

УДК 517.927

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-29.29-39

Геселева К. Г.

ORCID: 0009-0009-2619-5604,

канд. фіз.-мат. наук, Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна,
E-mail: heseleva@kpnpu.edu.ua

НЕСТАЦІОНАРНИЙ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО- ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Інтегро-функціональні рівняння займають важливе місце у математичному моделюванні широкого спектра прикладних і міждисциплінарних задач, зокрема тих, що пов'язані з динамічними системами із запізненням та відхиленням аргументу. До таких рівнянь зводяться крайові та початкові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, як і з запізненням, так і нейтрального типу. При цьому відхилення аргументу може бути як сталою, так і змінною величиною. Наявність навіть малої нелінійності у подібних моделях істотно ускладнює аналіз існування, єдиності, стійкості та асимптотичної поведінки їхніх розв'язків, що обумовлює необхідність розробки нових та вдосконалення вже існуючих наближених методів їх дослідження.

Одним із підходів до побудови наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь є проєкційно-ітеративний метод, окремим випадком якого виступає колокаційно-ітеративний метод. Суттєвою перевагою колокаційно-ітеративного методу над загальною схемою проєкційно-ітеративного методу є суттєве спрощення обчислювального процесу, оскільки на кожному ітеративному кроці замість обчислення інтегралів від нев'язки використовуються лише її значення у вузлах колокації. Частковим, більш простішим з обчислювальної точки зору є нестационарний колокаційно-ітеративний метод.

У роботі досліджено питання застосування нестационарного колокаційно-ітеративного методу до одного класу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Приведено достатні умови збіжності цього методу. Отримані результати можуть бути використані для розв'язування задач прикладної математики, механіки, теорії керування та інформаційних технологій, де моделі описуються рівняннями з відхиленням аргументу.

Стаття надійшла до редакції: 6.05.2026

Рекомендовано до друку: 9.05.2026

Оприлюднено (online): 15.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

Ключові слова: *інтегро-функціональні рівняння, рівняння з малою нелінійністю, наближений розв'язок, колокаційно-ітеративний метод, оператори проєктування, оцінки похибок, нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод.*

Вступ. Математичними моделями багатьох задач природознавства і техніки є різні типи диференціальних, інтегральних, інтегродиференціальних, інтегро-функціональних рівнянь та їхніх систем. При дослідженні цих моделей традиційно широко використовуються якісні й аналітичні методи теорії диференціальних рівнянь, а також методи обчислювальної математики.

Створення нових і вдосконалення існуючих високоточних чисельно-аналітичних методів є актуальним напрямом роботи багатьох дослідників. До таких методів належать, зокрема, чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка та метод осереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова. Провідним напрямом, що розвиває конструктивні підходи до розв'язання операторних рівнянь у функціональних просторах, є проєкційно-ітеративні методи та їхні модифікації. Дослідженню теоретичних основ проєкційно-ітеративних методів та їхніх узагальнень присвячені фундаментальні праці М. С. Курпея, А. Ю. Лучки та багатьох інших математиків.

Наявність чималої кількості різноманітних методів відшукування розв'язків (як точних, так і наближених) не виключає можливостей для розвитку нових, більш ефективних обчислювальних схем і покращення вже існуючих.

Тому актуальним є дослідження інтегро-функціональних рівнянь щодо існування розв'язків та методів їхнього знаходження. До таких рівнянь зводяться, зокрема, крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу в загальному випадку, коли відхилення аргументу може бути змінною величиною. Знайти точні розв'язки згаданих рівнянь можна лише в окремих, зазвичай, достатньо простих випадках, тому важливим є дослідження методів побудови наближених розв'язків цих рівнянь.

Одним із ефективних і конструктивних методів є колокаційно-ітеративний метод, який виник на основі поєднання звичайного методу послідовних наближень та методу колокації, і який можна трактувати як окремий випадок проєкційно-ітеративного методу. Дослідженню та теоретичному обґрунтуванню колокаційно-ітеративного методу, вивченню швидкості збіжності методу залежно від гладкості вихідних даних присвячені роботи А. Ю. Лучки та Є. М. Луцева, В. Б. Поселожної та інших. Уже існуючі праці, в яких застосовують колокаційно-ітеративний метод до окремих класів інтегро-функціональних рівнянь, значно збагачують їхню теорію. З метою мінімізації обчислювальних процесів, актуальним напрямком є розвиток і застосування методу колокації та різних варіантів колокаційно-ітеративного методу.

