УДК 519.6:519.642:519.85
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.5-28

Абрамчук В. С.

ORCID: 0000-0002-1053-6373,
канд. фіз.-мат. наук, професор, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна,
E-mail: abramchuk.doc@gmail.com

Абрамчук І. В.

ORCID: 0000-0001-7291-5566,
Вінницький національний
технічний університет, м. Вінниця, Україна,
E-mail: abramchuk@vntu.edu.ua

Тютюн Л. А.

ORCID: 0000-0001-9466-8746,
канд. пед. наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна,
E-mail: tiutiun.la@vspu.edu.ua

Соя О. М.

ORCID: 0000-0002-0937-299X,
канд. пед. наук, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Україна,
E-mail: soia.om@vspu.edu.ua

Бабюк Д. О.

ORCID: 0009-0009-5376-0787,
Комунальний заклад «Хмільницький ліцей № 4
Хмільницької міської ради», м. Хмільник, Україна,
E-mail: dimka.babyuk@gmail.com

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НА СІТКАХ ІЗ ПАРАМЕТРОМ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

Досліджені властивості степенів і многочленів з параметром золотого перерізу. Важливою задачею в теорії інтерполяційних многочленів є згладжування кубічних многочленів однієї змінної у точках з'єднання. Запропоновано згладжування виконувати на періодичних сітках з параметром золотого перерізу. Для мінімізації функції двох і трьох змінних побудова-

Стаття надійшла до редакції: 14.04.2026
Рекомендовано до друку: 21.04.2026
Оприлюднено (online): 15.05.2026

ні кубічні многочлени, відповідно, на десяти-, двадцяти- точкових шаблонах. Системи лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів многочленів, відповідно, 10-го, 20-го порядків розкладаються на підсистеми третього порядку.

Обґрунтовано, що між порядком інтерполяційних кубічних многочленів двох і трьох змінних і розмірністю сіток з параметром золотого перерізу існує оптимальна узгодженість, яка приводить до високої швидкості обчислення коефіцієнтів, мінімізації похибки обчислень.

Побудовані методи розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної і системи нелінійних рівнянь з неперервними функціями, які засновані на принципі, що дослідження нелінійної задачі може дати більш точний і за меншу кількість кроків розв'язок, ніж ітераційне розв'язання лінійної моделі цієї задачі. Оскільки розв'язання нелінійної задачі на заданій неперервній області, як правило, аналітично не можливе, то необхідно перейти від неперервної моделі до дискретної на симетричних сітках з параметром золотого перерізу. Швидке стиснення таких областей з мінімальним числом значень функції виконується шляхом розбиття області задання на 3^n підобластей у просторі R^n, $n \geq 2$. Основною задачею є задача визначення тієї підобласті розбиття, яка містить розв'язок системи нелінійних рівнянь і яка розв'язується методом точки рівноваги, який не потребує застосування диференціального числення. Швидкість збіжності визначається параметром золотого перерізу і відповідає експоненційній швидкості збіжності.

Ключові слова: *многочлени, нелінійні рівняння, експоненційна швидкість збіжності, параметр золотого перерізу, точка рівноваги.*

Вступ. В основу побудови кубічних многочленів двох і трьох змінних і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної та системи рівнянь з неперервними й кусково неперервними функціями покладені властивості степенів і многочленів з параметром золотого перерізу [1; 2]. Основу швидких чисельних методів безумовної оптимізації і розв'язування нелінійних рівнянь складають методи ньютонівського і квазіньютонівського типів [3; 2]. Виникає питання, що є основою для побудови методів з швидкістю збіжності не меншою, ніж квадратична, і для більш широких класів функцій, ніж неперервно диференційовані функції. В основу розв'язання нелінійних рівнянь покладений принцип, що дослідження нелінійних задач дає більш глибокий, більш точний і за меншу кількість кроків, ніж ітераційне розв'язання лінійних моделей [4].

Постановка задачі. Дослідити властивості степенів і многочленів з параметром золотого перерізу. Побудувати кубічні многочлени двох і трьох змінних, методи розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної та системи нелінійних рівнянь з неперервними функціями. Довести, що збіжність методів розв'язування нелінійних рівнянь є порядку експоненційної швидкості.

Проблеми чисельного розв'язування нелінійних рівнянь, систем нелінійних рівнянь і задач оптимізації докладно висвітлені в класичних працях [3; 2], які становлять теоретичну основу сучасних алгоритмічних підходів. У роботі [1] досліджено інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу для оптимізації та розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної. Подальший розвиток інтерполяційних методів для нелінійних задач представлено у працях [5-9], де використано «barycentric interpolation» [5], узагальнена інтерполяція Ерміта [6; 8], а також «adaptive method with memory» [9]. У роботі [7] досліджуються методи третього порядку збіжності та побудови ітераційних процесів. Водночас недостатньо розроблено підходи до розв'язування нелінійних задач на періодичних сітках із параметром золотого перерізу, побудови кубічних многочленів на локальних багатоточкових шаблонах для функцій декількох змінних.

Основна частина.

1. Степеневі послідовності параметра золотого перерізу r. Параметр золотого перерізу $r=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ є коренем квадратного рівняння $r^2=1-r$. Степеневі послідовності r^n, $n\in Z$, мають важливі властивості в чисельних методах:

1) Степеневі послідовності r^n, $n\in Z$, є лінійними двочленними формами параметра r [1]. Для всіх $n\in N$, $n\geq 2$, $r^n=a_n+b_n r$; для $n<-1$, $r^{-n}=c_n+d_n r$, де a_n, b_n, c_n, d_n – цілі числа.
2) **Теорема 1**. *Для всіх показників* $n\in Z$ *має місце тотожність*

$$r^n=r^{n+1}+r^{n+2}. \tag{1}$$

Доведення. Маємо $r^{n+1}+r^{n+2}=r^n(r+r^2)=r^n$, оскільки $r+r^2=1$.
Теорему доведено.

Із (1) випливає рівність $r^2+r^3+r^2=1$. Дійсно, $r^2+r^3=r$, $r+r^2=r^0=1$.

Теорема 2. *1. Многочлен* $P_n(r)$, $n\in N$, $n\geq 2$, *з цілими (раціональними) коефіцієнтами і степенями параметра* r *є двочленною лінійною формою виду* $A+Br$ *з цілими (раціональними) коефіцієнтами* A, B.

2. Раціональний дріб $R(r)=\dfrac{P_n(r)}{Q_m(r)}$, $n, m\in N$, $n\geq 1$, $m\geq 1$, *з цілими (раціональними) коефіцієнтами многочленів* $P_n(r)$, $Q_m(r)$ *і* *степенями параметра r є двочленною лінійною формою параметра r з раціональними коефіцієнтами (коефіцієнти многочлена $Q_m(r)$ належать області D, де, наприклад, $Q_m(r) > 0$).*

3. Вирази $\left(P_n(r)\right)^m$, $\dfrac{\left(P_n(r)\right)^m}{\left(Q_s(r)\right)^t}$, $n, m, s, t \in N$, де $P_n(r)$, $Q_s(r)$ – многочлени з цілими (раціональними) коефіцієнтами і степенями параметра r, є лінійними двочленними формами параметра r з раціональними коефіцієнтами; $Q_s(r) > 0$.

Доведення. На основі властивості 1 всі степені r^n, $n \in N$, $n \geq 2$, є двочленними лінійними формами, тому і многочлени, як суми степенів $a_k r^k$ після зведення подібних, будуть лінійними двочленними формами параметра r.

Залишилось довести, що раціональний дріб $\dfrac{A+Br}{C+Dr}$ знову є лінійною двочленною формою параметра r. Виконаємо перетворення

$$\frac{A+Br}{C+Dr} = \frac{A+B\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{C+D\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{A_1+B_1\sqrt{5}}{C_1+D_1\sqrt{5}} = \frac{\left(A_1+B_1\sqrt{5}\right)\left(C_1-D_1\sqrt{5}\right)}{C_1^2-5D_1^2} = \frac{A_2+B_2\sqrt{5}}{C_1^2-5D_1^2} =$$

$$= A_3 + B_3\sqrt{5} = A_4 + B_4 r,$$

де коефіцієнти A_4, B_4 є раціональними числами.

