

УДК 536.2

DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.91-104

Мусій Р. С.

ORCID: 0000-0002-7169-2206,

д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна,

E-mail: musiy@lp.edu.ua

Кунинець А. В.

ORCID: 0000-0003-2481-3236,

канд. фіз.-мат. наук, Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна,

E-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua

Свідрак І. Г.

ORCID: 0000-0003-1811-2011,

канд. техн. наук, Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна,

E-mail: inha.h.svidrak@lpnu.ua

Тимошенко Н. М.

ORCID: 0000-0002-5595-6531,

канд. фіз.-мат. наук, Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна,

E-mail: nadiia.m.tymoshenko@lpnu.ua

Шиндер В. К.

ORCID: 0000-0002-9414-5619,

канд. фіз.-мат. наук, Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна,

E-mail: valentyn.k.shynder@lpnu.ua

**ВИЗНАЧЕННЯ ТА АНАЛІЗ ТЕПЛА ДЖОУЛЯ І
ПОНДЕРОМОТОРНОЇ СИЛИ У ПОРОЖНИСТОМУ МІДНОМУ
ЦИЛІНДРІ ЗА ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ІМПУЛЬСА**

Запропоновано фізико-математичну модель для визначення та аналізу закономірностей поведінки тепла Джоуля і пондеромоторної сили у неферромагнітному довгому порожнистому електропровідному циліндрі за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Сформульовано початково-крайову зада-

Стаття надійшла до редакції: 9.05.2026

Рекомендовано до друку: 22.05.2026

Оприлюднено (online): 29.05.2026

Ця стаття розповсюджується на умовах ліцензії CC Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

чу електродинаміки для знаходження визначальної функції – осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля. Записано вихідні співвідношення для визначення питомих густин тепла Джоуля і пондеромоторної сили. Ці два фізичні фактори виникають у циліндрі внаслідок протікання індукованих струмів та взаємодії цих струмів із зовнішнім нестационарним електромагнітним полем. Для знаходження визначальної функції використано кубічну апроксимацію її розподілу по радіальній координаті. Коефіцієнти апроксимаційного кубічного полінома подаються у вигляді лінійної комбінації інтегральних за радіальною змінною характеристик визначальної функції та її граничних значень на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра. У результаті вихідна початково-крайова задача на визначальну функцію зведена до задачі Коші на її інтегральні характеристики. Розв'язок задачі Коші знайдено з допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Записано вирази осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля та питомих густин тепла Джоуля і пондеромоторної сили за дії одиночного електромагнітного імпульса. Для мідного порожнистого циліндра чисельно проаналізовано зміну в часі зазначених вище величин та їх розподіли по товщині даного циліндра. Встановлено, що максимальні значення тепла Джоуля і радіальної компоненти вектора пондеромоторної сили на серединній поверхні циліндра менші за їх значення на зовнішніх поверхнях циліндра приблизно у 1000 та 100 разів відповідно. Виявлено, що зі збільшенням товщини розглядуваного порожнистого циліндра при фіксованому радіусі його серединної поверхні максимальні значення тепла Джоуля і пондеромоторної сили зменшуються (приблизно в 0,6 разів) при збільшенні товщини циліндра на один міліметр.

Ключові слова: *порожнистий електропровідний циліндр, електромагнітний імпульс, осьова компонента вектора напруженості магнітного поля, тепло Джоуля, пондеромоторна сила.*

Вступ. Вивчення електромагнітних процесів в електропровідних тілах має важливе значення для оптимізації обробки таких тіл з допомогою електромагнітних полів (ЕМП) [1]. В сучасних технологіях обробки електропровідних елементів використовують ЕМП для індукційної термообробки [2] і для магніто-імпульсної обробки [3; 4, с. 35-39] з допомогою одиничних електромагнітних імпульсів (ЕМІ). Питання генерації імпульсних ЕМП та їх вплив на фізичні процеси нагріву і деформації на основі експериментальних досліджень детально розглянуто в роботах [5, 6]. У монографії [7] викладено варіант теорії термомеханіки неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних ЕМП. Для електропровідних тіл канонічної форми дослі-