Праці [6, 7] присвячено дослідженню різних класів інтегро-функціональних рівнянь. У [3] докладно розглядається процедура спрощення інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю до рівнянь з більш простою структурою, встановлюються умови їхньої еквівалентності та встановлено умови існування та єдиності розв'язку. Також у працях [3, 4] представлені ідеї застосування методу колокації та колокаційно-ітеративного методу до розглянутого там класу рівнянь.

Проведені в статті дослідження присвячено конкретному класу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Зокрема, до таких рівнянь застосовано нестационарний колокаційно-ітеративний метод і вказано достатні умови збіжності методу.

Постановка задачі. У просторі $L_2[a, b]$ – дійсних і вимірних на проміжку $[a, b]$ функцій, сумовних з квадратом, розглянемо інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b H_1(x, t)y(t)dt + \int_a^b H_2(x, t)y(h(t))dt +$$

$$+ \varepsilon \int_a^b G(x, t)F(t, y(t))dt, \quad x \in [a, b],$$

$$y(x) = \psi(x), \quad x \notin [a, b],$$

де $f(x), \psi(x)$ – задані відповідно на $[a, b]$ та за його межами відомі функції, а $y(x)$ – шукана функція з $L_2[a, b]$. Відносно функцій $h(x), p(x), H_1(x, t), H_2(x, t), G(x, t)$ припускаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a, b]$ і в квадраті $[a, b]^2 = [a, b] \times [a, b]$ задовольняють умови:

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty,$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a, b]$ і

$$h'(x) \geq l > 0, \quad x - h(x) \geq \sigma > 0,$$

$$\int_a^b \int_a^b H_i^2(x, t) dx dt = H_i^2 < \infty, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_a^b \int_a^b G^2(x, t) dx dt = G^2 < \infty.$$

Функція $F(t, y)$ в області $D = \{a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ вимірна за t при всіх y і неперервна за y при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця

$$\begin{aligned} |F(t, y)| &\leq \alpha(t) + \beta|y|, \\ |F(t, y) - F(t, \bar{y})| &\leq L|y - \bar{y}|, \end{aligned} \quad (7)$$

де β, L – деякі додатні сталі, $\alpha(t) \in L_2[a, b]$.

У попередніх дослідження автора показано, що рівняння (1) при виконанні умов (3)-(7) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю [2, 3, 5]

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{T}(x, t) u(t) dt + \varepsilon(\Phi u)(x), \quad (8)$$

з цілком неперервним інтегральним оператором \tilde{T} , ядро якого

$$\tilde{T}(x, t) = \begin{cases} T(x, t) + \sum_{i=1}^{m-s} T\left(x, \left(h^{-1}\right)^k(t)\right), & t \in \Delta s, \\ T(x, t), & t \in (c_{m-1}, b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a, b), \end{cases}$$

де

$$\left(h^{-1}\right)^k(t) = h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right), \quad T(x, t) = H_1(x, t) + \tilde{H}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b]^2,$$

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} \frac{H_2(x, h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}, & t \in [a, h(b)], \\ 0, & t \in (h(b), b], x \in [a, b]. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\Phi(t, u(t)) = F(t, (S^{-1}u)(t))$, а оператор $\tilde{T} = TS^{-1} = H_1S^{-1} + \tilde{H}S^{-1}$ Фредгольмів як суперпозиція Фредгольмового і лінійного обмеженого операторів.

До рівняння (1) з умовою (2) можна застосувати метод колокації та колокаційно-ітеративний методи [5]. Застосуємо до задачі (1), (2) нестационарний колокаційно-ітеративний метод.

Основні результати. Ідея нестационарного колокаційно-ітеративного методу стосовно рівняння (1) полягає у наступному. Нехай, виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x) \in L_2[a, b]$ і функції $s_0(x)$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) &= s_0(x), x \in [a, b], \\ y_0(x) &= 0, x \notin [a, b], \end{aligned} \quad (9)$$

ми знайшли наближення $y_{k-1}(x)$ і функцію $s_{k-1}(x)$.