Твердження 1, 2 теореми доведено.

Для доведення твердження 3 многочлени запишемо як лінійні двочленні форми параметра r і скористаємося формулою бінома Ньютона, дістанемо многочлени, які на основі твердження 1 перетворяться у нові двочленні форми. Застосувавши висновки 1, 2 теореми, дістанемо істинність твердження 3.

Теорему доведено.

Проілюструємо на прикладі важливість двочленних форм степенів в обчисленнях.

Приклад 1. *Катастрофічна втрата точності у виразі $F(r) = \dfrac{1}{0.0001068 - r^{19}}$ при обчисленні степеня r^{19} на 10-ти розрядному калькуляторі CITIZEN SRP-175 і мінімізація похибки обчислень на основі двочленної лінійної форми степеня r^{19}.*

Результати обчислень:

$$r_{обч}^{19} = 0.000106963\,,\ r_{ф}^{19} = 4181r - 2584 = 0.00010383\,,$$

$$F_{обч} = -6134969.325\,,\ F_{ф} = 336700.3367\,.$$

2. Інтерполяційні многочлени на сітках з параметром золотого перерізу.

2.1. Інтерполяційні кубічні многочлени однієї змінної досліджені у роботі [2]. Кубічні многочлени на сітках з параметром золотого перерізу r досліджені у роботі [1]. Відрізок $[a;\, b]$, де задана довільна неперервна функція, розбиваємо на m частин, відповідно до рельєфу функції. Кожному відрізку розбиття $[a_i;\, b_i]$, $i \in [1;\, m]$, який для зручності відобразимо в одиничний $[0;\, 1]$, поставимо у відповідність кубічний многочлен

$$T_{3,i} = A_{0,i} + A_{1,i}\left(x - \frac{1}{2}\right) + A_{2,i}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + A_{3,i}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, \qquad (2)$$

коефіцієнти якого визначимо з умов інтерполяції на сітці з параметром золотого перерізу r у вузлах $0,\, r^2,\, r,\, 1$. Доведено [1], що коефіцієнти визначаються парами $\left(A_{0,i};\, A_{2,i}\right)$, $\left(A_{1,i};\, A_{3,i}\right)$, як лінійні форми параметра r з раціональними коефіцієнтами, що мінімізує похибку їх визначення.

2.2. Періодичні сітки з параметром золотого перерізу. Розіб'ємо рівномірно відрізок $[t_0;\, T]$ на $m \ge 2$ частин і на кожному відрізку $[t_i;\, t_{i+1}]$, для зручності вважатимемо одиничної довжини, задамо сітку з симетричними вузлами $\left\{0;\, r^2;\, r;\, 1\right\}$. Об'єднаємо сітки і позначимо $\left\{r^2,\, r^3,\, r^2,\, r^3,\, r^2,\, ...,\, r^3,\, r^2\right\}$ (позначили не вузли сітки, а проміжки розбиття). На кожному відрізку $r^2 + r^3 + r^2 = 1$ задамо кубічний многочлен (2) $T_{3,\,i}$, $i \in [1;\, m]$. Сусідні кубічні многочлени $T_{3,\,i}$, $T_{3,\,i+1}$ мають спільні частини задання – проміжки r^2. Якщо кубічні многочлени $T_{3,\,i}$, $T_{3,\,i+1}$ на відрізках r^2 однакової опуклості, то можна підібрати параметри $\mu_i,\, \upsilon_i \ge 0$, $\mu_i + \upsilon_i = 1$ такі, щоб добитися більшої гладкості кубічних многочленів на кінцях проміжків r^2.

Позначимо через $V_i(t) = \mu_i T_{3,i}(t) + \upsilon_i T_{3,i+1}(t),\ \ t \in [u_i;\, v_i]$, де u_i лівий кінець i -го відрізка r^2, v_i – правий. Оскільки кубічні многочлени неперервно диференційовні функції, то можна прийняти

$$
\begin{aligned}
T'_{3,i}(u_i) &= \mu_i T'_{3,i}(u_i) + \upsilon_i T'_{3,i+1}(u_i),\\
T'_{3,i+1}(v_i) &= \mu_i T'_{3,i}(v_i) + \upsilon_i T'_{3,i+1}(v_i).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Теорема 3. *Якщо похідні кубічних многочленів* $T_{3,i}$, $T_{3,i+1}$ *у вузлах* u_i, v_i *відрізків* r^2 *відмінні від нуля і їх добутки* $T'_{3,i}(u_i)T'_{3,i}(v_i) \neq$ $\neq T'_{3,i+1}(u_i)T'_{3,i+1}(v_i)$ *не збігаються, то існують параметри* μ_i, υ_i *за яких кубічні многочлени* $T_{3,\,i}$, $T_{3,\,i+1}$ *є гладкими у вузлах* u_i , v_i :

$$
\mu_i = \frac{A_i - 1}{A_i - B_i}\,,\ \upsilon_i = \frac{1-\mu_i}{A_i},\ A_i = \frac{T'_{3,\,i}(u_i)}{T'_{3,\,i+1}(u_i)},\ B_i = \frac{T'_{3,\,i}(v_i)}{T'_{3,\,i+1}(v_i)}\,. \tag{4}
$$

Доведення. Параметри $\mu,\ \upsilon$ (4) за умов теореми є розв'язками системи рівнянь (3). Якщо умови теореми не виконуються, то можна покласти $\mu = \upsilon = \dfrac{1}{2}$ або перейти до п. 2.3.

Теорему доведено.

2.3. Інтерполяційні многочлени 5-го порядку. Припустимо, що аналіз поведінки функції показав, що на деяких відрізках розбиття $\left\{ r^2,\ r^3, r^2 \right\}$ п. 2.2 функція має локальні екстремальні точки або є погано зумовленою, необхідно вибрати сітку з більш щільними вузлами. Скориставшись тотожністю $r^n = r^{n+1} + r^{n+2}$, розіб'ємо відрізки r^2 на суму $r^2 = r^3 + r^4$, дістанемо нове розбиття $\left\{ r^3,\ r^4, r^3,\ r^4, r^3 \right\}$ з шеститочковою симетричною сіткою, за допомогою якої можна побудувати інтерполяційний многочлен п'ятого порядку за даними $\left\{ s_i, F(s_i) \right\}$, де s_i – вузли сітки. Вузли сітки є об'єднанням старих $\left\{ 0,\ r^2, r, 1 \right\}$ і двох нових $\eta_1 = r^3$, $\eta_2 = 1 - r^3$. Многочлен п'ятого порядку побудуємо у формі

$$
T_5(x) = T_3(x)P_2(x) + P_4(x)T_1(x), \tag{5}
$$

де

$$
T_3(x) = c_0 + c_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + c_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c_3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3,
$$

$T_1(x) = b_0 + b_1\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ – многочлени з невідомими коефіцієнтами, а $P_2(x) = (x-\eta_1)(x-\eta_2)$, $P_4(x) = x(x-r^2)(x-r)(x-1)$ – многочлени, що визначаються через старі і нові вузли. Коефіцієнти кубічного многочлена $T_3(x)$, визначаються через старі коефіцієнти (2) $A_{i,j}$ (після масштабування значеннями $P_2(x_i)$), x_i – старі вузли сітки, $i = 0, 1, 2, 3$, j – номер проміжка розбиття п. 2.1.

Коефіцієнти многочлена $T_1(x)$ визначаються через дані $x_1 = r^3$, $y_1 = F(r^3)$, $x_2 = 1 - r^3$, $y_2 = F(1 - r^3)$. Отже, побудова многочлена $T_5(x)$ зведеться до визначення двох коефіцієнтів b_0, b_1 і масштабування коефіцієнтів $T_3(x)$.

