УДК 517.938
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.105-114

Нікітін А. В.

ORCID: 0000-0001-5137-0114,
д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний університет «Острозька академія», м. Острог, Україна,
E-mail: anatolii.nikitin@oa.edu.ua

Шведюк В. В.

ORCID: 0009-0002-2906-0958,
аспірант, Національний університет «Острозька академія», м. Острог, Україна,
E-mail: volodymyr.v.shvediuk@oa.edu.ua

СТІЙКІСТЬ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ ТА УСЕРЕДНЕНОЇ СИСТЕМ РАДІОФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У МІКРОКОНТРОЛЕРНИХ СИСТЕМАХ БПЛА

У статті проведено теоретичне дослідження та математичне моделювання стійкості складних радіофізичних процесів, що протікають у мікроконтролерних системах керування сучасних БПЛА. Актуальність роботи зумовлена необхідністю забезпечення стабільної роботи бортової електроніки в умовах інтенсивних електромагнітних завад та нестаціонарних навантажень. Об'єктом дослідження є вектори стану, що включають амплітуду сигналу, фазу несучої та рівень напруги живлення мікроконтролера.

Наукова новизна роботи полягає у застосуванні принципу усереднення для аналізу еволюційних систем із швидкими марковськими переключеннями. Такий підхід дозволив перейти від складних стохастичних моделей до еквівалентної детермінованої системи, що оперує усередненими за стаціонарним розподілом параметрами: коефіцієнтом затухання, миттєвою частотою та інтенсивністю втрат у колі живлення.

У роботі використано комплекс методів теорії стійкості лінійних систем. Шляхом аналізу власних значень матриці коефіцієнтів встановлено необхідні умови стабілізації процесів. За допомогою побудови квадратичної функції Ляпунова виведено оригінальну достатню умову асимптотичної стійкості усередненої системи, яка враховує перехресний зв'язок між каналами амплітуди та енергозабезпечення. Встановлено критичний поріг інтенсивності цього зв'язку, перевищення якого

Стаття надійшла до редакції: 10.05.2026
Рекомендовано до друку: 27.05.2026
Оприлюднено (online): 29.05.2026

веде до втрати стійкості системи навіть при стабільності її окремих компонентів.

Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування при розробці алгоритмів фільтрації та стабілізації напруги в системах автопілотування БПЛА. Запропоновані аналітичні залежності дозволяють на етапі проектування оптимізувати параметри апаратних фільтрів та програмних засобів захисту мікроконтролера від збоїв, спричинених флуктуаціями радіосигналу та навантаження двигунів.

Ключові слова: *БПЛА, стійкість детермінованої системи, власні значення, метод Ляпунова, радіофізичні процеси, мікроконтролер, простір станів.*

Вступ. Безпілотні літальні апарати (БПЛА) є складними системами, де мікроконтролер (МК) виступає центральним вузлом керування. Надійне функціонування МК визначається стабільністю радіофізичних процесів – насамперед амплітуди та фази сигналів, а також рівня напруги живлення. У реальних умовах на ці процеси впливають тягова система, електромагнітні завади та нестаціонарні навантаження, що спонукає до побудови математичних моделей відповідної складності.

Перш ніж переходити до стохастичного аналізу, необхідно дослідити стійкість детермінованії моделі. Саме детермінована лінійна система диференціальних рівнянь у просторі станів є базовою конструкцією, на якій надалі будуються стохастичні розширення. Без розуміння власних значень матриці коефіцієнтів та умов стійкості нульового розв'язку неможливо коректно інтерпретувати стохастичні параметри – коефіцієнт релаксації α та інтенсивність дифузії σ – отримані при експериментальній ідентифікації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія стійкості лінійних систем диференціальних рівнянь є класичним розділом математичного аналізу. Фундаментальні результати щодо стійкості за Ляпуновим [1] та методу першого наближення [2] становлять базу для аналізу динаміки будь-яких інженерних систем. Класифікація особливих точок лінійних систем та поведінки фазових кривих детально розглянута у навчальній літературі [3].