Обчислимо функцію

$$\tilde{s}_{k-1}(x) = \int_a^b P_{k-1}(x,t) s_{k-1}(t) dt, \quad (10)$$

де $\{P_k\}$ – послідовність проєктуючих операторів, які визначаються таким чином:

$$(P_k g)(x) = \int_a^b P_k(x,t) g(t) dt, \quad \forall g(x) \in L_2[a,b], \quad (11)$$

в якій

$$P_k(x,t) = \sum_{i=1}^{n_k} \gamma_i \varphi_i(x) \varphi_i(t), \quad \gamma_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \quad (10)$$

де $k=1,2,3,\dots$, система $\{\varphi_i(x)\}$ – задана ортогональна та повна в $L_2[a,b]$.

Очевидно, проєктуючі оператори (11) ортогонально проєктують простір $L_2[a,b]$ на його підпростір $L_2^k[a,b]$ причому

$$L_2^{k-1}[a,b] \subset L_2^k[a,b], \quad k=1,2,3,\dots$$

Розв'яжемо функціональне рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k-1}(x) - p(x) \tilde{y}_{k-1}(h(x)) &= \tilde{s}_{k-1}(x), \quad x \in [a,b], \\ \tilde{y}_{k-1}(x) &= 0, \quad x \notin [a,b]. \end{aligned} \quad (13)$$

Наближення $y_k(x)$ визначаємо як розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} y_k(x) - p(x) y_k(h(x)) &= f(x) + \int_a^b H_1(x,t) \tilde{z}_k(t) dt + \\ + \int_a^b H_2(x,t) \tilde{z}_k(h(t)) dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t) \Phi(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad x \in [a,b], \\ y_k(x) &= 0, \quad x \notin [a,b], \end{aligned} \quad (14)$$

в якому

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k(x) &= \tilde{y}_{k-1}(x) + w_k(x), \\ w_k(x) &= \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), \quad x \notin [a,b]. \end{aligned} \quad (15)$$

Невідомі параметри a_j^k знаходимо з умови

$$\tilde{r}_k(x_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t) \tilde{z}_k(t) dt + \\ + \int_a^b H_2(x,t) \tilde{z}_k(h(t)) dt - \tilde{z}_k(x) + p(x) \tilde{z}_k(h(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Система функцій $\{\eta_i(x)\}$ у формулах (15), (16) знаходиться з рівнянь, які у нашому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} \eta_i(x) - p(x) \eta_i(h(x)) = \varphi_i(x), \quad x \in [a, b], \\ \eta_i(x) = 0, \quad x \notin [a, b], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

де система функцій $\{\varphi_i(x)\}$, як вже зазначалось, ортогональна та повна в просторі $L_2[a, b]$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t) \tilde{y}_{k-1}(t) dt + \int_a^b H_2(x,t) \tilde{y}_{k-1}(h(t)) dt - \\ - \tilde{y}_{k-1}(x) + p(x) \tilde{y}_{k-1}(h(x)) + \varepsilon \int_a^b G(x,t) \Phi(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Підставляючи функцію $\tilde{z}_k(x)$, яка визначається формулою (15), у вираз (17), а потім отриманий результат – в умову (16), для знаходження параметрів a_j^k отримаєм систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

де β_{ij} обчислюються формулою

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x) - H_{1j}(x) - H_{2j}(x), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (20)$$

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (21)$$

де

$$H_{1j}(x) = \int_a^b H_1(x,t) \eta_j(t) dt, \quad H_{2j}(x) = \int_a^b H_2(x,t) \eta_j(h(t)) dt, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Як і раніше, систему рівнянь (19) будемо записувати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$.

Зауважимо, що в за наближення до шуканого розв'язку можна брати будь-яку з функцій $y_k(x)$, $\tilde{y}_k(x)$, $\tilde{z}_k(x)$.

Слід звернути увагу і на той факт, що на основі аналізу формул (9)-(18) при $s_0(x) = 0$ наближення $\tilde{z}_1(x)$ співпадає з наближенням, побудованим за допомогою колокаційного методу, наближення $y_1(x)$ – з наближенням, побудованим за допомогою покращеного колокаційного методу, а при $w_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$, наближення $y_k(x)$ знаходиться за допомогою нестационарного методу послідовних наближень.

