ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 30. P. 168-187.

УДК 519.624.2:517.988.63
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.168-187

Янбеков Р. Я.
ORCID: 0009-0004-6588-7121,
Харківський національний університет
радіоелектроніки, м. Харків, Україна,
E-mail: ravil.yanbekov@nure.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОХІМІЇ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА

У роботі розглядається перша крайова задача для напівлінійного звичайного диференціального рівняння, яка є математичною моделлю деякого термохімічного процесу. При цьому розглянуто класичну задачу Брату і два її узагальнення, що враховують як втрати тепла через охолодження, так і зовнішній підігрів. Експоненціальна нелінійність в рівняннях відповідає наближенню закону Арреніуса за Франк-Каменецьким.

Методом функцій Гріна кожна з розглянутих задач замінена еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна, яке проаналізовано методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Для цього інтегральне рівняння подане як рівняння з нелінійним оператором, який діє у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Оператор досліджено на додатність, монотонність, ліпшиц-неперервність, існування інваріантного конусного відрізка тощо.

Для чисельного аналізу цих інтегральних рівнянь (а отже, і розглядуваних крайових задач) запропоновано ітераційні схеми методу двобічних наближень. Початковими наближеннями цих схем обираються кінці інваріантного конусного відрізка. Для кожної зі схем отримано умови збіжності і умови існування додатних розв'язків відповідних крайових задач. Також для цих розв'язків отримано двосторонні апріорні оцінки.

Обчислювальні експерименти були проведені для різних значень параметрів і у випадку задачі Брату результати порівняно з точним розв'язком. За підсумками аналізу зроблено висновки про ефективність запропонованих обчислювальних схем. Зокрема, їх перевагою є наявність гарантованої апостеріорної оцінки точності наближеного розв'язку та зручний критерій закінчення ітерацій.

Стаття надійшла до редакції: 18.05.2026
Рекомендовано до друку: 25.05.2026
Оприлюднено (online): 29.05.2026

Отримані у роботі результати можна розповсюдити на двота тривимірні математичні моделі термохімічних процесів з експоненціальними нелінійностями.

Ключові слова: *математичне моделювання, термохімічні процеси, метод двобічних наближень, функція Гріна, перша крайова задача, напівлінійне звичайне диференціальне рівняння.*

Вступ. Математичне моделювання термохімічних процесів є одним із ключових напрямів сучасних досліджень, які знаходяться на стику прикладної математики та хімічної інженерії, що обумовлено широким спектром їх застосувань в енергетиці, матеріалознавстві, хіміко-технологічних виробництвах, екологічних технологіях тощо. Реальні умови протікання таких процесів характеризуються складною взаємодією теплових і масообмінних явищ, нелінійною кінетикою реакцій та залежністю від великої кількості параметрів, що ускладнює їх аналітичний опис і потребує застосування сучасних методів математичного моделювання та обчислювальної математики.

Базовою математичною моделлю таких процесів у стаціонарному випадку часто є однорідна перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Лапласа [9, 11 – 13]

$$-\Delta u = \lambda f(u) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де u – безрозмірна температура, Ω – область з $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), у якій протікає термохімічних процес, $\partial\Omega$ – межа області Ω, $\lambda > 0$ – параметр, що залежить від термохімічних характеристик процесу, $f(u)$ – функція, що характеризує об'ємне джерело тепла, зумовлене хімічною реакцією. Крайова умова (2) означає, що межа $\partial\Omega$ є ізотермічною і область Ω контактує з термостатом.

Якщо лінійні рівняння повністю характеризуються набором своїх лінійно незалежних частинних розв'язків, то загальні (і навіть частинні) розв'язки напівлінійних рівнянь є майже невідомими, а їх властивості визначатимуться не стільки властивостями лінійного оператора у лівій частині рівняння (1), скільки особливостями поведінки нелінійної функції $f(u)$, що входить у його праву частину.

Для чисельного аналізу задачі (1), (2) зазвичай використовують метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, варіаційні методи, методи асимптотичних рядів або різні класи ітераційних методів [4, 5, 7, 8, 11, 12, 14, 15]. Перспективним є застосування до розв'язування цієї задачі ітераційних методів двобічних наближень, які дозволяють будувати дві послідовності функцій, що знизу та зверху апроксимують шуканий розв'язок.

