УДК 517.929
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.63-71

Жолтовський О. О.

ORCID: 0009-0009-9245-1725,
аспірант, Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна,
E-mail: olekszholt@gmail.com

Черевко І. М.

ORCID: 0000-0002-2690-2091,
д-р фіз-мат. наук, професор, Чернівецький національний
університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна,
E-mail: i.cherevko@chnu.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

У даній роботі наведено алгоритми знаходження наближених розв'зків лінійних крайових задач із запізненням, оскільки знаходження точних розв'язків таких задач можливе тільки в найпростіших випадках.

У науковій літературі для наближеного розв'язання крайових задач із запізненням запропоновані методи колокацій, проекційно-ітераційні та чисельно-аналітичні алгоритми, які є достатньо складними для їх реалізації з використанням інформаційних технологій. При цьому слід враховувати, що розв'язки крайових задач із запізненням можуть мати розриви похідних, що ускладнює використання скінченно-різницевих методів.

Застосування методу сплайн-функцій виявилося ефективним підходом для наближеного знаходження розв'язків крайових задач із запізненням. У роботі розглянуто дві схеми застосування методу сплайн-функції: використання базисних кубічних сплайнів; ітераційна схема за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2.

Перша схема адаптована для наближення гладких розв'язків крайових задач із запізненням, а друга схема дозволяє врахувати можливі розриви похідних розв'язку.

Для числового моделювання крайових задач для лінійних диференціально-різницевих рівнянь було розроблено прикладний із використанням мов C++, Lua і прикладного інтерфейсу для супровідних обчислень та графіки Vulkan. Для тестових

Стаття надійшла до редакції: 11.05.2026
Рекомендовано до друку: 22.05.2026
Оприлюднено (online): 29.05.2026

модельних прикладів здійснено числові експерименти та проведено їх порівняльний аналіз.

Ключові слова: *крайова задача, запізнення, метод сплайн-колокацій, кубічні сплайни, комп'ютерне моделювання.*

Вступ. Динамічні моделі математичної біології, хімічної кінетики та інших прикладних наук описуються крайовими задачами із запізненням [1, 2]. При математичному моделюванні таких процесів важливою є задача розробки ефективних методів побудови їх наближених розв'язків. При застосуванні класичних різницевих схем до диференціально-різницевих рівнянь із запізненням виникають складності, обумовлені специфікою таких рівнянь.

На даний час для наближеного розв'язання крайових задач із запізненням широко використовується метод сплайн-апроксимації.

Застосування кубічних сплайнів для різних класів диференціально-різницевих рівнянь досліджено в [3-5]. Наближене розв'язання лінійної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням методом B-сплайнів розглянуто в [6].

Метою даної роботи є порівняльний аналіз моделювання лінійних крайових задач із запізненням за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 та кубічних B-сплайнів.

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу для лінійного диференціального рівняння із запізненням:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q_1(x)y(x)+q_2(x)y(x-\tau(x))=f(x),\ \ x\in[a,b],\quad (1)$$

$$y(x)=\varphi(x),\ \ x\in[a^*,a],\ \ y(a)=\varphi(a),\ \ y(b)=\ \gamma\ ,\quad (2)$$

де $p(x), q_1(x), q_2(x), f(x), \tau(x)\geq 0$ – неперервні функції на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – неперервна функція на $[a^*,a]$, $a=\max\limits_{x\in[a,b]}(x-\tau(x))$, $\gamma\in R$.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь розглядались в [7-9]. У подальшому будемо допускати, що існує єдиний двічі неперервно диференційований розв'язок крайової задачі (1)-(2). Будемо розглядати алгоритми наближеного знаходження цього розв'язку, які є найбільш прості для реалізації і в той же час застосовні для широкого класу крайових задач із запізненням.