Алгоритм (9)-(18) можна звести до нестационарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду (8), тобто до рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{T}(x, t)u(t)dt + \varepsilon \int_a^b G(x, t)F(t, u(t))dt, \quad x \in [a, b].$$

Дійсно, формули (11), (12), (13) і (17) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} (S\tilde{y}_{k-1})(x) &= (P_{k-1}S_{k-1})(x), \\ (Sy_k)(x) &= f(x) + (H_1\tilde{y}_{k-1})(x) + (H_1w_k)(x) + (H_2\tilde{y}_{k-1})(x) + (H_2w_k)(x), \\ \tilde{r}_k &= f(x) + (H_1\tilde{y}_{k-1})(x) + (H_1w_k)(x) + (H_2\tilde{y}_{k-1})(x) + (H_2w_k) - \\ &\quad - (S\tilde{y}_{k-1})(x) - (Sw_k)(x). \end{aligned}$$

За допомогою цих формул умова (16) легко переписється у вигляді

$$(Sy_k - S\tilde{y}_{k-1} - Sw_k)(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки

$$u_k(x) = s_k(x) = (Sy_k)(x), \quad \alpha_k(x) = (Sw_k)(x), \quad (22)$$

то звідки випливає, що

$$y_k(x) = (S^{-1}u_k)(x), \quad w_k(x) = (S^{-1}\alpha_k)(x). \quad (23)$$

На підставі формул (22), (23) та співвідношення (18), отримаємо

$$u_k(x) = f(x) + (\tilde{T}P_{k-1}u_{k-1})(x) + (\tilde{T}\alpha_k)(x), \quad (24)$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \varphi_j(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (25)$$

$$u_k(x_i) - (P_{k-1}u_{k-1})(x_i) - \alpha_k(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Дійсно, можна побачити, що співвідношення (24)-(26) – це нестационарний колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю (8).

Лема. Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ з додатніми членами ха-

рактеризуються тим, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in$ збіжним і $b_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = 0.$$

Теорема. Якщо виконуються умови (3)-(7) і система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ повна в $L_2[a, b]$,

$$p_n + \alpha_n = \tau_{1n} < 1, \quad (27)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k v\| = 0, Q_k = I - P_k, \forall v \in L_2[a, b], \quad (28)$$

то $\forall f(x) \in L_2[a, b]$ рівняння (1) матиме єдиний розв'язок $y^*(x)$ і послідовність $\{y_k(x)\}$, побудована відповідно до методу (9)-(18), збігається в $L_2[a, b]$ до цього розв'язку.

Доведення. оскільки виконується умова (27), то рівняння (8) має єдиний розв'язок $u^*(x)$, тобто

$$u^* = f + Tu^* + Fu^*, \quad (29)$$

і рівняння

$$w_k - P_0 w_k = P_0(f + TP_{k-1}u_{k-1} + FP_{k-1}u_{k-1} - u_{k-1}),$$

також має єдиний розв'язок

$$w_k = R_n(f + TP_{k-1}u_{k-1} + FP_{k-1}u_{k-1} - u_{k-1}). \quad (30)$$

Беручи до уваги (29), (30) і що

$$w_k = P_0(u_k - u_{k-1}), k = 1, 2, \dots, u_0 \in L_2[a, b],$$

будемо мати

$$\begin{aligned} u^* - u_k &= (f + Tu^* + Fu^*) - (f + TP_{k-1}u_{k-1} + FP_{k-1}u_{k-1}) = \\ &= D_n(Fu^* - FP_{k-1}u_{k-1}) + M_n(u^* - P_{k-1}u_{k-1}), \end{aligned}$$

де оператори переходу D_n і M_n мають відповідно вигляд

$$D_n = I + TR_n,$$

$$M_n = T(I + R_n T - R_n),$$

I – тотожний оператор, а $Q_n = I - P_n$, $R_n = (I - P_n T)^{-1} P_n$.