Отже, актуальною науковою задачею є розробка нових та вдосконалення існуючих методів математичного моделювання та чисельного аналізу крайових задач для напівлінійних еліптичних диференціальних рівнянь другого порядку, що є математичними моделями термохімічних процесів.

Метою роботи є подальший розвиток ітераційних методів розв'язування одновимірних крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь, що є математичними моделями деяких термохімічних процесів. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- для першої крайової задачі відносно безрозмірної температури побудувати ітераційний метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна та теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах;
- провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

При розв'язуванні крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна застосовувався, наприклад, у роботах [1, 5, 10]. Дана робота продовжує розпочаті в них дослідження.

1. Постановка задачі. Розглядатимемо хімічний реактор у формі тонкого стриженя одиничної довжини, у якому відбувається екзотермічна хімічна реакція; кінці реактора підтримуються при сталій температурі. Тоді температура буде залежати лише від однієї координати і замість задачі (1), (2) для безрозмірної температури $u = u(x)$ ми отримаємо задачу

$$-u'' = \lambda f(u), \; x \in (0;\, 1), \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0. \tag{4}$$

Виходячи з кінетики Арреніуса функцію $f(u)$ часто обирають у вигляді $f(u) = e^u$ або $f(u) = e^{\frac{u}{1+\beta u}}$ ($\beta > 0$ – параметр насичення) [6, 11, 13, 15]. Тоді параметр λ має зміст узагальненої характеристики інтенсивності тепловиділення внаслідок хімічної реакції та визначає співвідношення між швидкістю генерації тепла та його відведенням у середовище. Зростання цього параметра зазвичай призводить до посилення нелінійних ефектів саморозігріву та може спричинити втрату стаціонарного режиму і виникнення теплового вибуху.

Рівняння задачі (3), (4) можна узагальнити, додавши у лівій частині вираз $\pm\kappa^2 u$ ($\kappa > 0$). Тут член $+\kappa^2 u$ описуватиме втрати тепла через охолодження, радіацію, теплообмін тощо, а член $-\kappa^2 u$ описуватиме, наприклад, зовнішній підігрів, коли середовище нагрівається швидше, ніж охолоджується, або екзотермічні зворотні процеси, коли реакція сама підсилює температуру.

Вибір $f(u)=e^u$ відповідає класичній кінетиці Арреніуса і дає наближення відповідного закону за Франк-Каменецьким [6].

Отже, у роботі розглядатимемо наступні три задачі для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь з експоненціальною нелінійністю:

- задача 1:

$$-u''=\lambda e^u\,,\ x\in(0;\ 1)\,, \tag{5}$$

$$u(0)=0\,,\ u(1)=0\,. \tag{6}$$

- задача 2:

$$-u''+\kappa^2 u=\lambda e^u\,,\ x\in(0;\ 1)\,, \tag{7}$$

$$u(0)=0\,,\ u(1)=0\,. \tag{8}$$

- задача 3:

$$-u''-\kappa^2 u=\lambda e^u\,,\ x\in(0;\ 1)\,, \tag{9}$$

$$u(0)=0\,,\ u(1)=0\,, \tag{10}$$

де $\lambda>0$, $\kappa>0$.

Для кожної з записаних крайових задач нас цікавитиме існування та фактичне знаходження додатного розв'язку.

2. Метод чисельного аналізу. До розв'язування кожної з задач (5), (6), (7), (8) та (9), (10) застосуємо ітераційний метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [5]. Згідно з цим методом крайова задача замінюється еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна, ядром якого є функції Гріна відповідного диференціального оператора. Далі отримане інтегральне рівняння аналізується методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах і будується відповідний ітераційних процес, що має двобічний характер збіжності. При цьому важливим є наявність властивості додатності функції Гріна.