Детерміністичні моделі динаміки сигналів у просторі станів застосовуються в роботах із синтезу систем керування польотом. Перехід від детерміністичної моделі до стохастичної з марківськими переключеннями та дифузійним наближенням висвітлений у монографіях [4, 5]. Попередньою умовою коректності таких розширень є забезпечення стійкості детермінованої базової моделі, чому в прикладній літературі приділяється недостатньо уваги.

Мета дослідження. Мета роботи – дослідження умов стійкості нульового розв'язку детермінованої лінійної системи диференціальних рівнянь, що моделює еволюцію радіофізичних процесів (амплітуди сигналу, фази та напруги живлення) у МК системах БПЛА з метою подальшого застосування результатів для підвищення завадостійкості керуючих систем БПЛА. Для досягнення мети застосовуються: аналіз власних значень матриці коефіцієнтів, метод першого наближення та метод функцій Ляпунова.

Постановка задачі. Детермінована модель у просторі станів. Еволюція радіофізичних процесів у МК системі БПЛА описується вектором стану:

$$u(t) = \left(As(t), \varphi(t), P(t)\right)^T, \tag{1}$$

де $As(t)$ – амплітуда сигналу, $\varphi(t)$ – фаза несучої, $P(t)$ – рівень напруги живлення МК. Еволюція вектора стану визначається лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{du(t)}{dt} = Cu(t), \tag{2}$$

де матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \omega(t) & 0 \\ \beta(t) & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Тут $\alpha(t) > 0$ – коефіцієнт затухання амплітуди сигналу, $\omega(t)$ – миттєва кутова частота несучої, $\gamma(t)$ – коефіцієнт втрат потужності, $\beta(t)$ – коефіцієнт зв'язку між амплітудою та потужністю.

Математична модель системи з випадковими збуреннями у схемі усереднення. Для врахування впливу зовнішніх завад та нестаціонарних режимів роботи БПЛА, розглянемо еволюційну систему з випадковими збуреннями у схемі серій з малим параметром

$$\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0): \ \frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} = C\left(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon)\right), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

де $u^{\varepsilon}(t)$ – вектор стану системи, а $x(t)$ – зовнішні збурення, що описуються рівномірно ергодичним марковським процесом у фазовому просторі $(X, \mathcal{F})$ з генератором Q. Згідно з принципом усереднення, при $\varepsilon \to 0$ траєкторія збуреної системи $u^{\varepsilon}(t)$ слабко збігається до граничної еволюції $u^0(t)$, яка визначається розв'язком детермінованого усередненого рівняння:

$$\frac{du^0(t)}{dt} = \hat{C}\left(u^0(t)\right), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

де усереднена функція швидкості (матриця коефіцієнтів) визначається інтегралом за стаціонарним розподілом $\pi(dx)$ марковського процесу

$$x(t):\ \hat{C}(u) = \int_X \pi(dx) C(u;x). \tag{6}$$

У нашому випадку матриця $C(u;x)$ залежить від випадкового стану середовища x, який змінює фізичні параметри системи: $\alpha(x), \omega(x), \gamma(x)$ та $\beta(x)$. Усереднена матриця $\hat{C}$ зберігає блочно-трикутну структуру:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega} & 0 \\ \hat{\beta} & 0 & \hat{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\hat{\alpha} = \int_X \alpha(x)\pi(dx), \hat{\gamma} = \int_X \gamma(x)\pi(dx)$ тощо. Таким чином, дослідження стійкості системи з випадковими переключеннями у схемі усереднення зводиться до аналізу детермінованої системи з усередненими параметрами.

Аналіз власних значень матриці C. Умови стійкості розв'язків лінійної однорідної системи $\dot{u} = \hat{C}u$ зі сталою матрицею $\hat{C}$ визначаються її власними значеннями λ_i. Нульовий розв'язок є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли всі власні значення мають від'ємну дійсну частину: $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ для всіх $i = 1,2,3$.