Нехай

$$u^* - u_k = \Delta_k^*, \|Q_k u^*\| = \delta_k, \quad (31)$$

тоді врахувавши вищевказані співвідношення, отримуємо

$$\begin{aligned} \|u^* - u_k\|^2 &\leq (\alpha_n + p_n)^2 \|u^* - P_{k-1}u_{k-1}\|^2 = \tau_{1n}^2 \|P_{k-1}(u^* - u_{k-1}) + Q_{k-1}u^*\|^2 \leq \\ &\leq \tau_{1n}^2 \left(\|P_{k-1}(u^* - u_{k-1})\|^2 + \|Q_{k-1}u^*\|^2 \right) \leq \tau_{1n}^2 \left(\|u^* - u_{k-1}\|^2 + \|Q_{k-1}u^*\|^2 \right), \end{aligned}$$

тобто

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 \leq \tau_{1n}^2 \left(\left(\Delta_k^*\right)^2 + \delta_{k-1}^2 \right). \quad (32)$$

Замінімо в нерівності (32) індекс k на $k-1$ і отриманий результат підставимо до правої частини тієї ж нерівності (32). У результаті будемо мати

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 \leq \tau_{1n}^2 \left(\tau_{1n}^2 \left(\left(\Delta_{k-2}^*\right)^2 + \delta_{k-2}^2 \right) + \delta_{k-1}^2 \right) = \tau_{1n}^4 \left(\Delta_{k-2}^*\right)^2 + \tau_{1n}^4 \delta_{k-2}^2 + \tau_{1n}^2 \delta_{k-1}^2.$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо

$$\left(\Delta_k^*\right)^2 = \tau_{1n}^{2k} \left(\Delta_0^*\right)^2 + \tau_{1n}^{2k} \delta_0^2 + \tau_{1n}^{2(k-1)} \delta_1^2 + \dots + \tau_{1n}^4 \delta_{k-2}^2 + \tau_{1n}^2 \delta_{k-1}^2. \quad (33)$$

Використавши умови (27) та (28), легко переконатись у тому, що $\delta_k^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і ряд $\tau_{1n}^2 + \tau_{1n}^4 + \dots + \tau_{1n}^{2k} + \dots$ збігається. З цього випливає, що умови Лема виконуються. Отже, перейшовши у нерівності (33) до границі, отримаємо співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^* - u_k\| = 0,$$

тобто такий метод збігається до розв'язку u^* рівняння (29). А це означає, що для $\forall f(x) \in L_2[a, b]$ існує єдиний розв'язок $u^*(x)$ рівняння (1) і нестационарний колокаційно-проекційний метод (9)-(18) збігається до цього розв'язку. **Теорему доведено.**

Висновки. У роботі досліджено клас інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обґрунтовано застосування нестационарного колокаційно-ітеративного методу для побудови їх наближених розв'язків. Доведено достатні умови збіжності побудованої послідовності наближених розв'язків, отримано оцінки швидкості збіжності методу. Показано, що запропонований метод забезпечує ефективну апроксимацію розв'язків при відносно невеликих обчислювальних витратах і може бути успішно застосований до широкого класу задач із відхиленням аргументу. Отримані результати розширюють можливості чисельного аналізу інтегро-функціональних рівнянь і можуть бути використані в задачах прикладної математики, механіки, теорії керування та комп'ютерного моделювання. Перспективи подальших досліджень пов'язані з узагальненням обчислювальної схеми методу, яка поєднує колокаційний підхід із ітераційними процедурами та врахує нестационарність задачі, а також узагальненням методу на випадок суттєвої нелінійності, багатовимірних задач та розробкою адаптивних алгоритмів із підвищеною точністю.

Список використаних джерел:

1. Heseleva K. Collocation-iterative method of solving one type of integro-functional equation. *IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity»*, May 25-26, 2023. Vinnytsia, 2023. P. 70-72.

2. Геселева К. Г. Побудова методом колокації наближеного розв'язку інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю. *Збірник матеріалів міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності»*, 20-22 червня 2024 р. Вінниця: ВНТУ, 2024. С. 104-105.
3. Геселева К. Г. Наближені методи розв'язування інтегро-функціональних рівнянь: монографія. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; Кам'янець-Подільський: ФОП Панькова А. С., 2022. 144 с.
4. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно ітеративний методи розв'язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 19-27.
5. Геселева К. Г. Дослідження колокаційного та колокаційно-ітеративного методів розв'язування одного типу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2024. Вип. 25. С. 27-36.
6. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь: монографія. Тернопіль: ТНЕУ, 2013. 203 с.
7. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. Ф. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.