Обчислювальна схема за допомогою кубічних B-сплайнів. Будемо шукати наближений розв'язок крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного B-сплайна [10]:

$$S(x)=\sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x)\quad (3)$$

на рівномірній сітці:

$$\Delta: \ x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}, \ x_k = a + kh, \ k = \overline{-1, n+1}, \ h = \frac{b-a}{n}, \tag{4}$$

де $B_i = B\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$, $B(x) = \frac{1}{6}\begin{cases} (t+2)^3, & -2 \le t < -1, \\ -3t^3 - 6t^2 + 4, & -1 \le t < 0, \\ 3t^3 - 6t^2 + 4, & 0 \le t < 1, \\ (2-t)^3, & 1 \le t < 2, \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$

У вузлах сітки Δ справджуються співвідношення для сплайна (3) [11]:

$$S(x_k) = \frac{b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1}}{6}, \ S'(x_k) = \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2h},$$
$$S''(x_k) = \frac{b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}}{h^2}. \tag{5}$$

Підставляючи тепер сплайн (3) у рівняння (1) і крайові умови (2) у вузлах сітки Δ дістаємо рівності:

$$\frac{b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1}}{h^2} + p_k \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2h} + q_{1k} \frac{b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1}}{6} +$$
$$+ q_{2k} \sum_{k=-1}^{n+1} b_i B_i(x_k - \tau(x_k)) = f(x_k), \ k = \overline{0, n}, \tag{6}$$

$$\frac{b_{-1} + 4b_0 + b_1}{6} = \varphi(a), \ \frac{b_{n-1} + 4b_n + b_{n+1}}{6} = \gamma. \tag{7}$$

Співвідношення (6), (7) – це система $n+3$ лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів b_k, $k = \overline{-1, n+1}$, яку запишемо у вигляді

$$Cb = f, \tag{8}$$

де C – матриця $(n+3)\times(n+3)$, $b = (b_{-1}, b_0, \ldots, b_{n+1})^T$, $f = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{n+1})^T$.

Із співвідношень (6), (7) нескладно виписати елементи матриці C та вектора f:

$$c_{-1,-1} = 1, \ c_{-1,0} = 4, \ c_{-1,1} = 1, \ c_{-1,i} = 0, \ i = \overline{2, n+1},$$
$$c_{n+1,i} = 0, \ i = \overline{-1, n-2}, \ c_{n,n-1} = 1, \ c_{n+1,n} = 4, \ c_{n+1,n+1} = 1,$$
$$c_{k,k} = -2 + \frac{2}{3}h^2 q_{1k} + t_k h^2 q_{2k} B_k(x_k - \tau(x_k)),$$
$$c_{k,k+1} = 1 - \frac{1}{2}hp_k + \frac{1}{6}h^2 q_{1k} + t_k h^2 q_{2k} B_{k+l}(x_k - \tau(x_k)), \ l = -1, 1, \tag{9}$$

$$c_{kl} = t_k h^2 q_{2k} B(x_k - \tau(x_k)),$$
$$k = \overline{0, n}, l = -1, 0, \dots, k-2, k+1, \dots, n+1$$
$$f_{-1} = 6\varphi(a), \quad f_k = h^2 f(x_k) - (1-t_k)h^2 \varphi(x_k - \tau(x_k)),$$
$$k = \overline{0, n}, \quad f_{n+1} = 6\gamma,$$

де $t_k = \begin{cases} 0, & x_k - \tau(x_k) \le a, \\ 1, & x_k - \tau(x_k) > a. \end{cases}$

Таким чином, знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного В-сплайну (3) зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8).

Враховуючи те, що сітка Δ є рівномірною, значення сплайну (3) у довільній точці $\xi = x_0 + jh + \varepsilon,\ 0 \le \varepsilon < h$, $\xi \in [a,b]$ можна розрахувати за допомогою формули:

$$S(\xi) = \sum_{k=-1}^{2} b_{k+j} B\left(\frac{\xi - x_j}{h} - k\right), \quad j = \left\lfloor \frac{\xi - x_0}{h} \right\rfloor. \tag{10}$$

Цей вираз нескладно одержати, враховуючи, що $\xi \in \left[x_j,\ x_{j+1}\right]$, тому для розрахунку значення $S(\xi)$ необхідно обчислити чотири доданки.