Характеристичне рівняння $\det(\hat{C} - \lambda I) = 0$ для блочно-трикутної матриці $\hat{C}$ розкладається у добуток:

$$(-\hat{\alpha} - \lambda)(\hat{\omega} - \lambda)(\hat{\gamma} - \lambda) = 0. \tag{8}$$

Для усередненої системи (5) власні значення прямо залежать від усереднених характеристик марковського процесу:

$$\lambda_1 = -\hat{\alpha}. \tag{9}$$

Умова $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ виконується при $\hat{\alpha} > 0$, що відповідає наявності затухання в амплітудному каналі $\lambda_2 = \hat{\omega}$. Оскільки параметр $\hat{\omega}$ описує частотну компоненту (фазовий зсув), він зазвичай є суто уявним у комплексному просторі станів або відповідає консервативному обертанню. Для стійкості енергетичних параметрів цей член не повинен призводити до експоненціального зростання $\lambda_3 = \hat{\gamma}$.

Умова $\mathrm{Re}(\lambda_3) < 0$ виконується при $\hat{\gamma} < 0$, що відповідає фізичній дисипації енергії у колі живлення мікроконтролера. Отже, необхідною умовою асимптотичної стійкості системи є $\hat{\alpha} > 0$ та $\hat{\gamma} < 0$. Це означає, що система здатна самостійно повертатися до стану рівноваги після зовнішніх збурень, якщо в обох каналах (інформаційному та енергетичному) переважають процеси втрат та затухання. Характерну динаміку перехідних процесів за виконання цих умов проілюстровано на рис. 1.

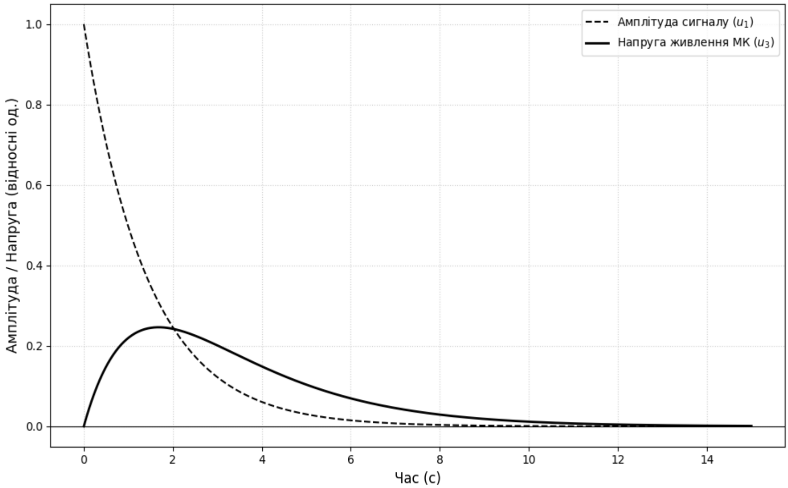

Рис. 1. *Динаміка перехідних процесів у детермінованій системі МК БПЛА: згасання амплітуди сигналу $u_1(t)$ та відповідна стабілізація напруги живлення $u_3(t)$ при виконанні умов стійкості $\alpha > 0, \gamma < 0$*

Метод першого наближення. Метод першого наближення застосовується для аналізу нелінійних або нестаціонарних систем у малому околі точки рівноваги. Нехай u^* – стаціонарна точка системи. Для лінійної системи матриця першого наближення збігається з матрицею C, а єдина точка рівноваги – $u^* = 0$.

Розглянемо числовий приклад для системи з параметрами $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $|\gamma_0| = \alpha_0$:

$$\alpha = \alpha^0, \gamma = -\alpha^0, \omega = i \cdot 2\pi f^0, \beta = 0. \tag{10}$$

Власні значення: $\lambda_1 = -\alpha_0$, $\lambda_2 = \mathrm{i} \cdot 2\pi f_0$, $\lambda_3 = -\alpha_0$. Нульовий розв'язок стійкий ($\mathrm{Re}(\lambda_{1,3}) < 0$), компонента фази – нейтрально стійка. Відповідні часові залежності наведено на рис. 2.