джено якісні та кількісні закономірності їх термомеханічної поведінки за дії ЕМІ. У роботі [8, с. 1110-1122] описано термодинамічні основи процесів деформування електропровідних тіл імпульсними ЕМП. Досліджено динамічні термопружні процеси в електропровідній пластині за дії імпульсних ЕМП мікро- та наносекундної тривалості. Однак в літературі недостатньо висвітлено процеси нагріву і деформування трубчастих електропровідних елементів, які використовують в різноманітних електротехнічних пристроях.

Метою даної роботи є дослідження зміни в часі і по товщині тепла Джоуля і пондеромоторної сили у довгому порожнистому мідному циліндрі за дії ЕМІ мікросекундної тривалості.

1. Вихідні положення. Розглядається порожнистий електропровідний циліндр, віднесений до циліндричної системи координат $O r \varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю симетрії циліндра з внутрішнім $r = r_0$ і зовнішнім $r = r_1$ радіусами.

Матеріал циліндра однорідний, ізотропний і неферомагнітний. Його електрофізичні параметри: σ – коефіцієнт електропровідності та μ – магнітна проникливість приймаються сталими. Циліндр знаходиться під дією електромагнітного імпульса (ЕМІ).

Дію ЕМІ математично описуємо виразом

$$H_{0z}(t) = kH_0(\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)). \quad (1)$$

Тут H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля, створюваного на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях циліндра дією ЕМІ; β_1, β_2 – параметри, що характеризують часи фронтів наростання і спадання ЕМІ; k – нормувальний множник, t – час.

Дія ЕМІ на циліндр проявляється двома фізичними чинниками – теплом Джоуля Q і пондеромоторною силою $\vec{F} = \{F_r(r, t); 0; 0\}$.

Відповідно цій фізичній моделі для визначення тепла Джоуля Q і пондеромоторної сили $\vec{F} = \{F_r(r, t); 0; 0\}$, спочатку необхідно визначити в циліндрі відмінну від нуля осьову компоненту H_z вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; 0; H_z(r, t)\}$. Ця компонента є функцією радіальної змінної r та часу t .

Для знаходження функції $H_z(r, t)$ у циліндрі зі співвідношень Максвелла отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (2) розв'язуємо за крайових умов

$$H_z(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z(r_1, t) = H_z^+(t). \quad (3)$$

на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях циліндра.

В момент часу $t = 0$ початкова умова має вигляд

$$H_z(r, 0) = 0. \quad (4)$$

Знайшовши розв'язок початково-крайової задачі (2)-(4), отримуємо вираз компоненти H_z у циліндрі. За знайденою функцією H_z згідно співвідношень Максвелла записуємо вирази питомих густин тепла Джоуля і пондеромоторної сили

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2, \quad (5)$$

$$F_r = \mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \cdot H_z. \quad (6)$$

2. Визначення осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля. Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (2)-(4) апроксимуємо розподіл функції H_z по радіальній змінній кубічним поліномом

$$H_z(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i(t) r^i. \quad (7)$$

Коефіцієнти апроксимаційного полінома (7) подаються у вигляді лінійної комбінації інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ за радіальною змінною

$$H_{zs}(t) = \int_{r_0}^{r_1} H_z(r, t) \cdot r^s dr, \quad s = 1, 2 \quad (8)$$

функції H_z та її граничних значень на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра, тобто

$$a_i(t) = a_{i1} \cdot H_{z1}(t) + a_{i2} \cdot H_{z2}(t) + a_{i3} \cdot H_z^+(t) + a_{i4} \cdot H_z^-(t). \quad (9)$$

Для знаходження інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ функції H_z вихідне рівняння (2) інтегруємо відповідно до формули (8). У результаті перетворень з використанням виразів (7) і (9) отримуємо за часовою змінною t таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dH_1(t)}{dt} - d_1 H_1(t) - d_2 H_2(t) = d_3 H_z^-(t) + d_4 H_z^+(t), \\ \frac{dH_2(t)}{dt} - d_5 H_1(t) - d_6 H_2(t) = d_7 H_z^-(t) + d_8 H_z^+(t). \end{cases} \quad (10)$$

Тут числові коефіцієнти $d_1 \div d_8$ визначаються через електрофізичні характеристики матеріалу циліндра та його геометричні параметри.