Для задачі (5), (6) функція Гріна є додатною і має вигляд

$$G_1(x,s)=\begin{cases} x(1-s), & 0\le x\le s,\\ s(1-x), & s\le x\le 1,\end{cases}$$

для задачі (7), (8) функція Гріна також є додатною і має вигляд

$$G_2(x,s)=\frac{1}{\kappa\,\mathrm{sh}\,\kappa}\begin{cases} \mathrm{sh}\,\kappa x\,\mathrm{sh}\,\kappa(1-s), & 0\le x\le s,\\ \mathrm{sh}\,\kappa s\,\mathrm{sh}\,\kappa(1-x), & s\le x\le 1,\end{cases}$$

а задачі (9), (10) функція Гріна має вигляд

$$G_3(x,s)=\frac{1}{\kappa\sin\kappa}\begin{cases}\sin\kappa x\sin\kappa(1-s), & 0\le x\le s,\\ \sin\kappa s\sin\kappa(1-x), & s\le x\le 1,\end{cases}$$

і, по-перше, існує лише, якщо $\kappa\ne\pi k$, $k\in\mathbb{N}$, а, по-друге, не завжди є невід'ємною у квадраті $0\le x,s\le 1$ (умова невід'ємності виконується лише для $0<\kappa<\pi$).

Отже, крайова задача (5), (6) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x)=\lambda\int_0^1 G_1(x,s)e^{u(s)}ds\,, \tag{11}$$

крайова задача (7), (8) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x)=\lambda\int_0^1 G_2(x,s)e^{u(s)}ds\,, \tag{12}$$

а для зведення крайової задачі (9), (10) до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна з додатним ядром подамо спочатку рівняння задачі у вигляді $-u''=\kappa^2u+\lambda e^u$ і тоді відповідне інтегральне рівняння отримаємо у вигляді

$$u(x)=\int_0^1 G_1(x,s)[\kappa^2u(s)+\lambda e^{u(s)}]ds\,. \tag{13}$$

Зауважимо, що для $0<\kappa<\pi$ еквівалентне задачі (9), (10) інтегральне рівняння можна обрати й у вигляді

$$u(x)=\lambda\int_0^1 G_3(x,s)e^{u(s)}ds\,. \tag{14}$$

Кожне з інтегральних рівнянь (11)-(14) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0;\,1]$ функцій, що є неперервними на відрізку $[0;\,1]$. Норма у цьому просторі задається рівністю $\|u\|=\max\limits_{x\in[0;\,1]}|u(x)|$.

Напівупорядкуємо простір $C[0;\,1]$ за допомогою конуса K_+ невід'ємних функцій з $C[0;\,1]$: для $u,\ v\in C[0;\,1]$ покладемо $u\le v$, якщо $v-u\in K_+$, тобто $u(x)\le v(x)$ для всіх $x\in[0;\,1]$.

Інтегральні рівняння (11)-(14) візьмемо за основу означення узагальненого розв'язку відповідних крайових задач. Так, наприклад, узагальненим розв'язком крайової задачі (5), (6) назвемо функцію $u^*\in K_+$, що є розв'язком інтегрального рівняння (11).

З кожним з інтегральних рівнянь (11)-(14) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T_i, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, що діє у просторі $C[0;\,1]$ за правилом, що визначається правою частиною відповідного інтегрального рівняння, тобто

$$T_1(u)(x) = \lambda\int_0^1 G_1(x,s)e^{u(s)}ds\ , \tag{15}$$

$$T_2(u)(x) = \lambda\int_0^1 G_2(x,s)e^{u(s)}ds\ , \tag{16}$$

$$T_3(u)(x) = \int_0^1 G_1(x,s)[\kappa^2 u(s) + \lambda e^{u(s)}]ds\ . \tag{17}$$

$$T_4(u)(x) = \lambda\int_0^1 G_3(x,s)e^{u(s)}ds\ . \tag{18}$$

Отже, інтегральні рівняння (11)-(14) у операторній формі запишуться у вигляді $u = T_i(u)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, і задачу розв'язання кожної з крайових задач (5), (6), (7), (8) та (9), (10) зведено до задачі знаходження нерухомої точки відповідного оператора $T_i(u)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Для дослідження питання існування нерухомої точки оператора скористаємося методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах [2, 3].

По-перше, оператори T_1 (для $\lambda > 0$), T_2 (для $\lambda > 0$, $\kappa > 0$), T_3 (для $\lambda > 0$, $\kappa > 0$) і T_4 (для $\lambda > 0$, $0 < \kappa < \pi$) є додатними, тобто залишають інваріантним конус K_+ (з того, що $u \in K_+$ випливає, що $T_i(u) \in K_+$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$).