Якщо сіткова функція $\{s_i, F(s_i)\}$ з вузлами розбиття ще недостатньо відображає рельєф, то необхідно від розбиття $\left\{ r^3,\ r^4, r^3,\ r^4, r^3 \right\}$ перейти до нового симетричного $\left\{ r^4, r^5,\ r^4, r^3, r^4, r^5, r^4 \right\}$, яке дозволяє побудувати інтерполяційний многочлен сьомого порядку таким самим способом, що і будувався многочлен п'ятого порядку.

Кубічні многочлени можуть бути основою алгоритмів оптимізації нелінійних негладких функцій [2].

2.4. Кубічні многочлени двох змінних. Кубічні многочлени $T_3(x, y)$ двох змінних (x, y) містять 10 базисних елементів: x^3, y^3, $x^2 y$, xy^2, x^2, y^2, xy, x, y, 1,

$$T_3(x, y) = A_3 x^3 + B_3 y^3 + C_{3,2} x^2 y + C_{3,1} x y^2 + A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_{3,0} xy + A_1 x + B_1 y + E_0 .$$

Позначимо вектори $A^T = \left(A_3, A_2, A_1\right)^T$, $B^T = \left(B_3, B_2, B_1\right)^T$, $C^T = \left(C_{3,2}, C_{3,1}, C_{3,0}\right)^T$.

Для визначення коефіцієнтів кубічного многочлена за базисний шаблон виберемо прямокутний трикутник з вершиною у початку координат і одиничними катетами на осях прямокутної декартової системи координат. За сітку шаблона виберемо вузли з координатами параметра золотого перерізу $\left\{0, r^2, r, 1\right\}$ на осях. Перенісши вершину прямого кута базисного шаблона у довільну внутрішню точку $M_0(a, c)$ області визначення $\Phi(x, y)$ і вибравши довжини $\Delta_x = b - a$, $\Delta_y = d - c$ катетів $M_0 M_x$, $M_0 M_y$, паралельними осям координат і так, щоб шаблон $\Delta M_0 M_x M_y \subset D(\Phi)$, визначимо коефіцієнти многочлена $T_3(x, y)$ за значеннями функцій $\Phi(x, y)$ у вузлах сітки. Коефіцієнти многочлена

$T_3(x,\ y)$ визначаються із системи лінійних рівнянь $W \cdot U = V$, $W_1 \cdot C = D$, де $U[3\times 2] = (A,\ B)$ – матриця коефіцієнтів – векторів $A,\ B$; $W[3\times 2]$, $D[3\times 1]$ – масштабовані значення функції $\Phi(x,\ y)$ у вузлах сіток. Для розв'язання лінійних систем з матрицями

$$W[3\times 3] = \begin{bmatrix} r^4 & r^2 & 1 \\ r^2 & r & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ W_1[3\times 3] = \begin{bmatrix} r^2 & r^2 & 1 \\ r & r^2 & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{bmatrix},\ \begin{matrix} \det W = r^5 = 5r - 3 \neq 0, \\ \det W_1 = r^6 = 5 - 8r \neq 0, \end{matrix} \qquad (6)$$

необхідно виконати взаємно однозначне відображення шаблона $M_0 M_x M_y$ на базисний шаблон за формулами $t = \dfrac{x-a}{\Delta_x}$, $t_1 = \dfrac{y-c}{\Delta_y}$.

Вектори $A,\ B$ визначаються паралельно (незалежно). Після визначення коефіцієнтів – векторів $A,\ B$, визначимо вектор C. Елементи векторів $A,\ B,\ C$ визначаються швидко і з мінімальною похибкою обчислення, матриці $W,\ W_1$ не залежать від значень функції $\Phi(x,\ y)$.

2.5. Кубічні многочлени трьох змінних. Кубічні многочлени $T_3(x,\ y,\ z)$ трьох змінних $x,\ y,\ z$ містять двадцять базисних елементів, з них, десять – третього порядку x^3, y^3, z^3, x^2y, xy^2, x^2z, z^2x, y^2z, z^2y, xyz, шість – другого порядку x^2, y^2, z^3, xy, xz, yz, три – першого порядку x, y, z і один для вільного члена. За базисний шаблон виберемо трикутну піраміду з вершиною у початку координат і одиничними відрізками на осях прямокутної декартової системи координат. За сітку шаблона виберемо вузли з координатами параметра золотого перерізу $\{0,\ r^2,\ r,\ 1\}$. Перенісши вершину піраміди у довільну внутрішню точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ області визначення $\Phi(x,\ y,\ z)$ і вибравши довжини $\Delta_x,\ \Delta_y,\ \Delta_z$ ребер так, щоб піраміда належала $D(\Phi)$ і, щоб ребра M_0M_x, M_0M_y, M_0M_z були паралельними осям координат, дістанемо шаблон для визначення коефіцієнтів інтерполяційного кубічного многочлена у вузлах сітки.

При визначенні коефіцієнтів многочлена необхідно виконати взаємно однозначне відображення шаблона $M_0M_xM_yM_z$ на базисний шаблон за формулами $t_1 = \dfrac{x-x_0}{\Delta_x}$, $t_2 = \dfrac{y-y_0}{\Delta_y}$, $t_3 = \dfrac{z-z_0}{\Delta_z}$. Вектори $A^T = (A_3,\ A_2,\ A_1)^T$, $B^T = (B_3,\ B_2,\ B_1)^T$, $C^T = (C_3,\ C_2,\ C_1)^T$ коефіцієнтів, відповідно при базисних елементах (x^3, x^2, x), (y^3, y^2, y), (z^3, z^2, z), визначаються із лінійної системи з матрицею W за значеннями функції $\Phi(x, y, z)$ у вузлах ребер M_0M_x, M_0M_y, M_0M_z. Коефіцієнти при базисних елементах (x^2y, y^2x, xy), (x^2z, z^2x, zx), (y^2z, y^2z, zy) визначаються із лінійної системи з матрицею W_1 за значеннями функції $\Phi(x, y, z)$ у вузлах площин шаблона, відповідно паралельних координатним площинам $z=0$, $y=0$, $x=0$. Вільний член визначається через значення функції $\Phi(x, y, z)$ у вершині $M_0(x_0, y_0, z_0)$, коефіцієнт при елементі xyz визначається через значення функції у вузлі (r^2, r^2, r^2).

Зазначимо, що між порядком кубічного многочлена T_3, кількістю змінних $T_3(x)$, $T_3(x, y)$, $T_3(x, y, z)$ і розмірністю сіток з симетричними вузлами $\left\{0, r^2, r, 1\right\}$ параметра золотого перерізу існує оптимальна узгодженість, яка приводить до високої швидкості обчислення коефіцієнтів многочленів T_3, мінімізації похибки обчислень, матриці W, W_1 є незалежними від значень функції Φ.

3. Розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної.

3.1. Алгоритм наближеного розв'язування нелінійних рівнянь $f(x)=0$ з довільними неперервними функціями $y=f(x)$ заданими на скінченних відрізках $[a; b]$ за умови $\mathrm{sgn} f(a)\cdot \mathrm{sgn} f(b) = -1$. Алгоритм об'єднує низку процедур. В основу покладені властивості степенів параметра золотого перерізу: $r^2+r^3+r^2=1$, $r^{-2}=2+r$, $r^n = r^{n+1}+r^{n+2}$, $n \in N$. Скінченний відрізок $[a; b]$ шляхом заміни відображається у відрізок $[0; 1]$: $t=\dfrac{x-a}{\Delta}$, $x\in[a; b]$, $t\in[0; 1]$, $\Delta = b-a$. Алгоритм є узагальненням алгоритму [1].