Відповідно до початкової умови (4) на інтегральні характеристики $H_{zs}(t)$ отримуємо нульові початкові умови. Застосовуючи до системи (10) інтегральне перетворення Лапласа за часом t , запишемо вирази інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ у вигляді згорток функцій, що описують граничні значення функції H_z на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра і однорідні розв'язки системи (10)

$$H_{zs}(t) = \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[A_{s1}(k)H_z^-(\tau) + A_{s2}(k)H_z^+(\tau) \right] e^{p_k(t-\tau)} d\tau, \quad s=1,2. \quad (11)$$

Тут

$$A_{11}(k) = \frac{(p_k - d_6)d_3 + d_2d_7}{2p_k - (d_1 + d_6)}, \quad A_{12}(k) = \frac{(p_k - d_6)d_4 + d_2d_8}{2p_k - (d_1 + d_6)},$$

$$A_{21}(k) = \frac{(p_k - d_1)d_7 + d_3d_5}{2p_k - (d_1 + d_6)}, \quad A_{22}(k) = \frac{(p_k - d_1)d_8 + d_4d_5}{2p_k - (d_1 + d_6)},$$

де p_k ($k=1,2$) – корені характеристичного рівняння системи (10):

$$p^2 - p(d_1 + d_6) + d_1d_6 + d_2d_5 = 0.$$

Запишемо вираз осрової компоненти $H_z(r,t)$ вектора напруженості магнітного поля у циліндрі

$$H_z(r,t) = \sum_{i=0}^3 \left\{ \sum_{s=1}^2 a_{is} \left(\sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[A_{s1}(k)H_z^-(t) + A_{s2}(k)H_z^+(t) \right] e^{p_k(t-\tau)} d\tau \right) + a_{i3}H_z^-(t) + a_{i4}H_z^+(t) \right\} r^i. \quad (12)$$

3. Визначення тепла Джоуля і пондеромоторної сили за дії електромагнітного імпульса. Підставляючи у формулу (12) замість функцій $H_z^-(t)$ і $H_z^+(t)$ вираз (1), що математично описує дію ЕМІ, отримуємо вираз компоненти $H_z(r,t)$ вектора напруженості магнітного поля у вигляді

$$H_z(r,t) = \frac{kH_0}{2} \sum_{i=0}^2 \left(B_{i1}e^{-\beta_1 t} + B_{i2}e^{-\beta_2 t} + B_{i3}e^{p_1 t} + B_{i4}e^{p_2 t} \right) r^i. \quad (13)$$

Підставляючи вираз (13) у формули (5) і (6) запишемо вирази питомих густин тепла Джоуля $Q(r,t)$ і радіальної компоненти $F_r(r,t)$ пондеромоторної сили в циліндрі

$$Q(r, t) = \frac{1}{\sigma} \frac{k^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 i j \sum_{l=1}^{10} C_{ijl} e^{\alpha_l t} r^{i+j-2}, \quad (14)$$

$$F(r, t) = \mu \frac{k^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 i \sum_{l=1}^{10} C_{ijl} e^{\alpha_l t} r^{i+j-1}. \quad (15)$$

Тут: вирази B_{is} ($i = \overline{0, 2}$, $s = \overline{1, 4}$), C_{ijl} , ($i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$, $l = \overline{1, 10}$), α_l ($l = \overline{1, 10}$) залежать від геометричних параметрів циліндра, параметрів β_1 і β_2 електромагнітного імпульса та електрофізичних характеристик σ , μ матеріалу циліндра.