По-друге, очевидно, що оператори є неперервними і навіть цілком неперервними.

По-третє, через невід'ємність кожного з ядер та зростання за u функції λe^u (для операторів T_1, T_2 і T_4) та функції $\kappa^2 u + \lambda e^u$ (для оператора T_3) кожен з операторів T_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, є ізотонним (з того, що $v \le w$ випливає, що $T_i(v) \le T_i(w)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$).

Дослідимо тепер питання існування для кожного з операторів T_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, інваріантного конусного відрізка $< v_0,\ w_0 >$, що визначається нерівностями $T_i(v_0) \ge v_0$, $T_i(w_0) \le w_0$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Оскільки $T_i(\theta) \ge \theta$ і $T_i(\theta) \ne \theta$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, де θ – нульовий елемент простору $C[0;\ 1]$, то кінці інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді $v_0(x) = 0$, $w_0(x) = \beta$ ($\beta > 0$).

Для операторів T_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, умови, що визначають інваріантний конусний відрізок, мають відповідно вигляд:

для T_1 ($\lambda > 0$)

$$\lambda\int_0^1 G_1(x,s)ds \ge 0 \text{ для всіх } x\in[0;\ 1], \tag{19}$$

$$\lambda e^{\beta}\int_0^1 G_1(x,s)ds \le \beta \text{ для всіх } x\in[0;\ 1]; \tag{20}$$

для T_2 ($\lambda > 0$, $\kappa > 0$)

$$\lambda\int_0^1 G_2(x,s)ds \ge 0 \text{ для всіх } x\in[0;\ 1], \tag{21}$$

$$\lambda e^{\beta}\int_0^1 G_2(x,s)ds \le \beta \text{ для всіх } x\in[0;\ 1]; \tag{22}$$

для T_3 ($\lambda > 0$, $\kappa > 0$)

$$\lambda\int_0^1 G_1(x,s)ds \ge 0 \text{ для всіх } x\in[0;\ 1], \tag{23}$$

$$(\kappa^2\beta + \lambda e^{\beta})\int_0^1 G_1(x,s)ds \le \beta \text{ для всіх } x\in[0;\ 1]; \tag{24}$$

для T_4 ($\lambda > 0$, $0 < \kappa < \pi$)

$$\lambda\int_0^1 G_3(x,s)ds \ge 0 \text{ для всіх } x\in[0;\ 1], \tag{25}$$

$$\lambda e^{\beta}\int_0^1 G_3(x,s)ds \le \beta \text{ для всіх } x\in[0;\ 1]. \tag{26}$$

Через невід'ємність (за вказаних обмежень на параметри) функцій Гріна нерівності (19), (21), (23), (25) завжди виконуватимуться, а нерівності (20), (22), (24), (26) можна записати відповідно у вигляді

$$\lambda M_1 e^{\beta} \le \beta,\ \lambda M_2 e^{\beta} \le \beta,\ \kappa^2 M_1\beta + \lambda M_1 e^{\beta} \le \beta,\ \lambda M_3 e^{\beta} \le \beta,$$

де

$$M_1 = \max_{x\in[0;1]}\int_0^1 G_1(x,s)ds = \frac{1}{8},\ M_2 = \max_{x\in[0;1]}\int_0^1 G_2(x,s)ds = \frac{\operatorname{ch}\frac{\kappa}{2} - 1}{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}},$$

$$M_3 = \max_{x\in[0;1]}\int_0^1 G_3(x,s)ds = \frac{1-\cos\frac{\kappa}{2}}{\kappa^2\cos\frac{\kappa}{2}} \quad (0 < \kappa < \pi).$$

Аналіз нерівності $\lambda M e^{\beta} \le \beta$ дає, що вона має єдиний розв'язок $\beta = 1$, якщо $\lambda M = \dfrac{1}{e}$, і її розв'язком є відрізок $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$, $\underline{\beta} < 1 < \overline{\beta}$, якщо $0 < \lambda M < \dfrac{1}{e}$. Якщо ж $\lambda M > \dfrac{1}{e}$, то нерівність $\lambda M e^{\beta} \le \beta$ не матиме розв'язків. Отже, інваріантний конусний відрізок вигляду $<0, \beta>$ існує:

- для оператора T_1, якщо $0 < \lambda \le \dfrac{8}{e}$;
- для оператора T_2, якщо $0 < \lambda \le \dfrac{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}}{e\left(\operatorname{ch}\frac{\kappa}{2} - 1\right)}$;
- для оператора T_4, якщо $0 < \lambda \le \dfrac{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}}{e\left(1 - \cos\frac{\kappa}{2}\right)}$, $0 < \kappa < \pi$.