Аналогічно також можна отримати формулу для обчислення похідної:

$$S'(\xi) = \frac{1}{h} \sum_{k=-1}^{2} b_{k+j} B'\left(\frac{\xi - x_j}{h} - k\right).$$

Теорема. *Нехай існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) і виконується умова:*

$$\max_{x \in [a,b]}(|q_1(x)| + |q_2(x)|) \le 8\left[(b-a)^2 + \frac{4}{3}h^2\right].$$

Тоді існує $\bar{h} > 0$ *таке, що при* $0 < h < \bar{h}$ *система (8) має єдиний розв'зок і справджується співвідношення:*

$$\|S(x) - y(x)\| \le \alpha(h) \to 0, \quad h \to 0.$$

Зауваження. *Теорему нескладно довести аналогічно, як в роботі [11].*

Обчислювальна схема за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2. У роботах [12-13] досліджується схема знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного сплайну $S(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ, який має аналітичне зображення [12]:

$$S(y,x)=M_j^{-}\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+M_{j-1}^{+}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+\left(\frac{y_{j-1}}{h_j}-M_{j-1}^{+}\frac{h_j}{6}\right)(x_j-x)+$$
$$+\left(\frac{y_j}{h_j}-M_j^{-}\frac{h_j}{6}\right)(x-x_{j-1}),\ \ x\in\left[x_{j-1},\ x_j\right], \tag{11}$$

де

$$M_j^{+}=S''(y,x_j+0),\quad j=0,\dots,n-1,\quad M_j^{-}=S''(y,x_j-0),\quad j=1,\dots,n .$$

Для величин M_j^{+}, M_j^{-} маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь [12]:

$$h_{j+1}y_{j-1}-(h_j+h_{j+1})y_j+h_jy_{j+1}=$$
$$=\frac{h_j-h_{j+1}}{6}\left(h_jM_{j-1}^{+}+2h_jM_j^{-}+2h_{j+1}M_j^{+}+h_{j+1}M_{j+1}^{-}\right), \tag{12}$$
$$j=1,\dots,n-1,\quad y_0=\varphi(a),\quad y_n=\gamma.$$

Зауваження. *Якщо в вузлі* x_j *існує неперервність других похідних розв'язку, то* $M_j^{+}=M_j^{-}$.

Ітераційна схема знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) у вигляді кубічного сплайну дефекту 2 має вигляд [12-13]:

1. Вибираємо початкове наближення

$$S\left(y^{(0)},x\right)=\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a),$$

щоб задовольнити крайові умови (2).

2. Знаходимо $M_j^{+(k+1)}$ та $M_j^{-(k+1)}$ для $k=0,1,\dots$ із рівняння (1):

$$M_j^{+(k+1)}=p(x_j)S'(y^{(k)},x_j+0)+q_1(x_j)S(y^{(k)},x_j+0)+$$
$$+t_j(q_2(x_j)S(y^{(k)},x_j+0-\tau(x_j)))+$$
$$+f(x_j)+q_2(x_j)\varphi(x_j-\tau(x_j))),\quad j=0,\dots,n-1,$$
$$M_j^{-(k+1)}=p(x_j)S'(y^{(k)},x_j-0)+q_1(x_j)S(y^{(k)},x_j-0)+ \tag{13}$$
$$+t_j(q_2(x_j)S(y^{(k)},x_j-0-\tau(x_j)))+$$
$$+f(x_j)+q_2(x_j)\varphi(x_j-\tau(x_j))),\quad j=1,\dots,n.$$

де $t_j=\begin{cases}0, & x_j-\tau(x_j)<a,\\ 1, & x_j-\tau(x_j)\ge a.\end{cases}$

3. Знаходимо $y_j^{(k+1)},\ j=\overline{0,n}$, розв'язуючи систему (11).
4. Підставляючи відповідні елементи множин $\{y_j^{(k+1)}\}$, $\{M_j^+\}$, $\{M_j^-\}$ у вираз (11), знаходимо наступне наближення $S\left(y^{(k+1)},x\right)$.
5. При достатньо великому k послідовність сплайнів $S\left(y^{(k)},x\right),\ k=0,1,\ldots$ наближається до розв'язку задачі (1)-(2).

У роботі [13] встановлено коефіцієнті умови збіжності наведеної вище ітераційної схеми.