4. Комп'ютерний аналіз тепла Джоуля і пондеромоторної сили.

Обчислення проводили для циліндра з радіусами циліндричних поверхонь $r_0 = 0.009m$, $r_1 = 0.011m$. Час тривалості t_i ЕМІ приймали рівним $t_i = 10^{-4}s$. За матеріал циліндра вибрали мідь [9]. Обчислено зміни в

часі осової компоненти $\frac{H_z(r, t)}{H_0}$ вектора напруженості магнітного

поля, тепла Джоуля $\frac{Q(r, t)}{H_0^2}$ і радіальної компоненти $\frac{F_r(r, t)}{H_0^2}$ вектора

пондеромоторної сили $\vec{F} = \{F_r(r, t); 0; 0\}$ на зовнішніх і серединній поверхнях циліндра та розподіли цих величин по товщині циліндра.

На рис. 1 показано зміну в часі функції $\frac{H_z(r, t)}{H_0}$ на зовнішніх поверхнях циліндра (лінія 1) та на його серединній поверхні (лінія 2).

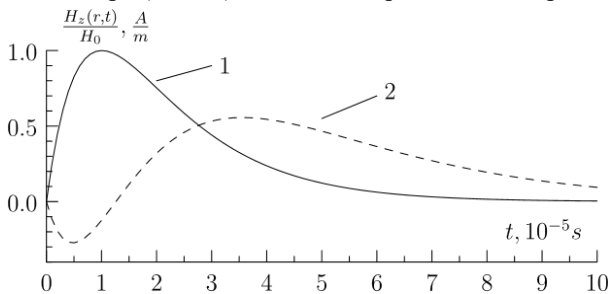


Рис. 1. Зміна в часі функції $\frac{H_z(r, t)}{H_0}$ на зовнішній поверхні (лінія 1) та на серединній поверхні циліндра (лінія 2)

Розподіл функції $\frac{H_z(r,t)}{H_0}$ по товщині циліндра в моменти часу

$$t = 0,1t_i; \quad t = 0,25t_i; \quad t = 0,05t_i.$$

(лінії 1-3) зображено на рис. 2.

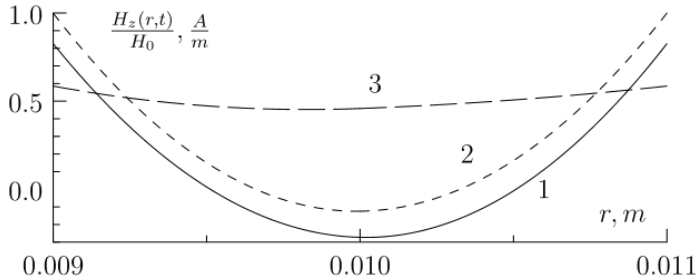


Рис. 2. Розподіл функції $\frac{H_z(r,t)}{H_0}$

по товщині циліндра в моменти часу
 $t = 0,05t_i; \quad t = 0,1t_i; \quad t = 0,25t_i$ (лінії 1-3)

На рис. 3а, 3б показано зміну в часі тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях циліндра та на його серединній поверхні. Лінії 1, 2 на рис. 3а відповідають значенню тепла Джоуля на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра.

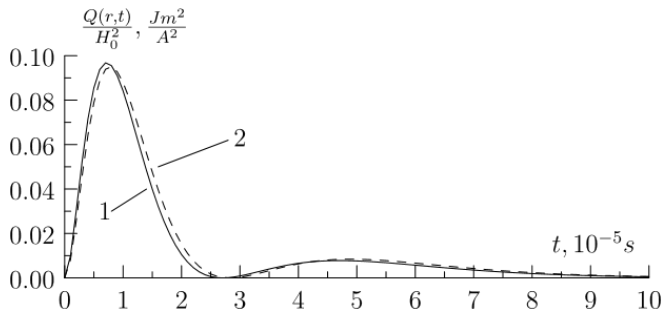


Рис. 3а. Зміна в часі тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$

на внутрішній $r = r_0$ (лінія 1)
 і зовнішній $r = r_1$ (лінія 2) поверхнях циліндра