3.1.1. Початковий крок. Відрізок $[a; b]$ розділити на симетричні частини точками $u=a+\Delta\cdot r^2$, $v=b-\Delta\cdot r^2$. Обчислити значення функції $y=f(x)$ у точках a, u, v, b. Визначити якій частині розбиття $(a; u)$, $(u; v)$, $(v; b)$ належить дійсний корінь рівняння.

3.1.2. Стиснення відрізка $[a; b]$ *до заданої довжини* α. Стиснення відрізка $[a_n; b_n]$ на кожному n–му кроці відбувається введенням точок поділу $u_n = a_n + t_n\cdot\Delta_n$, $v_n = b_n - t_n\cdot\Delta_n$, де $\Delta_n = b_n - a_n$, параметр

$t_n = r^2$. За стратегію поділу вибирається гіпотеза, що дійсний корінь ближче знаходиться до того кінця відрізка, де абсолютне значення функції менше. Така стратегія поділу дозволяє на кожному кроці стиснення використовувати лише одну точку поділу u_n або v_n. Звуження проводити поки Δ_n не стане меншим за задане число α. Зазначимо, що використання однієї точки поділу – метод Кіфера [2] використовується для мінімізації унімодальних функцій, але у ньому обробляється (стискується) відрізок довжиною $r^2 + r^3 = r$ і тому збіжність методу Кіфера відбувається зі швидкістю $\left(\frac{1}{r}\right)^m = (1+v)^m \approx (1.618)^m$.

3.1.3. Комбінований метод. Комбінований метод на кожному кроці об'єднує дві процедури. Перша – продовжується внесення нових точок поділу, що є одночасно наближенням до кореня: а) на основі параметра $t_n = r^k$, де r^k обирається шляхом аналізу величини $\Delta_n = b_n - a_n$ і $\min\{|f(a_n)|, |f(b_n)|\}$ (апріорний спосіб); б) на основі точки рівноваги обернених величин до абсолютних значень $|f(a)|, |f(b)|$; в) на основі вибірки декількох степенів r^k і обчислення значень функції. Позначимо точку поділу через u, значення функції через $f(u)$.

Якщо значення $f(a)$, $f(u)$, $f(b)$ утворюють монотонну послідовність, то виконати обернену параболічну інтерполяцію (другу процедуру комбінованого методу):

$$x(y) = A + B(y - f(u)) + C(y - f(u))(y - f(a)), \quad \text{якщо } \operatorname{sgn} f(a) \cdot \operatorname{sgn} f(u) = -1 \tag{7_1}$$

або

$$x(y) = A + B(y - f(u)) + C(y - f(u))(y - f(b)), \quad \text{якщо } \operatorname{sgn} f(b) \cdot \operatorname{sgn} f(u) = -1. \tag{7_2}$$

Покажемо, що параметр B є різницевою схемою першої похідної, C – другої похідної від функції $x(y)$ по змінній y. Доведення проведемо спочатку для рівняння (7_1). Використаємо інтерполяцію $x(y)$ сіткової функції $\{f(a), f(u), f(b)\}$:

$$y = f(u) \Rightarrow A = u; \ y = f(a) \Rightarrow B = \frac{a-u}{f(a) - f(u)};$$

$$y = f(b) \Rightarrow C = \left(\frac{b-u}{f(b)-f(u)} - B\right) \Big/ \left(f(b) - f(a)\right).$$

Доведення для другого рівняння (7_2):

$$y = f(u) \Rightarrow A = u;\; y = f(b) \Rightarrow B = \frac{b-u}{f(b)-f(u)};$$

$$y = f(a) \Rightarrow C = \left(\frac{a-u}{f(a)-f(u)} - B\right)\Big/\left(f(a)-f(b)\right).$$

Наближене значення кореня знаходиться за формулою (7_1) для $y = 0$:

$$x(y)\Big|_{y=0} = u - Bf(u) + Cf(u)f(a) = \\ = x_c(a,u) - \left(x_c(b,u) - x_c(a,u)\right)\cdot\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad (8_1)$$

наближене значення кореня знаходиться за формулою (7_2) для $y = 0$:

$$x(y)\Big|_{y=0} = u - Bf(u) + Cf(u)f(b) = \\ = x_c(b,u) - \left(x_c(a,u) - x_c(b,u)\right)\cdot\frac{f(b)}{f(a)-f(b)}, \qquad (8_2)$$

де x_c – точка перетину січної з віссю Ox.

Кінець алгоритму.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $f(x) = e^{x^2} - 3(1+x^2) = 0$ *на відрізку* $[a;b] = [-1.4;5]$.

Функція $y = f(x)$ диференційовна, погано обумовлена в околі точки $b = 5$, має локальні екстремальні точки. Метод Ньютона не застосовний до розв'язування рівняння на $[-1.4;5]$, оскільки при виборі точки $x_0 = -1.4$, він збігається до локального мінімуму, функція в точці $x = b$ є погано обумовленою, $f(b) = 7.2\cdot 10^{10}$. Результати обчислень запропонованим методом наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Розв'язування рівняння $f(x) = e^{x^2} - 3(1+x^2) = 0$, $x \in [-1.4;5]$

у десятирозрядній арифметиці

n	a f_a або $x_c(b;u)$, $a = f_{x_c}$	b f_b	$u = a + t_n(b-a)$ f_u $x_c(a;u)$ f_{x_c}	$v = b - t_n(b-a)$ f_v $x(y)\Big\|_{y=0}$ – формули (8)
1	$a = -1.4$ $f_a =$ $= -1.780672935$	$b = 5$ $f_b =$ $= 7.200489926\cdot E10$	$t_n = r^2$ $u = 1.04458247$ $f_u = -3.295753604$	$t_n = r^2$ $v = 2.55541753$ $f_v = -3.295753604$

Продовження таблиці 1

2	$a=1.04458247$ $f_a=$ $=-3.295753604$	$b=2.55541753$ $f_b=662.9165526$	$t_n=r^2$ $u=1.612670111$ $f_u=2.583789945$	
3	$a=1.04458247$ $f_a=$ $=-3.295753604$	$b=1.612670111$ $f_b=2.583789945$		$t_n=r^2$ $v=1.395679941$ $f_v=$ $=-1.829666869$
4	$a=1.395679941$ $f_a=$ $=-1.829666869$	$b=1.612670111$ $f_b=2.583789945$	$t_n=r^2$ $u=1.478562811$ $f_u=-0.6575832$	
5	$a=1.478562811$ $f_a=$ $=-0.6575832$	$b=1.612670111$ $f_b=2.583789945$	$t_n=r^4$ $u=1.498128802$ $f_u=$ $=-0.298522098$	$x(y)\big\|_{y=0}=$ $=1.513501565$ $f_x=0.009663008$
6	$a=$ $=1.498128802$ $f_a=$ $=-0.298512098$	$b=1.513501565$ $f_b=0.009663008$	$t_n=r^6$ $u=1.512645373$ $f_u=$ $=-0.008135042$	$x(y)\big\|_{y=0}=$ $=1.513037198$ $f(x)=$ $=0.000001016$
7	$a=$ $=1.513036717$ $f_a=$ $=-0.000008979$	$b=1.513037198$ $f_b=0.000001016$	$\tilde{x}=1.513037149$ $f_{\tilde{x}}=$ $=-0.000000002$	$x=1.513037150$ $f_x=0.000000018$

За розв'язок прийняти $x=1.513037149$.