Числові експерименти. Розглянемо крайову задачу із запізненням:

$$y''(x)+y(x)+y\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \ x\in[0,\ \frac{\pi}{2}], \tag{14}$$

$$y(x)=2,\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right],\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\,. \tag{15}$$

Точний розв'язок задачі (14)-(15)

$$y_T(x)=6\sin(x)+4\cos(x)-2,\ \ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

знайдено методом кроків.

Знайдемо наближені значення розв'язку крайової задачі (14)-(15) згідно наведених схем апроксимації з використанням кубічних B-сплайнів та сплайнів дефекту 2 за допомогою розробленого прикладного застосунку і порівняємо їх з точним розв'язком для різних кроків сітки Δ.

Результати числових експериментів наведено в таблицях 1-3, де x – вузол сітки, y_T – точний розв'язок, S_b – значення кубічного B-сплайна, S_d^k – значення кубічного сплайну дефекту 2 на k-й ітерації.

Таблиця 1

Результати числових експериментів, $h=0.157079$

x	y_T	S_b	S_d^4	S_d^6	S_d^{10}
0.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
0.314159	3.658328	3.654902	3.650200	3.654613	3.654901
0.628319	4.762779	4.757387	4.749780	4.756920	4.757386
0.942478	5.205243	5.199757	5.192149	5.199289	5.199755
1.256637	4.942407	4.938797	4.934095	4.938508	4.938796
1.570796	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000

Таблиця 2

Результати числових експериментів, $h = 0.078540$

x	y_T	S_b	S_d^4	S_d^6	S_d^{10}
0.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
0.314159	3.658328	3.657469	3.652640	3.657168	3.657468
0.628319	4.762779	4.761427	4.753614	4.760941	4.761426
0.942478	5.205243	5.203867	5.196053	5.203381	5.203866
1.256637	4.942407	4.941502	4.936672	4.941201	4.941501
1.570796	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000

Таблиця 3

Результати числових експериментів, $h = 0.052360$

x	y_T	S_b	S_d^4	S_d^6	S_d^{10}
0.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
0.314159	3.658328	3.657946	3.653093	3.657643	3.657945
0.628319	4.762779	4.762178	4.754326	4.761688	4.762176
0.942478	5.205243	5.204631	5.196778	5.204141	5.204629
1.256637	4.942407	4.942005	4.937151	4.941702	4.942003
1.570796	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000	4.000000

Висновки. Застосування методу сплайн апроксимації дозволяє побудувати ефективні алгоритми наближеного розв’язання крайових задач із запізненням. Числові експерименти для модельного тестового прикладу показують, що однакова точність наближення кубічними В-сплайнами та кубічними сплайнами дефекту 2 досягається орієнтовно на десятій ітерації. Тому для лінійних крайових задач із запізненнями ефективним є метод В-сплайнів.

Список використаних джерел:

1. Yang Kuang. Delay dierential equations: with applications in population dynamics. New York: Academic Press, 1993. 398 p.
2. Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Chester: Master's Thesis, 2016. 124 p.
3. Nikolova T. S., Bainov D. D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-dierential equations. *Yokohama Math. J.* 1981. Vol. 29 (1). P. 108-122.
4. Cherevko I., Dorosh A. Existence and approximation of a solution of boundary value problems for delay integro-differential equations. *Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory.* 2015. Vol. 44. № 2. P. 154-165. DOI: 10.33993/jnaat442-1054.
5. Дорош А. Б., Черевко І. М. Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математичний журнал.* 2025. Т. 13, № 2. С. 16-23.
6. Черевко И. М., Якимов И. В. Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. *Укр. матем. журн.* 1989. Т. 41, № 6. С. 854-860.

7. Grim L. J., Schmitt K. Boundary value problems for delay differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1968. Vol. 74, № 5. P. 997-1000.
8. Athanassiadou E. S. On the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for second order functional differential equations. *Mathematica Moravica*. 2013. Vol. 17, № 1. P. 51-57.
9. Dorosh A., Cherevko I. Boundary value problem solution existence for linear integro-differential equations with many delays. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 1. P. 65-70. DOI: 10.15330/cmp.10.1.65-70.
10. Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 296 p.
11. Настасій О. Б., Черевко І. М. Розв’язування лінійних крайових задач та інтегро-диференціальних рівнянь методом сплайн-колокації. *Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: Математика.* 2009. Вип. 454. С. 70-74.
12. Настасьєва Н. П., Черевко І. М. Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.* 1999. Вип. 1. С. 69-73.
13. Дорош А. Б., Черевко І. М. Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв’язків лінійних крайових задач із запізненням. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2014. Вип. 10. С. 80-88.