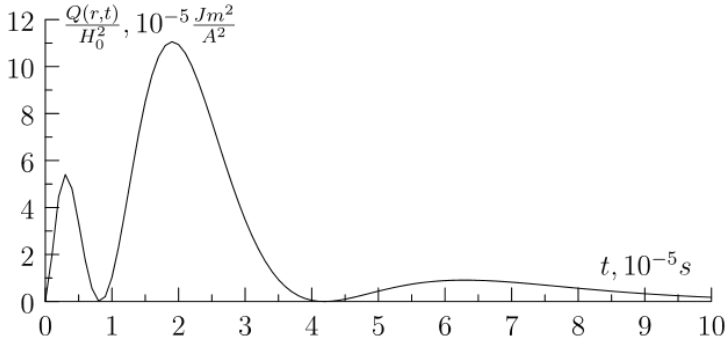


Рис. 3б. Зміна в часі тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$
 на серединній $r = r^*$ поверхні циліндра

Розподіл тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$ по товщині циліндра в моменти часу $t = 0, 1t_i$; $t = 0,05t_i$; $t = 0,25t_i$ показано на рис. 4.

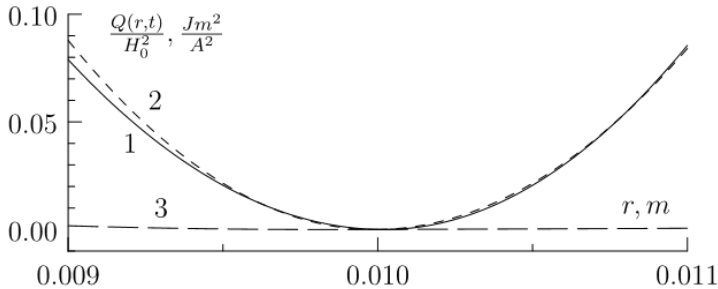


Рис. 4. Розподіл тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$
 по товщині циліндра в моменти часу
 $t = 0,05t_i$; $t = 0,1t_i$; $t = 0,25t_i$ (лінії 1-3)

На рис. 5а, 5б показано зміну в часі пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях циліндра та на його серединній $r = r^*$ поверхні. Лінії 1, 2 на рис. 5а відповідають значенню пондеромоторної сили на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра.

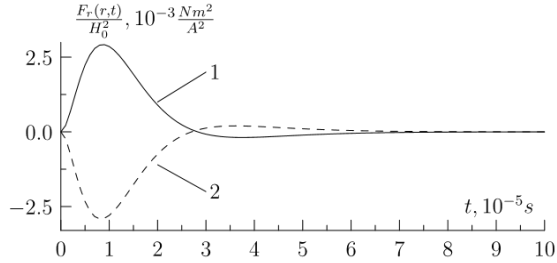


Рис. 5а. Зміна в часі пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ на внутрішній (лінія 1) і зовнішній (лінія 2) поверхнях циліндра

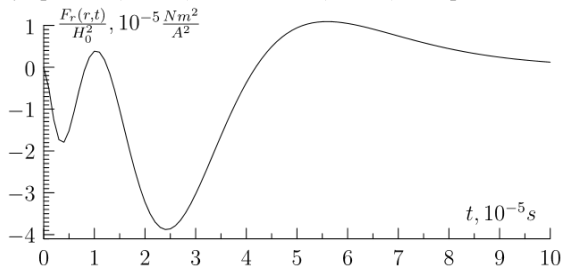


Рис. 5б. Зміна в часі пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ на серединній поверхні циліндра

Розподіл пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ по товщині циліндра в моменти часу $t = 0,05t_i$; $t = 0,1t_i$; $t = 0,25t_i$ показано на рис. 6.