Коментарі до таблиці 1 – розв'язування рівняння $f(x)=e^{x^2}-3(1+x^2)=0$, $x\in[-1.4;\,5]$ у десятирозрядній арифметиці. Крок 1 – початковий крок – відрізок $x\in[-1.4;\,5]$ розділяється на три частини: $\Delta=\Delta\cdot 1=\Delta(r^2+r^3+r^2)$, корінь належить середньому відрізку $[u;\,v]$. Початковий відрізок стиснувся у $\dfrac{1}{r^3}\approx 4.236$ разів. Кроки 2-4 – стиснення вкладених проміжків з вибором параметра $t_n=r^2$. Початковий проміжок після 4-го кроку звузився до довжини $\Delta_5=b_5-a_5=0.134$. Перейшли на застосування комбінованого методу. Крок 5 – параметр $t_n = r^4$ вибирається шляхом аналізу довжини Δ_5 і застосовується параболічна інтерполяція (7). Наближене значення кореня визначається за формулою (8_2), як точка перетину параболи з віссю *Ox*, проміжок звузився до $\Delta_6 = 0.015$. Крок 6 – повторюємо попередню процедуру – проміжок звузився до $\Delta_7 = 0.000000481$. Крок 7 – достатньо за точку поділу взяти точку рівноваги: $\tilde{x} = 1.513037149, \quad f(\tilde{x}) = -0.000000002$, що і визначає корінь у десятирозрядній арифметиці.

Означення. *Проміжок* $[a; b]$ *скінченної довжини* $\Delta > 1$ *стискується з експоненційною швидкістю, якщо для його стиснення до довжини* $\alpha < 1$ *необхідно* m *кроків, щоб виконувалась рівність* $\alpha e^m = \Delta$, $\Delta = b - a \;\Rightarrow\; m = \left[\ln \dfrac{\Delta}{\alpha}\right] + 1$.

Приклад 3. *Визначити кількість кроків, які необхідні, щоб відрізок довжиною* $\Delta = 100$ *був стиснутий до відрізка довжиною а)* $\alpha = 0.1$*; б)* $\alpha = 10^{-10}$.

$$m_1 = \left[\ln \frac{100}{0.1}\right] + 1 = 7\,, \quad m_2 = \left[\ln \frac{100}{10^{-10}}\right] + 1 = 28\,.$$

Для стиснення проміжка довжиною Δ до заданих значень α, методом $(2+r)^m$ з параметром золотого перерізу r, необхідно виконати m_r кроків:

$$m_{1,r} = \left[\ln \frac{\Delta}{\alpha} \Big/ \ln(2+r)\right] + 1 = 8\,; \; m_{2,r} = 29\,.$$

Точка рівноваги для двох зважених точок. Точка рівноваги величин обернених до абсолютних значень функції на кінцях проміжка $[a_n; b_n] \in R_+$, визначається за формулою

$$\frac{\tilde{x} - a_n}{|f(a_n)|} = \frac{b_n - \tilde{x}}{|f(b_n)|} \;\Rightarrow$$

$$\tilde{x} = \frac{a_n |f(a_n)| + b_n |f(b_n)|}{|f(a_n)| + |f(b_n)|} = a_n + (b_n - a_n)\frac{|f(a_n)|}{|f(a_n)| + |f(b_n)|}\,.$$

Вибір обернених величин гарантує, що точкою рівноваги не можуть бути точки локальних мінімумів на відрізку, якому належить корінь рівняння.

Про оптимальність методу розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної з дійсними неперервними функціями заданими на скінчених відрізках $[a; b]$ за умови $\operatorname{sgn} f(a) \cdot \operatorname{sgn} f(b) = -1$.

На першому етапі методу (п. 3.1.1, 3.1.2) початковий проміжок $[a; b]$ стискується до заданої довжини з швидкістю $(2+r)^m$, близькою до експоненційної. На другому етапі (п. 3.1.3) швидкість збіжності до розв'язку рівняння прискорюється застосуванням оберненої параболічної інтерполяції (7), (8).

Якщо на першому етапі послідовність вкладених проміжків $[a_n; b_n]$ розділяти на три частини точками $u_n = a_n + t_n\Delta_n$, $v_n = b_n - t_n\Delta_n$, $t_n = r^2$, $\Delta_n = b_n - a_n = \Delta_n(r^2 + r^3 + r^2)$, і залишати ту частину, якій належить корінь рівняння, то проміжок $[a_n; b_n]$ стиснеться у $\dfrac{1}{r^2} = 2 + r \approx 2.618$ разів, якщо корінь належить інтервалам $(a_n; u_n)$, $(v_n; b_n)$, і у $\dfrac{1}{r^3} = 3 + 2r \approx 4.236$ разів, якщо корінь належить інтервалу $(u_n; v_n)$.

Комбінований метод продовжує ділити послідовність вкладених відрізків або точками $u_n = a_n + t_n\Delta_n$, або точками $v_n = b_n - t_n\Delta_n$, або точкою рівноваги, намагаючись помістити корінь рівняння у найменший інтервал, $t_n = r^k$, $k \in N$, $k \ge 2$. Така стратегія визначається властивістю степенів з параметром золотого перерізу: початковий поділ з параметрами $\left\{r^2, r^3, r^2\right\}$ послідовно розширяється $\to$ $\left\{r^3, r^4, r^3, r^4, r^3\right\}$ $\to$ $\left\{r^4, r^5, r^4, r^3, r^4, r^5, r^4\right\}$, …, на основі властивості $r^k = r^{k+1} + r^{k+2}$ (перехід від параметра r^k до r^{k+1} звужує проміжок). Якщо вибір параметра r^k був завищеним, тобто корінь належить більш широкому проміжку, то необхідно виконати обернений хід (збільшити параметр t_n) $r^{k-1} = r^k + r^{k+1}$ (перехід від параметра r^k до r^{k-1} розширяє проміжок, якому належить корінь).

Зазначимо, що якщо проміжок $[a_n; b_n]$ стиснутий до довжини порядку r^k, $k \in N$, $k > 2$, то параметр t_n необхідно обирати з умови $t_n \approx r^k$, при цьому швидкість збіжності (стиснення) порядку $\left(\dfrac{1}{r^k}\right)^m$, наприклад, якщо $t_n = r^3$, то швидкість збіжності порядку $\left(\dfrac{1}{r^3}\right)^m = \left(3+2r\right)^m \approx \left(4.236\right)^m$.

Швидкість збіжності комбінованого методу визначається точністю наближення функції $f(x)$ параболічною інтерполянтою. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в околі кореня x^*, то параметри B, C параболічної інтерполянти $x(y)$ апроксимують відповідно першу і другу похідну функції f^{-1} і тому $x(y)\big|_{y=0}$ – формула двох січних (8) буде визначати наближення з високою точністю до розв'язку x^* (див. приклад 2).

Підсумки досліджень сформулюємо у теоремі 4.

Теорема 4. *Нехай* $f \in C(D)$, D *є відрізком* $[a; b]$ *довільної скінченної довжини і* $\operatorname{sgn} f(a) \cdot \operatorname{sgn} f(b) = -1$.

Стиснення проміжка $[a; b]$, $\Delta = b - a$, *до заданої довжини* α *відбувається зі швидкістю* $(2+r)^m$, $m = \left[\ln \frac{\Delta}{\alpha} \Big/ (2+r) \right] + 1$ *(порядку експоненційної швидкості, оскільки* $\ln(2+r) \approx 0.96$*). Процес розв'язання рівняння* $f(x) = 0$ *із допустимою похибкою* $|\Delta x| < \varepsilon$ *завершується швидким комбінованим методом із застосуванням оберненої параболічної інтерполяції (методу двох січних).*

3.2. Розв'язування нелінійних рівнянь $f(x) = 0$ *з довільними дійсними неперервними функціями заданими на скінчених проміжках* $[a; b]$ *і умови* $\operatorname{sgn} f(a) \cdot \operatorname{sgn} f(u) = 1$.

Якщо проміжок $[a; b]$ довжини $\Delta > 1$, то розбити його на $m \in N$, $m > 2$, частин $[a_i; b_i]$, $i = 1, ..., m$. Відобразити кожний проміжок у проміжок одиничної довжини, побудувати сітки $\{0, r^2, r, 1\}$ і визначити кубічні многочлени $T_{3,i}(x)$ [1]. Застосувати для кожного многочлена $T_{3,i}(x)$ формули Кардано для знаходження дійсного кореня. Паралельний процес обчислень скоротить час розв'язування рівняння.

4. Розв'язування системи нелінійних рівнянь.