References:

1. Yang Kuang. Delay dierential equations: with applications in population dynamics. New York: Academic Press, 1993. 398 p.
2. Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Chester: Master's Thesis, 2016. 124 p.
3. Nikolova T. S., Bainov D. D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-dierential equations. *Yokohama Math. J.* 1981. Vol. 29 (1). P. 108-122.
4. Cherevko I., Dorosh A. Existence and approximation of a solution of boundary value problems for delay integro-differential equations. *Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory*. 2015. Vol. 44. № 2. P. 154-165. DOI: 10.33993/jnaat442-1054.
5. Dorosh A. B., Cherevko I. M. Modeliuvannia kraiovykh zadach dlia intehro-dyferentsialnykh rivnian neitralnoho typu. *Bukovynskyi matematychnyi zhurnal*. 2025. T. 13, № 2. P. 16-23.
6. Cherevko Y. M., Yakymov Y. V. Chyslennyi metod reshenyia kraevykh zadach dlia yntehro-dyfferentsyalnykh uravnenyi s otkloniaiushchymsia arhumen-tom. *Ukr. matem. zhurn.* 1989. T. 41, № 6. P. 854-860.
7. Grim L. J., Schmitt K. Boundary value problems for delay differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1968. Vol. 74, № 5. P. 997-1000.
8. Athanassiadou E. S. On the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for second order functional differential equations. *Mathematica Moravica*. 2013. Vol. 17, № 1. P. 51-57.
9. Dorosh A., Cherevko I. Boundary value problem solution existence for linear integro-differential equations with many delays. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 1. P. 65-70. DOI: 10.15330/cmp.10.1.65-70.

10. Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 296 p.
11. Nastasii O. B., Cherevko I. M. Rozviazuvannia liniinykh kraiovykh zadach ta intehro-dyferentsialnykh rivnian metodom splain-kolokatsii. *Naukovyi visnyk Chernivetskoho universytetu. Seriia: Matematyka*. 2009. Vyp. 454. S. 70-74.
12. Nastasieva N. P., Cherevko I. M. Kubichni splainy defektu 2 ta yikh zastosuvannia do kraiovykh zadach. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Seriia: Fizyko-matematychni nauky*. 1999. Vol. 1. P. 69-73.
13. Dorosh A. B., Cherevko I. M. Zastosuvannia splain-funktsii dlia aproksymatsii rozviazkiv liniinykh kraiovykh zadach iz zapiznenniam. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky*. 2014. Vol. 10. P. 80-88.

THE APPLICATION OF SPLINE FUNCTION METHOD TO THE MODELING OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH DELAY

The article introduces a set of algorithms for finding approximate solutions to linear delay boundary value problems, as exact solutions are obtainable only in the most trivial cases.

In the scientific literature, methods such as colocation, projection-iteration methods, and numerically-analytical algorithms have been proposed for finding approximate solutions to delay boundary value problems; however, these approaches are quite complex to implement. It should also be noted that solutions to delay boundary value problems may exhibit discontinuities in their derivatives, which complicates the application of finite-difference methods.

The spline method has been proven to be an effective approach for finding the approximate solution of delay boundary value problems. The article considers two approaches to applying the method, namely basis cubic splines and an iterative scheme using cubic splines of defect 2.

The first approach is suitable for approximating smooth solutions of delay boundary value problems, while the second accounts for possible derivative discontinuities.

For numerical modeling of linear boundary value problems involving differential-difference equations, an application was developed using C++, Lua, and Vulkan graphics and computing API. Numerical experiments were performed on test model examples, and a comparative analysis was conducted.

Key words: *boundary value problem, delayed argument, spline collocation method, cubic splines, computer modeling.*