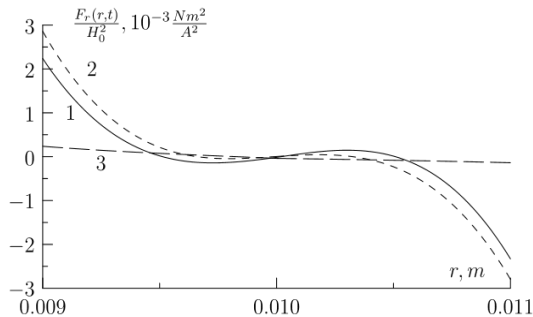


Рис. 6. Розподіл пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ по товщині циліндра в моменти часу $t = 0,05t_i$; $t = 0,1t_i$; $t = 0,25t_i$ (лінії 1-3)

У результаті досліджень проілюстрованих на рис. 1-6 встановлено такі закономірності.

1. Значення функції $\frac{H_z(r,t)}{H_0}$ на серединній поверхні циліндра приблизно в два рази менше за її значення на його зовнішніх поверхнях.
2. Розподіл функції $\frac{H_z(r,t)}{H_0}$ по товщині циліндра в моменти часу дії ЕМІ, що відповідають часу фронту його наростання має симетричний (квадратичний) розподіл. У момент часу, що дорівнює половині часу фронту спадання ЕМІ розподіл функції $\frac{H_z(r,t)}{H_0}$ близький до рівномірного, а сама функція приймає значення приблизно вдвічі менші.
3. Тепло Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$, що виникає в циліндрі за дії ЕМІ має характер двох послідовних теплових імпульсів. Перший з них відповідає зміні на протязі часу фронту наростання ЕМІ, а другий – зміні на протязі часу фронту спадання. Максимальні значення тепла Джоуля на серединній поверхні циліндра приблизно в 1000 разів менші за його значення на зовнішніх поверхнях циліндра.
4. Розподіл тепла Джоуля $\frac{Q}{H_0^2}$ має симетричний характер по товщині циліндра суттєво нелінійний (квадратичний) в моменти часу, що відповідають фронту наростання ЕМІ і близький до рівномірного на середині фронту спадання ЕМІ.
5. Максимальне значення стискальної пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ на серединній поверхні приблизно у 100 разів менше за таке ж значення на зовнішній поверхні, а максимальне розтягальне значення на цій поверхні приблизно у 200 разів менше за таке ж розтягальне значення на внутрішній поверхні циліндра.
6. Розподіл пондеромоторної сили $\frac{F_r}{H_0^2}$ по товщині циліндра має антисиметричний характер, близький до кубічної параболи. Відповідно її максимальні значення, які досягаються в моменти часу, що відповідають фронту наростання ЕМІ на два порядки більші за такі ж її значення в моменти часу, що відповідають фронту спадання ЕМІ.

Крім приведених на рис. 1-6 результатів дослідження тепла Джоуля і пондеромоторної сили для порожнистого мідного циліндра з радіусами внутрішньої $r_0 = 0,009m$, серединної $r^* = 0,010m$ і зовнішньої $r_1 = 0,011m$ поверхонь (товщина циліндра $h = 0,002m$) виконано також числові дослідження розглядуваних величин і для мідних циліндрів з таким же радіусом серединної поверхні $r^* = 0,010m$, але з товщинами $h = 0,001m$ ($r_0 = 0,0095m$; $r_1 = 0,0105m$) та $h = 0,003m$ ($r_0 = 0,0085m$; $r_1 = 0,0115m$). Результати виконаних числових досліджень для порожнистих мідних циліндрів з радіусом серединної $r^* = 0,010m$ поверхні і товщинами $h = 0,001m$; $h = 0,002m$; $h = 0,003m$ подано у вигляді таких таблиць максимальних значень досліджуваних величин на зовнішній поверхні циліндра залежно від значення величини H_0 напруженості магнітного поля, створюваного дією ЕМІ.