Постановка задачі:

Задано

$$\Phi : R^n \to R^n \,. \tag{9}$$

Знайти $x^* \in D(\Phi)$ таке, що $\Phi(x^*) = 0$, де координати функції $\Phi^T = (\Phi_1(x), ..., \Phi_n(x))^T$ неперервні функції на однозв'язній опуклій обмеженій замкненій області $D(\Phi)$ (позначимо її D_0 і назвемо областю нульового рангу. Припустимо, що координати точок області D_0 додатні).

Для розв'язання задачі (9) з неперервно диференційовними функціями побудовані методи ньютонівського типу, а для більш загальних класів функцій можуть бути застосованими методи квазіньютонівського типу або методи стиснутих відображень [2, 3]. Але для довільних неперервних погано обумовлених функцій і таких, що мають локальні екстремуми, розв'язання задачі (9) потребує більш загальних підходів (методів).

В основу методу розв'язування сумісних систем нелінійних рівнянь з довільними неперервними функціями приймемо наступний алгоритм:

1) стиснути область D_0 – область нульового рангу, шляхом послідовного розділення її на частини;
2) перейти від неперервної моделі до дискретної, покриваючи підобласті розбиття сіткою, наприклад, з вузлами параметра золотого перерізу;
3) метризувати задачу (9), поставивши у відповідність кожній точці сітки на елементах розбиття евклідову норму вектора нев'язки. Координати точок сітки масштабувати, розділивши їх на норми нев'язок (якщо для деякої точки сітки норма нев'язки дорівнює нулеві, то розв'язок знайдений, алгоритм завершити). Масштабовані точки назвемо зваженими точками;
4) від дискретної моделі перейти до неперервної з множиною значень функції на сітці. На кожній частині розбиття області знайти точку рівноваги зважених точок сітки. Виділити підобласть із найменшим значенням норми вектора нев'язки у точці рівноваги. Ця підобласть є областю наступного рангу. Перейти на п. 1, поки норма вектора нев'язки точки рівноваги не стане меншою заданої величини ε ;
5) довести збіжність послідовності точок рівноваги до розв'язку x^* задачі (9). Визначити швидкість збіжності.

Для побудови алгоритму методу спочатку приймемо, що $D(\Phi)$ є прямокутником $P_0[\Delta x \times \Delta y] \subset R^2$ з вершиною у точці $M(x_0; y_0)$ (ліва нижня вершина P_0) і сторонами паралельними до *Ox*, *Oy* прямокутної декартової системи координат. За сітку прямокутника P_0 виберемо сітку з параметром золотого перерізу r, з вузлами $x_i = x_0 + \gamma_i \Delta x$, $y_j = y_0 + \gamma_j \Delta y$, де γ_i, γ_j, $i, j \in \{0; 1; 2; 3\}$, незалежно пробігають множину $\{0, r^2, r, 1\}$, наприклад, $M_{0,0}(x_0; y_0)$,

$M_{1,2}(x_0 + r^2\Delta x;\ y_0 + r\Delta y)$, $M_{2,3}(x_0 + r\Delta x;\ y_0 + \Delta y)$. Прямокутник P_0 (нульового рангу) містить $16 = 4 \times 4$ вузлів сітки і розбивається на дев'ять прямокутників першого рангу прямими паралельними до *Ox*, *Oy*, що проходять через точки $M_{i,j}$ сітки. Виберемо з прямокутників першого рангу той, що містить розв'язок x^*, і розділимо на дев'ять прямокутників другого рангу. Основною задачею є знаходження прямокутника розбиття, що містить розв'язок x^*.

Основна задача. Точка рівноваги системи зважених точок. Точкою рівноваги $\tilde{x} \in P_t$ зважених точок прямокутника P_t будемо називати точку, що мінімізує суму квадратів відстаней від $\tilde{x}$ до зважених точок прямокутника P_t:

$$\delta_t = \sum_{M_{i,j} \in \mathrm{I}} \frac{\left(\tilde{x}_t - x_i\right)^2 + \left(\tilde{y}_t - y_i\right)^2}{\left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2},\ \left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2 \neq 0,$$

де I – множина точок сітки прямокутника P_t, опукла оболонка яких містить розв'язок x^* системи (9).

Лема. *Точка рівноваги зважених точок на однозв'язній опуклій обмеженій замкненій області D існує і єдина.*

Доведення. Функція δ_t є неперервно диференційовною і опуклою на D, тому точка мінімуму $\left(\tilde{x}_t,\ \tilde{y}_t\right)$ існує і єдина, визначається як розв'язок системи лінійних рівнянь відносно координат точки рівноваги:

$$\tilde{x}_t = \left(\sum_{M_{i,j} \in \mathrm{I}} \frac{x_i}{\left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2} \right) \Big/ T_t,\ \tilde{y}_t = \left(\sum_{M_{i,j} \in \mathrm{I}} \frac{y_i}{\left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2} \right) \Big/ T_t,$$

$$T_t = \sum_{M_{i,j} \in \mathrm{I}} \frac{1}{\left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2}. \qquad (10)$$

Лему доведено.

Аналіз формул (10). З формул (10) випливає, що координати точки рівноваги $M(\tilde{x},\ \tilde{y})$ не змінять свого значення від масштабування усіх норм $\left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2$, $M_{i,j} \in \mathrm{I}$, константою $C > 0$. Обчислимо $m = \min \left\| V^T\left(M_{i,j}\right)\right\|_2$, $M_{i,j} \in \mathrm{I}$, якщо m – мале число, наприклад, $\varepsilon_{маш} < m < 10^{-5}$, то для стабільності обчислень покладемо $C = \dfrac{1}{m}$.

Основна задача (про вибір із однозв'язної опуклої обмеженої замкненої області $D(\Phi)$, що містить розв'язок x^* сумісної системи рівнянь (9), і, яка розбивається на q підобластей D_i, $t = 1, ..., q$, однозв'язних опуклих замкнених, з яких принаймні одна D_i містить розв'язок x^* як внутрішню точку, і яку необхідно обрати).

Не втрачаючи загальності, нехай $D(\Phi) = P_0 \subset R^2$, прямокутник нульового рангу, розбитий на q прямокутників $P_{t,0}$, $t = 1, ..., q$, першого рангу.

Теорема 5 *(фундаментальна теорема алгоритму розв'язування сумісних нелінійних рівнянь:* $\Phi : R^2 \to R^2$, $x^* \in D(\Phi)$, $\Phi(x^*) = 0$, $\Phi \in C(D)$*). Найменше значення* $\left\| V^T \left(M_t(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) \right\|_2$ *у точках рівноваги* $M_t(\tilde{x}, \tilde{y})$ *прямокутників* $P_{t,0}$, $t \in \{1, ..., q\}$ *досягається на прямокутнику* $P_{k,0}$*, що містить розв'язок* x^* *системи (9).*

Доведення. Сітки $S_t = \left\{ M_{i,t},\ i = 1, ..., \eta_t \right\}$, $t \in \{1, ..., q\}$, $\eta_t \ge 3$, прямокутників $P_{t,0}$ можна вибирати незалежно за умови, що кожна сітка S_t містить всі чотири вершини прямокутника $P_{t,0}$. Оскільки функція Φ є неперервною на P_0, то на кожному прямокутнику першого рангу $P_{t,0}$, $t = 1, ..., q$, норма $\left\| V^T \left(M \right) \right\|_2$ досягає свого найменшого значення. Позначимо $\mathrm{m} = \min\limits_{t \in \{1, ..., q\}} \min\limits_{M \in S_t} \left\| V^T \left(M \right) \right\|_2$. Тому для всіх прямокутників $P_{t,0}$, $t \ne k$, координати точок рівноваги (10) є обмеженими знизу. І лише у прямокутнику першого рангу $P_{k,0}$ якому належить розв'язок x^*, для якого вектор нев'язки $V^T \left(M \left(x^*, y^* \right) \right) = 0$, за рахунок вибору вузлів сітки S_k, можна отримати точку рівноваги $M_t(\tilde{x}, \tilde{y})$ з меншим значенням норми нев'язки, ніж m.

