежність точності наближення від параметрів осциляції та кількості задіяних в обчисленнях площин.

ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 29. P. 87-99.

Розглянемо функції $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $g(x,y,z)=$ $=\cos(x+y+z)$, які належать класу $H^{3,1}\left(M,\tilde{M}\right)$. Тоді підінтегральна функція буде мати вигляд

$$F(x,y,z)=\sin(x+y+z)\sin(\omega\cos(x+y+z)) .$$

На Рис. 1-3 зображені значення функції $F(x,y,z)$ при $\omega=20\pi$ на площинах
$x=0;\ x=0,5;\ x=1;\ y=0,3;\ y=0,6;\ y=0,9;\ z=0,25;\ z=0,5;\ z=0,75.$

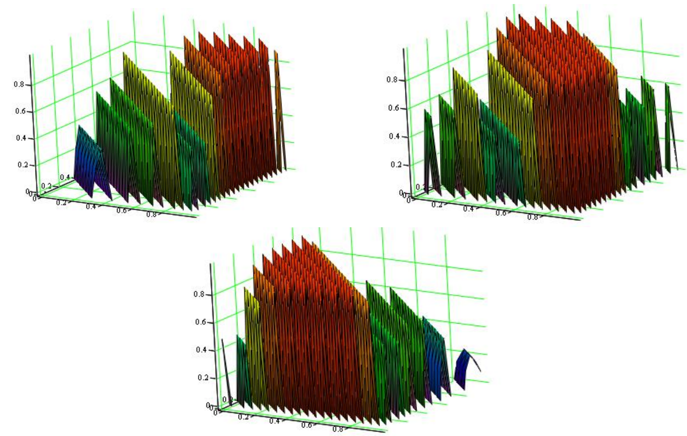

***Рис. 1.*** *Зображення* $F(x,y,z)$ *при* $x=0$, $x=0,5$, $x=1$

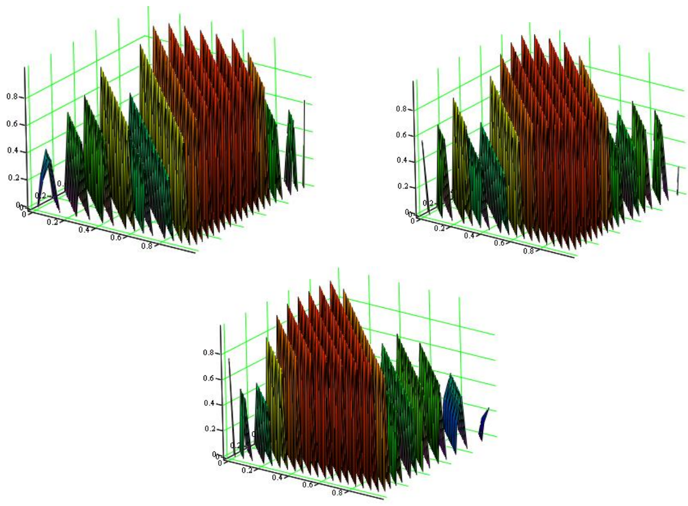

***Рис. 2.*** *Зображення* $F(x,y,z)$ *при* $y=0,3;\ y=0,6;\ y=0,9$

ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 29. P. 87-99.

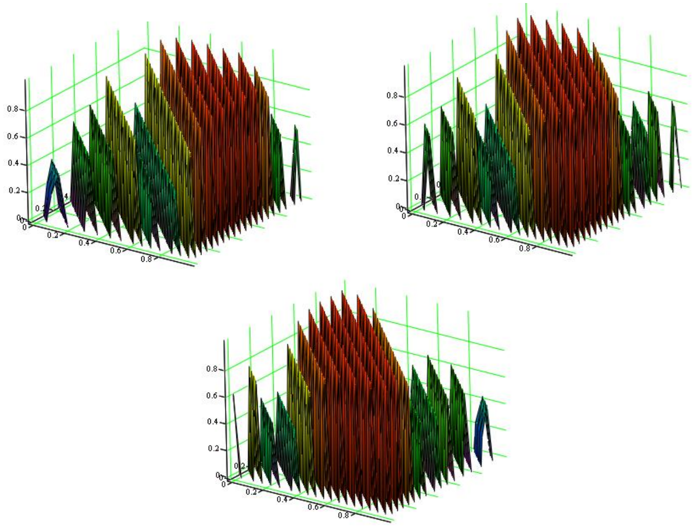

***Рис. 3.*** *Зображення* $F(x,y,z)$ *при* $z=0,25;\ z=0,5;\ z=0,75$

Для заданих функцій маємо $M = M_f = M_g = \tilde{M}_f = \tilde{M}_g = 1$. За теоремою точність наближення інтегралу (1) за формулою (2) на класі $H^{3,1}\left(M,\tilde{M}\right)$ при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ дорівнює