Таблиця 1

Товщина циліндра $h = 0,001m$

H_0 , A/m	max Q , J	max F_r , N
10^3	161 KJ	3.5 KN
10^4	16.1 MJ	350 KN
10^5	161 MJ	35 MN
10^6	161 GJ	35 GN
10^7	16.1 TJ	350 GN

Таблиця 2

Товщина циліндра $h = 0,002m$

H_0 , A/m	max Q , J	max F_r , N
10^3	97 KJ	3 KN
10^4	9.7 MJ	300 KN
10^5	970 MJ	30 MN
10^6	97 GJ	3 GN
10^7	9.7 TJ	300 GN

Таблиця 3

Товщина циліндра $h = 0,003m$

H_0 , A/m	max Q , J	max F_r , N
10^3	57 KJ	2.8 KN
10^4	5.7 MJ	280 KN
10^5	570 MJ	28 MN
10^6	57 GJ	28 GN
10^7	5.7 TJ	280 GN

Дані таблиці дають можливість оцінити максимальні значення тепла Джоуля (у Джоулях) і пондеромоторної сили (у Ньютонах), які виникають у розглядуваних порожнистих мідних циліндрах за дії ЕМІ тривалістю $t_i = 10^{-4} s$ залежно від величини H_0 напруженості магнітного поля, створюваного дією ЕМІ.

Зауважимо, що у проаналізованих трьох випадках серединна поверхня циліндрів однакова, але їх товщина різна.

Виявлено, що зі збільшенням товщини порожнистого циліндра при фіксованому радіусі серединної поверхні максимальні значення тепла Джоуля і пондеромоторної сили зменшуються (приблизно в 0,6 разів) при збільшенні товщини циліндра на величину 0,001m.

Висновки. Сформульовано початково-крайову задачу електродиніміки для довгого порожнистого неферромагнітного електропровідного циліндра за дії нестационарного електромагнітного поля. Для побудови її розв'язку використано кубічну апроксимацію за радіальною змінною осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля. У результаті вихідна початково-крайова задача на визначальну функцію зведена до задачі Коші на інтегральні характеристики цієї функції. З використанням перетворення Лапласа за часовою змінною отримано загальні розв'язки задачі Коші і вихідної задачі для визначальної функції. На основі загальних розв'язків записано розв'язок вихідної початково-крайової задачі за дії ЕМІ, а також вирази тепла Джоуля і пондеромоторної сили.

Проведено комп'ютерний аналіз зміни в часі осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля тепла Джоуля і пондеромоторної сили та розподілів цих величин по товщині циліндра залежно від його геометричних параметрів в моменти часу, що відповідають фронту наростання і фронту спадання ЕМІ.

Побудовано таблиці максимальних значень тепла Джоуля і пондеромоторної сили для мідних порожнистих циліндрів з однаковим радіусом серединних поверхонь і різними товщинами залежно від величини напруженості магнітного поля.

Виявлені нові закономірності нагріву і поведінки пондеромоторної сили мідних порожнистих циліндрів є науковою основою для прогнозування термосилової поведінки трубчастих мідних елементів, що піддаються технологічній обробці електромагнітними імпульсами.

Список використаних джерел:

1. Asai S. *Electromagnetic Processing of Materials*. Springer, Netherlands. 2012.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. *Handbook of induction heating*. CRC press. 2017.
3. Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Himenko L. T. *Impulse magnetic fields for advanced technologies*. Harkov: MOST-Tornado Publ., 2003, 288 p.