Теорему доведено.

Збіжність послідовності точок рівноваги до розв'язку x^*. *Швидкість збіжності.* Збіжність і швидкість збіжності залежать від двох факторів: від швидкості стиснення послідовності вкладених прямокутників і наближення точок рівноваги до розв'язку x^* у виділеному прямокутнику P_t. Очевидно, що із зменшенням діаметра прямокутника P_t зростає точність наближення точки рівноваги до розв'язку x^*. Швидкість стиснення прямокутника $P_t[\Delta x \times \Delta y]$ – це розбиття прямокутника на дев'ять частин (прямокутників розмірності $r^2\Delta x \cdot r^2\Delta y = r^4\Delta x\Delta y$ (їх чотири), прямокутників розмірності $r^2\Delta x \cdot r^3\Delta y$ або $r^3\Delta x \cdot r^2\Delta y = r^5\Delta x\Delta y$ (їх чотири), один прямокутник розмірності $r^3\Delta x \cdot r^3\Delta y = r^6\Delta x\Delta y$. Отже, коефіцієнт стиснення прямокутника P_t при розбитті більший-рівний числа $\frac{\Delta x\Delta y}{r^4\Delta x\Delta y} = \frac{1}{r^4}$. Таким чином, якщо точки рівноваги в усіх дев'яти прямокутниках розбиття знаходити паралельно, то за m кроків по кожному з напрямків *Ox, Oy* відбудеться стиснення у $\left(\frac{1}{r^2}\right)^m = \left(2+r\right)^m$ разів (що визначає швидкість збіжності близькою до експоненційної). Паралельність процесу обчислень визначає ефективність реалізації алгоритму.

Постановка задачі.

Задано $\Phi: R^2 \to R^2$.

Знайти $x^* \in D(\Phi)$ таке, що $\Phi(x^*) = 0$, $\Phi \in C(D)$. Розв'язування сумісних систем на областях $D(\Phi)$, де $D(\Phi)$ – однозв'язна опукла обмежена замкнена область.

Покладемо

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \Phi(x),\ x \in D(\Phi), \\ T + C,\ x \in P_0 \setminus D(\Phi) = \overline{D}(\Phi), \end{cases}$$

де $D(\Phi) \subset P_0[\Delta x \times \Delta y] \subset R^2$, P_0 – прямокутник з вершиною у точці $M(x_0, y_0)$, сторонами паралельними до *Ox, Oy*, які є опорними прямими області $D(\Phi)$, $T = \max\limits_{x \in D(\Phi)} \left|\Phi(x)\right|$, $C > 0$. Для функції $\overline{\Phi}$ на прямокутнику P_0 застосуємо алгоритм 1)-4).

Нехай область $D(\Phi)$ належить прямокутнику $P_0[\Delta x \times \Delta y]$, сторони якого є опорними прямими області $D_1(\Phi)$ і паралельні до *Ox, Oy* прямокутної декартової системи координат.

Теорема 6. *Задано* $\Phi: R^2 \to R^2$, *знайти* $x^* \in D(\Phi)$ *таке, що* $\Phi(x^*) = 0$, *де* Φ *неперервна на однозв'язній опуклій обмеженій замкненій області* $D(\Phi)$.

Розширимо функцію Φ, $x \in D(\Phi)$, *до функції* $\overline{\Phi}$ *заданій на прямокутнику* P_0. *Алгоритм 1)-4) стиснення прямокутника* P_0 *(нульового рангу) до заданої розмірності* $P_t[\varepsilon_1 \times \varepsilon_2]$ *збігається із швидкістю близькою до експоненційної. Послідовність точок рівноваги* $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ *на прямокутниках розбиття* P_k *є наближенням до розв'язку системи рівнянь, оскільки* $P_k \in \left\{P_{k,1}, P_{k,2}, ..., P_{k,s}\right\}$ *для всіх* $k \in 0, 1, ..., K$, *містять розв'язок* $(x^*; y^*)$ *системи (9) (теорема 5). Отже, точка* $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ *належить перетину вкладених прямокутників* P_t, *які стискаються зі швидкістю близькою до експоненційної.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо обґрунтувати, що на кожному кроці розбиття прямокутника P_0, точка рівноваги знаходиться ближче до околу точок з найменшими значеннями норми $\|\cdot\|_2$ вектора нев'язки. Оскільки $\left\|V^T\left(M_{x,y}\right)\right\|_2 = T + C$, де $T = \max\limits_{x \in D(\Phi)} \left|\Phi(x)\right|$, $C > 0$, для всіх $M(x, y) \in P_0 \setminus D(\Phi)$, то на кожному кроці розбиття точка рівноваги буде належати $D(\Phi)$ (навіть, якщо x^* належить границі $D(\Phi)$).

Теорему доведено.

Простір R^3. Нехай $\Phi: R^3 \to R^3$ і $D(\Phi) = P_0[\Delta x \times \Delta y \times \Delta z]$ прямокутний паралелепіпед нульового рангу з бічними ребрами паралельними до *Ox, Oy, Oz* прямокутної декартової системи координат і нехай $\Phi(x^*) = 0$, $x^* \in P_0$. Позначимо $M(x_0, y_0, z_0)$ – вершину P_0 і на суміжних сторонах виберемо точки $M_{i,j,k}$ з координатами $x_i = x_0 + \gamma_i \Delta x$, $y_j = y_0 + \gamma_j \Delta y$, $z_k = z_0 + \gamma_k \Delta z$, де γ_i, γ_j, γ_k незалежно пробігають множину $\left\{0, r^2, r, 1\right\}$. Площини, що проходять через точки $M_{i,j,k}$ паралельно до координатних площин, розбивають паралелепіпед P_0 на $3^3 = 27$ частин першого рангу. Сітка $S_{i,j,k}$ міститиме $4^3 = 64$ вузлів. Якщо координати вузлів сітки $S_{i,j,k}$ розділити на норми $\|\cdot\|_2$ вектора нев'язки $V^T_{i,j,k} = \Phi(M_{i,j,k}) \neq 0$, то дістанемо зважені точки. Нехай паралельно у кожному паралелепіпеді розбиття визначається точка рівноваги і вибирається той паралелепіпед розбиття, що містить точку рівноваги з найменшою нормою нев'язки. Таким чином, алгоритм розв'язування системи нелінійних рівнянь на областях простору R^3 аналогічний алгоритму простору R^2. Швидкість збіжності за напрямками *Ox, Oy, Oz* не залежить від розмірності простору і належить порядку експоненційної швидкості збіжності.

Із аналізу алгоритму для простору R^3 випливає, що зростання розмірності простору R^n, $n \geq 3$, вимагає зростання об'єму обчислень (наприклад, для $n = 5$ паралелепіпед розбивається на $3^5 = 243$ частини з сіткою, що містить $4^5 = 1024$ вузлів).

Важливою практичною задачею є дослідження на сумісність системи нелінійних рівнянь в однозв'язних опуклих обмежених замкнених областях і визначення околу розв'язку для сумісних систем. Теорема 6 дає підставу для її розв'язання.

Приклад 4. *Дослідити на сумісність систему [2, с. 299]* $\begin{cases} \Phi_1(x,\ y) = xy - y^3 - 1 = 0, \\ \Phi_2(x,\ y) = x^2 y + y - 5 = 0, \end{cases}$ *у прямокутнику*

$$P_0\left(M_0(0,\ 0),\ \Delta x = 5,\ \Delta y = 3\right).$$

Розв'язок системи точка $\left(x^*,\ y^*\right) = (2;\ 1)$.