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1\left(\ell,\omega\right) = \frac{1}{27\ell^3} + \min\left(2;\frac{\omega}{27\ell^3}\right). \qquad (3)$$

В роботі [13] для наближеного обчислення інтегралу (1) розглядалась кубатурна формула, яка в своїй побудові використовувала оператори інтерфлетанти з допоміжними функціями у вигляді не кусково-лінійних, а кусково-сталих сплайнів. Було отримано оцінку похибки наближення, яка для функцій $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $g(x,y,z) = \cos(x+y+z)$ при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ перетворювалася в наступну рівність

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2\left(\ell,\omega\right) = \frac{1}{64\ell^3} + \min\left(2;\frac{\omega}{64\ell^3}\right). \qquad (4)$$

Залежність (3) та (4) показує, що в даному експерименті при обчисленні потрійного інтегралу (1) за допомогою кубатурної формули на основі кусково-сталої апроксимації забезпечується менша похибка, ніж кубатурною формулою з використанням операторів інтерфлетації з допоміжними кусково-лінійними сплайнами.

В таблиці 1 наведено значення теоретичної похибки $\varepsilon_1$ та $\varepsilon_2$ для функцій $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $g(x,y,z)=\cos(x+y+z)$ для різних значень $\omega$ і $\ell$.

Таблиця 1

*Значення теоретичної похибки* $\varepsilon_1$ *та* $\varepsilon_2$ *при* $\omega = 20\pi, 60\pi, 100\pi$

| $\ell$ | $\omega$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ |
|---|---|---|---|
| 64 | $\omega = 20\pi$ | $9,018 \cdot 10^{-6}$ | $3,805 \cdot 10^{-6}$ |
| 128 | $\omega = 20\pi$ | $1,127 \cdot 10^{-6}$ | $4,756 \cdot 10^{-7}$ |
| 256 | $\omega = 20\pi$ | $1,409 \cdot 10^{-7}$ | $5,945 \cdot 10^{-8}$ |
| 512 | $\omega = 20\pi$ | $1,761 \cdot 10^{-8}$ | $7,431 \cdot 10^{-9}$ |
| 1024 | $\omega = 20\pi$ | $2,201 \cdot 10^{-9}$ | $9,289 \cdot 10^{-10}$ |
| 256 | $\omega = 60\pi$ | $4,183 \cdot 10^{-7}$ | $1,765 \cdot 10^{-7}$ |
| 512 | $\omega = 60\pi$ | $5,299 \cdot 10^{-8}$ | $2,206 \cdot 10^{-8}$ |
| 1024 | $\omega = 60\pi$ | $6,536 \cdot 10^{-9}$ | $2,758 \cdot 10^{-9}$ |
| 512 | $\omega = 100\pi$ | $8,697 \cdot 10^{-8}$ | $3,669 \cdot 10^{-8}$ |
| 1024 | $\omega = 100\pi$ | $1,087 \cdot 10^{-8}$ | $4,586 \cdot 10^{-9}$ |

Незважаючи на те, що кусково-сталі апроксимації забезпечують кращі теоретичні оцінки похибки, використання кусково-лінійних сплайнів є доцільним, оскільки вони точніше відтворюють локальну зміну функції між площинами спостереження.

**Висновки**. В роботі представлено кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидкоосцильованої функції загального виду. Особливістю запропонованої формули є використання в якості даних значень функцій на системах взаємно перпендикулярних площин. Кубатурна формула в своїй побудові використовувала інформаційний оператор О. М. Литвина, а саме оператор інтерфлетації з допоміжними функціями у вигляді кусково-лінійних сплайнів. Отримано оцінку похибки наближення чисельного інтегрування швидкоосцилюючих функцій на класі диференційовних функцій.

## Список використаних джерел:

1. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. № 54(1). P. 21-30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
2. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer.* 2021. 378 p. DOI:10.1007/978-3-030-90908-6.
3. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* Vol. 1031 (1). Art. 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.

4. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools.* 2021. № 82 (2). P. 282-296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
5. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Science.* 2012. № 44 (3). P. 45-56. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40.
6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. № 50 (3). P. 410-418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
7. Задірака В. К., Луц Л. В., Швідченко І. В. Теорія обчислень інтегралів від швидкоосцильованих функцій. Київ: Наукова думка, 2023. DOI: 10.15407/978-966-00-1843-3.
8. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2024. № 60. P. 276-284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
9. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. Royal Soc.* 2005. Vol. 461. Iss. 2057. P. 1383-1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
10. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals. *Bit Numer Math 65.* 2025. Vol. 36. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
11. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators, in ICCSA 2021 / O. Gervasi et al. (Eds.) *Lecture Notes in Computer Science 12950*. 2021. P. 622-629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1_45.
12. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* Харків: НТУ «ХПІ», 2022. № 1. С. 82-91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.
13. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2020. Vol. 4. P. 65-73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
14. Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2025. № 61. P. 589-595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
15. Нечуйвітер О. П., Іванов В. В., Шніцар А. С., Гіщак О. Р. Ефективне чисельне інтегрування двовимірних швидкоосцильованих функцій загального виду. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2025. № 2 (9). С. 91-103. DOI:10.20998/2222-0631.2025.02(9).12.

## References:

1. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. № 54 (1). P. 21-30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.

2. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer* 2021. 378 p. DOI:10.1007/978-3-030-90908-6.
3. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* Vol. 1031 (1). Art. 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
4. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools.* 2021. № 82 (2). P. 282-296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
5. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Science.* 2012. № 44 (3). P. 45-56. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40.
6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. № 50 (3). P. 410-418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
7. Zadiraka V. K., Luts L. V., Shvidchenko I. V. Teoriia obchyslen inteh-raliv vid shvydkoostsylovanykh funktsii. Kyiv: Naukova dumka, 2023. DOI: 10.15407/978-966-00-1843-3.
8. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2024. № 60. P. 276-284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
9. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. Royal Soc.* 2005. Vol. 461. Iss. 2057. P. 1383-1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
10. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals. *Bit Numer Math 65*. 2025. Vol. 36. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
11. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators, in ICCSA 2021, O. Gervasi et al. (Eds.), Lecture Notes in Computer Science 12950. 2021. P. 622-629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1_45
12. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Novi informatsiini operatory v zadachakh chyselnoho intehruvannia funktsii trokh zminnykh. *Visnyk NTU «KhPI». Seriia : Matematychne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh.* Kharkiv: NTU «KhPI», 2022. № 1. P. 82-91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.
13. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2020. Vol. 4. P. 65-73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
14. Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2025. Vol. 61. P. 589-595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
15. Nechuiviter O. P., Ivanov V. V., Shnitsar A. S., Hishchak O. R. Efektyvne chyselne intehruvannia dvovymirnykh shvydkoostsylovanykh funktsii zahalnoho vydu. *Vis-*

*nyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskyi politekhnichnyi instytut». Seriia : Matematychne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*. 2025. № 2 (9). P. 91-103. DOI:10.20998/2222-0631.2025.02(9).12.

## NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING TRIPLE INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATING FUNCTIONS OF GENERAL FORM USING DATA ON A SYSTEM OF PLANES

The current stage of technological development involves the rapid introduction of new digital technologies, algorithms and methods. Information technology has made it possible to adopt new approaches to the collection, processing and analysis of data. The introduction of new methods for obtaining input data requires the development of new algorithms and the creation of numerical methods to solve pressing problems. This leads to the need to create new or improve existing mathematical models and implement them effectively in computer systems.

One of the key challenges in modern system and process modelling, particularly in digital image processing, is the numerical integration of functions of several variables. The main problem in the numerical integration of rapidly oscillating functions of several variables lies in deriving new volume integration formulas using multimodal data.

Currently, there is interest in numerical integration methods developed using information operators, which reconstruct intermediate values of quantities based on a given set of known function values on planes, lines, at nodes of sparse grids, and so on. Such information operators include those of O. M. Lytvyn, the use of which has proven effective in the approximate calculation of Fourier coefficients of functions of two and three variables.

The aim of this article is to construct and study, on the class of differentiable functions, a cubature formula for the approximate calculation of triple integrals of rapidly oscillating functions of general form. The cubature formula uses the traces of the functions on planes as input data. When constructing the cubature formula, piecewise-linear splines are used as auxiliary functions for the information operators.

**Key words:** *mathematical modelling of processes, digital image processing, numerical integration, rapidly oscillating functions of several variables, cubature formula.*