4. Batygin Y. V., Chaplygin E. A., Sabokar O. S. Magnetic pulsed processing of metals for advanced technologies of modernity – a brief review. *Electrical Engineering & Electromechanics*. 2016. Vol. 5. P. 35-39.
5. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Fields Generation. Walter De Gruyter Incorporated. 2014. 439 p.
6. Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and their Applications. *Topics in Applied Physics* / editor: F. Herlach. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer Verlag, 1985. Vol. 67. 362 p.
7. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. Львів: Видавництво «Растр-7», 2010. 216 с.
8. Hachkevych O. R., Musii R. S., Melnyk N. B., Dmytruk V. A. Dynamic thermoelastic processes in a conductive plate under the action of electromagnetic pulses of microsecond and nanosecond durations. *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42 (9). P. 1110-1122.
9. Thompson M. Base Metals Handbook. Cambridge: Woodhead Publishing, 2006.

References:

1. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands. 2012.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. *CRC press*. 2017.
3. Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Himenko L. T. Impulse magnetic fields for advanced technologies. Harkov: MOST-Tornado Publ., 2003, 288 p.
4. Batygin Y. V., Chaplygin E. A., Sabokar O. S. Magnetic pulsed processing of metals for advanced technologies of modernity – a brief review. *Electrical Engineering & Electromechanics*. 2016. Vol. 5. P. 35-39.
5. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Fields Generation. Walter De Gruyter Incorporated. 2014. 439 p.
6. Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and their Applications. *Topics in Applied Physics* / editor: F. Herlach. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer Verlag, 1985. Vol. 67. 362 p.
7. Musii R. S. Dynamichni zadachi termomekhaniky elektroprovodnykh til kanonichnoi formy. Lviv: Vydavnytstvo «Rastr-7», 2010. 216 p.
8. Hachkevych O. R., Musii R. S., Melnyk N. B., Dmytruk V. A. Dynamic thermoelastic processes in a conductive plate under the action of electromagnetic pulses of microsecond and nanosecond durations. *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42 (9). P. 1110-1122.
9. Thompson M. Base Metals Handbook. Cambridge: Woodhead Publishing, 2006.

DETERMINATION AND ANALYSIS OF JOULE HEAT AND PONDEROMOTIVE FORCE IN A HOLLOW COPPER CYLINDER UNDER THE ACTION OF AN ELECTROMAGNETIC IMPULSE

A physical-mathematical model is proposed for determining and analyzing the patterns of Joule heat and ponderomotive force behavior in a non-ferromagnetic, long, hollow, electrically conductive cylinder under a homogeneous, transient electromagnetic field. An electrodynamic problem

is formulated to obtain the determining function – the axial component of the magnetic field intensity vector. An initial-boundary value problem in electrodynamics has been formulated to determine the defining function – the axial component of the magnetic field intensity vector. The initial relations for determining the specific heat densities of Joule heat and the ponderomotive force are derived. These two physical factors arise in the cylinder due to the flow of induced currents and the interaction of these currents with an external non-stationary electromagnetic field. We used a cubic approximation for the distribution of the defining function along the radial coordinate to find the determining function. The coefficients of the cubic approximation polynomial are expressed as a linear combination of the integral characteristics of the determining function with respect to the radial variable and its boundary values on the inner and external surfaces of the cylinder. As a result, the initial-boundary value problem for the determining function is reduced to a Cauchy problem for its integral characteristics. The solution to the Cauchy problem is obtained using the Laplace integral transform with respect to time. We found the expressions for the axial component of the magnetic field intensity vector and for the specific densities, Joule heat, and ponderomotive force under the action of a single electromagnetic impuls. For a hollow copper cylinder, the time evolution of the above quantities and their distributions along the thickness of the cylinder have been numerically analyzed. It has been established that the maximum values of the Joule heat and the radial component of the ponderomotive force vector on the mid-surface of the cylinder are approximately 1000 and 100 times smaller, respectively, than their values on the external surfaces of the cylinder. We found that as the thickness of the hollow cylinder under consideration increases – while the radius of its mid-surface remains constant – the maximum values of the Joule heat and the ponderomotive force decrease (by approximately a factor of 0.6) for every one-millimeter increase in the cylinder's thickness.

Key words: *hollow conductive cylinder, electromagnetic impulse, axial component of the magnetic field intensity vector, Joule heating, ponderomotive force.*