Розв'язання. Будемо позначати: $P_k\left(M_{k,0}(x_{k,0},\ y_{k,0}),\ \Delta x_k,\ \Delta y_k\right)$ прямокутник k-го рангу, $M_{k,0}(x_{k,0},\ y_{k,0})$ – вершину $P_{k,0}$ (ліву нижню), Δx_k, Δy_k – розмірність прямокутника у напрямку осей *Ox, Oy*. У прямокутнику $P_0\left(M_0(0;\ 0),\ \Delta x = 5,\ \Delta y = 3\right)$ точка рівноваги $\tilde{x}_0 = 2.815945$, $\tilde{y}_0 = 0.333822388$, $\left\|\Phi\left(M_0\left(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0\right)\right)\right\|_2 = 2.0214528$; після розбиття (стиснення) на 9 прямокутників першого рангу виділився прямокутник

$$P_1\left(M_1(1.909830055,\ 0.708203932),\ \Delta x = 1.18033989,\ \Delta y = 0.437694101\right),$$

точка рівноваги $\tilde{x}_1 = 2.036035411$, $\tilde{y}_1 = 1.017865236$, $\left\|\Phi\left(M_1\left(\tilde{x}_1,\ \tilde{y}_1\right)\right)\right\|_2 = 0.238035201$; після другого розбиття дістали прямокутник другого рангу

$$P_2\left(M_2(1.909830055,\ 0.978713764),\ \Delta x = 0.450849719,\ \Delta y = 0.167184366\right),$$

точка рівноваги

$$\tilde{x}_2 = 1.9988066081,\ \tilde{y}_2 = 1.058204456,\ \left\|\Phi\left(M_2\left(\tilde{x}_2,\ \tilde{y}_2\right)\right)\right\|_2 = 0.29437411.$$

Отже, достатньо двох стиснень прямокутника $P_0[5\times 3]$, щоб встановити, що система нелінійних рівнянь сумісна і її розв'язок належить прямокутнику P_2. Оскільки функція $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ диференційовна, то за початкову точку для застосування методу Ньютона можна прийняти точку $M_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \in P_2$. Зазначимо, що матриця Якобі у точці $M_0(0; 0)$ вироджена. Функція $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ у точці $M_2(5; 3)$ погано обумовлена

Висновки. Визначені властивості степенів і многочленів з параметром золотого перерізу. Побудовані кубічні многочлени з двома і трьома змінними. Для розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної, сумісних систем нелінійних рівнянь багатьох змінних з неперервними, кусково неперервними функціями запропоновані алгоритми, що збігаються з швидкістю близькою до експоненційної. Перспективою подальших досліджень є розробка алгоритмів безумовної оптимізації нелінійних функцій та оптимізації функцій при нелінійних обмеженнях.

Список використаних джерел:

1. Абрамчук В., Соя О., Тютюн Л., Абрамчук І. Інтерполяційні кубічні многочлени на сітках золотого перерізу для оптимізації і розв'язування нелінійних рівнянь однієї змінної. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2025. Вип. 2 (2). С. 225-232. DOI: 10.31652/3041-1955-2025-02-02-06.
2. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. USA: Prentice-Hall, INC, 1989. 495 p.
3. Dennis J. E., Jr., Schnabel R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. USA: Prentice-Hall Series Computationall Mathematics, 1988. 440 p.
4. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2006. 528 p.
5. Aguilar-Mendez E., del Castillo R. M. A Highly Efficient Numerical Method to Solve Non-linear Functions Using Barycentric Interpolation. *Applied Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 15 (7). P. 321-336. DOI: 10.12988/ams.2021.914487.
6. Liu D., Liu C.-S. Two-point Generalized Hermite Interpolation: Double-Weight Function and Functional Recursion Methods for Solving Nonlinear Equations. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2022. Vol. 187. P. 317-330. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.10.019.
7. Busquier S., Gutierrez J. M., Ramos H. Third Order Root-Finding Methods Based on a Generalization of Gander's Result. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 16 (4). P. 659-671. DOI: 10.47836/mjms.16.4.01.
8. Abbasi Z., Kalhoro Z. A., Jamali S. et al. A Novel Approach for Real-World Problems Based on the Hermite Interpolation Technique and Analysis Using Basins of Attraction. *The Sciencetech*. 2024. Vol. 5 (3). P. 113-126.
9. Torkashvand V. Interpolatory Four-Parametric Adaptive Method with Memory for Solving Nonlinear Equations. *AUT Journal of Mathematics and Computing*. 2024. Vol. 5 (3). P. 275-287. DOI: 10.22060/AJMC.2023.22090.1132.

References:

1. Abramchuk V., Soia O., Tiutiun L., Abramchuk I. Interpolation cubic polynomials on golden section grids for optimization and solving nonlinear equations of a single variable. *Mathematics, Informatics, Physics: Science and Education*. 2025. Vol. 2 (2). P. 225-232. DOI: 10.31652/3041-1955-2025-02-02-06.
2. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. USA: Prentice-Hall, INC, 1989. 495 p.
3. Dennis J. E., Jr., Schnabel R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. USA: Prentice-Hall Series Computationall Mathematics, 1988. 440 p.
4. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2006. 528 p.
5. Aguilar-Mendez E., del Castillo R. M. A Highly Efficient Numerical Method to Solve Non-linear Functions Using Barycentric Interpolation. *Applied Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 15 (7). P. 321-336. DOI: 10.12988/ams.2021.914487.
6. Liu D., Liu C.-S. Two-point Generalized Hermite Interpolation: Double-Weight Function and Functional Recursion Methods for Solving Nonlinear Equations. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2022. Vol. 187. P. 317-330. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.10.019.
7. Busquier S., Gutierrez J. M., Ramos H. Third Order Root-Finding Methods Based on a Generalization of Gander's Result. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 16 (4). P. 659-671. DOI: 10.47836/mjms.16.4.01.
8. Abbasi Z., Kalhoro Z. A., Jamali S. et al. A Novel Approach for Real-World Problems Based on the Hermite Interpolation Technique and Analysis Using Basins of Attraction. *The Sciencetech*. 2024. Vol. 5 (3). P. 113-126.
9. Torkashvand V. Interpolatory Four-Parametric Adaptive Method with Memory for Solving Nonlinear Equations. *AUT Journal of Mathematics and Computing*. 2024. Vol. 5 (3). P. 275-287. DOI: 10.22060/AJMC.2023.22090.1132.

ALGORITHMS FOR SOLVING NONLINEAR PROBLEMS ON GRIDS PARAMETERIZED BY THE GOLDEN RATIO

The properties of powers and polynomials with a golden ratio parameter are studied. An important problem in the theory of interpolation polynomials is the smoothing of cubic polynomials of one variable at junction points. It is proposed to perform such smoothing on periodic grids parameterized by the golden ratio. For the minimization of functions of two and three variables, cubic polynomials are constructed on 10-point and 20-point stencils, respectively. The linear systems for determining the polynomial coefficients, of orders 10 and 20, respectively, are decomposed into third-order subsystems.

It is substantiated that there exists an optimal correspondence between the order of interpolation cubic polynomials in two and three variables and the dimension of grids with a golden ratio parameter, which leads to a high rate of coefficient computation and minimizes computational errors.

Methods for solving nonlinear equations of one variable and systems of nonlinear equations with continuous functions are developed. These methods are based on the principle that the study of a nonlinear problem may provide a more accurate solution in fewer steps than the iterative solution of its linearized model. Since the solution of a nonlinear problem on a given continuous domain is, as a rule, not obtainable analytically, it is necessary to pass from a continuous model to a discrete one on symmetric grids with a golden ratio parameter. The rapid contraction of such domains with a minimal number of function evaluations is achieved by partitioning the domain into 3^n subdomains in the space R^n, $n \geq 2$. The main task is to determine the subdomain containing the solution of the nonlinear system, which is accomplished by the equilibrium point method that does not require the use of differential calculus. The convergence rate is determined by the golden ratio parameter and corresponds to an exponential rate of convergence.

Key words: *polynomials, nonlinear equations, exponential convergence rate, golden ratio parameter, equilibrium point.*