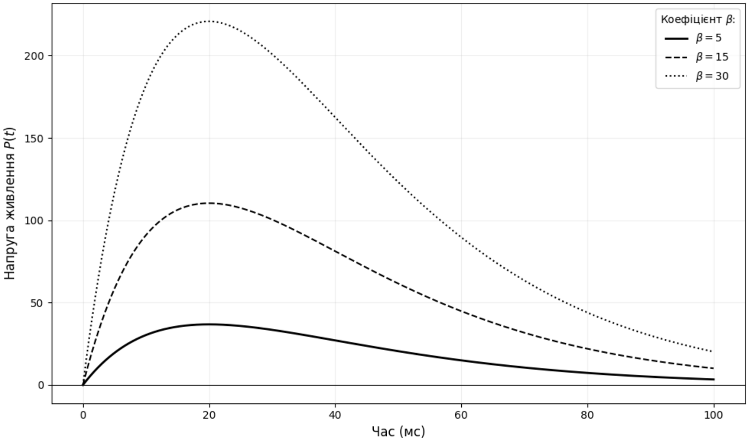

Рис. 2 *Вплив коефіцієнта зв'язку* β *на стабілізацію напруги при* $\alpha_0 = |\gamma_0|$

Метод функцій Ляпунова. Для встановлення достатніх умов асимптотичної стійкості усередненої системи застосуємо прямий метод Ляпунова. Побудуємо додатно визначену квадратичну функцію Ляпунова у вигляді:

$$V(u) = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) = \frac{1}{2}|u|^2. \tag{11}$$

Похідна цієї функції вздовж траєкторій усередненої системи визначається виразом:

$$\dot{V}(u) = u, \hat{C}u = u, \frac{\hat{C} + C^T}{2}u. \tag{12}$$

Для асимптотичної стійкості необхідно, щоб симетрична частина матриці коефіцієнтів $C_{sym} = \left(\hat{C} + C^T\right)/2$ була від'ємно визначеною. Структура цієї матриці має вигляд:

$$\frac{\hat{C} + C^T}{2} = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha} & 0 & \hat{\beta}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{\beta}/2 & 0 & \hat{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Згідно з критерієм Сильвестра, від'ємна визначеність цієї матриці (за виключенням консервативної фазової компоненти u_2) гарантується при виконанні умов:

$$\hat{\alpha}|\hat{\gamma}| > \frac{\hat{\beta}^2}{4}$$

Отримана нерівність $\hat{\alpha}\left|\hat{\gamma}\right| > \dfrac{\hat{\beta}^2}{4}$ встановлює фундаментальне обмеження на допустимий коефіцієнт зв'язку між амплітудним та енергетичним каналами мікроконтролерної системи. Фізичний зміст цієї умови полягає в тому, що для збереження стійкості системи в схемі усереднення інтенсивність взаємодії каналів $(\hat{\beta})$ повинна повністю нівелюватися сумарною дисипацією в обох підсистемах α та $\hat{\gamma}$. Геометричну інтерпретацію еволюції функції Ляпунова та візуалізацію області стійкості в просторі параметрів наведено на рис. 3.

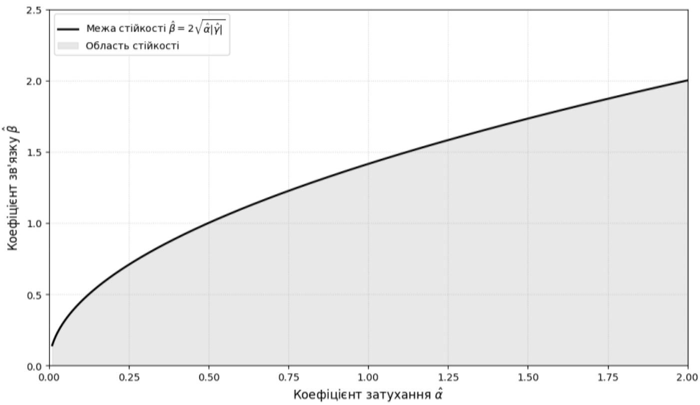

Рис. 3. *Область асимптотичної стійкості усередненої системи в просторі параметрів* $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ *при фіксованому* $\hat{\gamma}$