References:

1. Heseleva K. Sollocation-iterative method of solving one type of integro-functional equation. *IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity»*, May 25-26, 2023. Vinnytsia, 2023. R. 70-72.
2. Heseleva K. H. Pobudova metodom kolokatsii nablyzhenoho rozv'iazku intehro-funktsionalnogo rivniannia z maloju neliniinistiu. *Zbirnyk materialiv mizhnarodnoi naukovoi-metodychnoi Internet-konferentsii «Problemy vyshchoi matematychnoi osvity: vyklyky suchasnosti»*, 20-22 chervnia 2024 r. Vinnytsia: VNTU, 2024. S. 104-105.
3. Heseleva K. H. Nablyzheni metody rozv'iazuvannia intehro-funktsionalnykh rivnian: monohrafiia. Kamianets-Podil'skyi: Kamianets-Podil'skyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohienka; Kamianets-Podil'skyi: FOP Pankova A. S., 2022. 144 s.
4. Heseleva K. H. Kolokatsiinyi ta kolokatsiino iteratyvnyi metody rozv'iazannia intehro-funktsionalnykh rivnian z maloju neliniinistiu. *Matematychno ta kompiuterne modeliuвання. Seria: Fyzyko-matematychni nauky*: zb. nauk. pr. / In-t kibernetiky im. V. M. Hlushkova NANU, Kamianets-Podil. nats. un-t im. Ivana Ohienka. Kamianets-Podil'skyi, 2015. Vyp. 12. S. 19-27.
5. Heseleva K. H. Doslidzhennia kolokatsiinoho ta kolokatsiino-iteratyvnoho metodiv rozv'iazuvannia odnogo typu intehro-funktsionalnykh rivnian z maloju

- neliniinstiu. *Matematychni ta kompiuterni modeliuвання. Serii: Fizyko-matematychni nauky*: zb. nauk. pr. / In-t kibernetiky im. V. M. Hlushkova NAN Ukrainy, Kamianets-Podil. nats. un-t im. Ivana Ohiiienka. Kamianets-Podilskyi, 2024. Vyp. 25. S. 27-36.
6. Poseliuzhna V. B., Semchyshyn L. M. Kolokatsiino-iteratyvnyi metod rozviazuvannia dyferentsialnykh ta intehralnykh rivnian: monohrafiia. Ternopil: TNEU, 2013. 203 s.
 7. Fedorchuk V. A., Ivaniuk V. A., Verlan D. F. Intehralni rivniannia v zadachakh matematychnoho modeliuвання. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiiienka, 2014. 144 s.

NONSTATIONARY COLLOCATION-ITERATIVE METHOD FOR CONSTRUCTING APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH SMALL NONLINEARITY

Integro-functional equations occupy an important place in the mathematical modeling of a wide range of applied and interdisciplinary problems, particularly those related to dynamical systems with delay and deviating arguments. Such equations arise in the formulation of boundary-value and initial-value problems for differential equations with deviating arguments, including both delay and neutral types. In this case, the argument deviation may be either constant or variable. The presence of even small nonlinearity in such models significantly complicates the analysis of the existence, uniqueness, stability, and asymptotic behavior of their solutions, which necessitates the study and development of new approximate methods as well as the improvement of existing approaches for their investigation.

One of the approaches to constructing approximate solutions of integro-functional equations is the projection-iterative method, a particular case of which is the collocation-iterative method. A significant advantage of the collocation-iterative method over the general projection-iterative scheme is the considerable simplification of the computational process, since at each iteration step, instead of calculating integrals of the residual, only its values at the collocation nodes are used. A particular and computationally simpler modification of this approach is the nonstationary collocation-iterative method.

This paper investigates the application of the nonstationary collocation-iterative method to a class of integro-functional equations with small nonlinearity. Sufficient conditions for the convergence of this method are established. The obtained results can be applied to solving problems in applied mathematics, mechanics, control theory, and information technologies, where mathematical models are described by equations with deviating arguments.

Key words: *integro-functional equations, equations with small nonlinearity, approximate solution, collocation-iterative method, design operators, error estimates, non-stationary collocation-iterative method.*