На рис. 3 візуалізовано область асимптотичної стійкості усередненої системи в площині параметрів $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ при фіксованому значенні коефіцієнта втрат у колі живлення $\hat{\gamma}$. Крива, що обмежує заштриховану область, відповідає критичному значенню коефіцієнта зв'язку $\hat{\beta} = 2\sqrt{\hat{\alpha}}\left|\hat{\beta}\right|$, отриманому з критерію Сильвестра для від'ємної визначеності матриці Ляпунова. Математично це означає, що для двовимірної підсистеми $\left(A_s, P\right)$ з матрицею $A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, характер поведінки фазових траєкторій визначається власними значеннями $\lambda_1 = -\alpha$ та $\lambda_2 = \gamma$. Стійкий вузол спостерігається при $\alpha \neq |\gamma|$, коли обидва корені є дійсними, від'ємними та різними. Стійкий вироджений вузол виникає у випадку кратного кореня $\alpha = |\gamma|$. Фізичний зміст зображеної залежності полягає у тому, що при збільшенні коефіцієнта затухання в амплітудному каналі $\hat{\alpha},$ система стає здатною витримувати значно вищі рівні паразитного зв'язку $\hat{\beta}$ без втрати стійкості. Проте, вихід за межі заштрихованої області (верхня частина графіка) призводить до того, що дисипативні властивості окремих каналів уже не можуть компенсувати їхню взаємну дестабілізуючу дію, що спричиняє зростання амплітуди коливань напруги живлення МК.

У реальних умовах польоту параметри системи $\alpha(x)$ та $\gamma(x)$ можуть миттєво набувати значень, що не задовольняють умовам стійкості (наприклад, при різких стрибках споживання струму сервоприводами). Проте, завдяки ергодичності марковського процесу збурень, система зберігає загальну працездатність, якщо баланс усереднених характеристик залишається в межах визначеної норми (див. рис. 4).

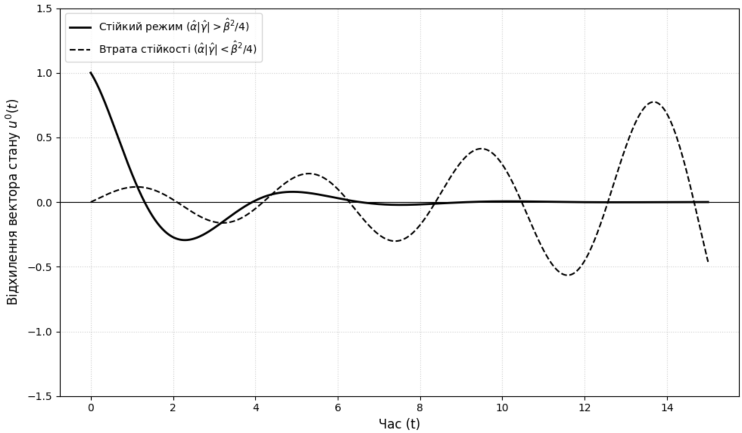

Рис. 4. *Динаміка усередненої системи БПЛА при різних значеннях зв'язку*

Коефіцієнт $\hat{\beta}$ у моделі відіграє роль паразитного зв'язку. У мікроконтролерних системах БПЛА це може відповідати просіданню напруги живлення при посиленні передавального сигналу або наведенням від силових ланцюгів на аналогові входи МК. Отримана нерівність дає інженерам чіткий критерій: для забезпечення стійкості необхідно або збільшувати дисипацію в системі (фільтрація, стабілізація напруги – параметри $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$), або мінімізувати взаємний вплив каналів (екранування, розв'язка живлення – параметр $\hat{\beta}$).

Перспективи подальших досліджень полягають у переході від схеми усереднення до дифузійної апроксимації, що дозволить оцінити не лише середні значення, а й величину відхилень (флуктуацій) від усередненої траєкторії, що є критичним для прецизійних сенсорів БПЛА.

Висновки. У роботі проведено комплексне дослідження стійкості радіофізичних процесів у мікроконтролерних системах БПЛА для детермінованого випадку та в схемі усереднення. На основі проведеного аналізу отримано наступні результати:

Застосовано принцип усереднення для опису еволюції системи в умовах швидких марковських збурень. Показано, що гранична детермінована система оперує усередненими характеристиками $\hat{\alpha}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$, що дозволяє нівелювати вплив короткочасних флуктуацій.

Шляхом аналізу власних значень матриці коефіцієнтів $\hat{C}$. встановлено необхідні умови асимптотичної стійкості усередненої системи $\left(\hat{\alpha} > 0, \hat{\gamma} < 0\right)$ що фізично відповідає переважанню процесів дисипації енергії над збуреннями.

За допомогою методу функцій Ляпунова виведено достатню умову стійкості у формі нерівності $\alpha|\gamma| > \beta^2 / 4$. Встановлено, що стійкість системи суттєво залежить від усередненого коефіцієнта зв'язку між амплітудним та енергетичним каналами: перевищення критичного порогу взаємодії $\hat{\beta}$ може призвести до дестабілізації навіть при стійкості окремих підсистем.

Отримані аналітичні залежності мають практичне значення для проектування алгоритмів керування БПЛА, оскільки дозволяють визначити допустимі межі параметрів кіл живлення та завадостійкості приймо-передавальних модулів у складних електромагнітних умовах.

Список використаних джерел:

1. Мартинюк А. А. Стійкість руху: метод функцій Ляпунова. Київ: Наукова думка, 2012. 320 с.
2. Колянова Т. В. Динаміка популяційних систем: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2016. 104 с.
3. Боголюбов М. М., Митропольський Ю. О., Самойленко А. М. Метод усереднення в нелінійній механіці. Київ: Наукова думка, 2003. 410 с.
4. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. *World Scientific.* 2005. 330 p. DOI: https://doi.org/10.1142/5979.
5. Chabanyuk Y. M., Nikitin A. V., Khimka U. T. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. London: Wiley-ISTE, 2020. 240 p. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119779759.
6. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823-841. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823.

References:

1. Martyniuk A. A. Stiikist rukhu: metod funktsii Liapunova. Kyiv: Naukova dumka, 2012. 320 s.
2. Kolianova T. V. Dynamika populiatsiinykh system: navchalnyi posibnyk. Kyiv: KNU imeni Tarasa Shevchenka, 2016. 104 s.

3. Boholiubov M. M., Mytropolskyi Yu. O., Samoilenko A. M. Metod userednennia v neliniinii mekhanitsi. Kyiv: Naukova dumka, 2003. 410 s.
4. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. *World Scientific*. 2005. 330 p. DOI: https://doi.org/10.1142/5979.
5. Chabanyuk Y. M., Nikitin A. V., Khimka U. T. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. London: Wiley-ISTE, 2020. 240 p. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119779759.
6. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823-841. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823.

STABILITY OF DETERMINISTIC AND AVERAGED SYSTEMS OF RADIOPHYSICAL PROCESSES IN UAV MICROCONTROLLER SYSTEMS

The article presents a theoretical study and mathematical modeling of the stability of complex radiophysical processes occurring in microcontroller control systems of modern UAVs. The relevance of the work is due to the need to ensure stable operation of on-board electronics in conditions of intense electromagnetic interference and non-stationary loads. The object of the study is state vectors, which include the signal amplitude, carrier phase and microcontroller supply voltage level.

The scientific novelty of the work lies in the application of the averaging principle to the analysis of evolutionary systems with fast Markov switching. This approach allowed us to move from complex stochastic models to an equivalent deterministic system that operates with parameters averaged over a stationary distribution: damping coefficient, instantaneous frequency and intensity of losses in the power supply circuit.

The work uses a set of methods from the theory of stability of linear systems. By analyzing the eigenvalues of the coefficient matrix, the necessary conditions for process stabilization were established. Using the construction of the quadratic Lyapunov function, an original sufficient condition for the asymptotic stability of the averaged system was derived, which takes into account the cross-coupling between the amplitude and energy supply channels. A critical threshold of the intensity of this coupling was established, exceeding which leads to the loss of system stability even with the stability of its individual components.

The results obtained have direct practical application in the development of filtering and voltage stabilization algorithms in UAV autopilot systems. The proposed analytical dependencies allow at the design stage to optimize the parameters of hardware filters and software means of protecting the microcontroller from failures caused by fluctuations in the radio signal and engine load.

Key words: *UAV, stability of deterministic system, eigenvalues, Lyapunov functions, radiophysical processes, microcontroller, state space.*