Нерівність, що визначає величину β для оператора T_3 записуємо у вигляді

$$\lambda M_1 e^{\beta} \le (1 - \kappa^2 M_1)\beta . \tag{27}$$

Очевидно, що якщо $1 - \kappa^2 M_1 \le 0$, тобто $\kappa \ge 2\sqrt{2}$, то нерівність (27) не виконується для жодного $\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Якщо ж $1 - \kappa^2 M_1 > 0$ (тобто $0 < \kappa < 2\sqrt{2}$), то нерівність (27) має єдиний розв'язок $\beta = 1$, якщо $\dfrac{\lambda M_1}{1 - \kappa^2 M_1} = \dfrac{1}{e}$, і розв'язком нерівності (27) є відрізок $[\underline{\beta}, \overline{\beta}]$, $\underline{\beta} < 1 < \overline{\beta}$, якщо $0 < \dfrac{\lambda M_1}{1 - \kappa^2 M_1} < \dfrac{1}{e}$.

Отже, інваріантний конусний відрізок вигляду $<0, \beta>$ для оператора T_3 існує, якщо $0 < \kappa < 2\sqrt{2}$ і $0 < \lambda \le \dfrac{8 - \kappa^2}{e}$.

І нарешті, на конусному відрізку $<0, \beta>$ кожен з операторів є ліпшіц-неперервним, тобто для всіх $v, w \in <0, \beta>$

$$\|T_i(v) - T_i(w)\| \le L_i \|v - w\|, \; i = 1, 2, 3, 4 .$$

Оскільки для всіх $v, w \in <0, \beta>$ виконується, що

$$\left|e^{v}-e^{w}\right| \le e^{\beta}\left|v-w\right| ,$$

то константи L_i, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, дорівнюють $L_1=\lambda e^{\beta}M_1$, $L_2=\lambda e^{\beta}M_2$, $L_3=(\kappa^2+\lambda e^{\beta})M_1$, $L_4=\lambda e^{\beta}M_4$.

Сформуємо наступні ітераційні процеси:

- для рівняння (11), тобто для крайової задача (5), (6),

$$v^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_1(x,s)e^{v^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{28}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_1(x,s)e^{w^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{29}$$

- для рівняння (12), тобто для крайової задача (7), (8),

$$v^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_2(x,s)e^{v^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{30}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_2(x,s)e^{w^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

- для рівняння (13), тобто для крайової задача (9), (10),

$$v^{(k+1)}(x)=\int_0^1 G_1(x,s)[\kappa^2 v^{(k)}(s)+\lambda e^{v^{(k)}(s)}]ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{32}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\int_0^1 G_1(x,s)[\kappa^2 w^{(k)}(s)+\lambda e^{w^{(k)}(s)}]ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{33}$$

- для рівняння (14), тобто теж для крайової задача (9), (10),

$$v^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_3(x,s)e^{v^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{34}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\lambda\int_0^1 G_3(x,s)e^{w^{(k)}(s)}ds\,,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{35}$$

де

$$v^{(0)}(x)=0\,,\ w^{(0)}(x)=\beta\,. \tag{36}$$

З огляду на ізотонність операторів T_i, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, можна стверджувати, що

$$0=v^{(0)}(x)\le v^{(1)}(x)\le\ldots\le v^{(k)}(x)\le\ldots\le w^{(k)}(x)\le\ldots\le w^{(1)}(x)\le w^{(0)}(x)=\beta\,.$$

З нормальності конуса K_+ і повної неперервності операторів T_i, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, випливає існування у $C[0;1]$ границь $v^*=\lim\limits_{k\to\infty}v^{(k)}$,

$w^* = \lim\limits_{k\to\infty} w^{(k)}$. Якщо ж $L_i < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, то $v^* = w^* = u^*$, де u^* – узагальнений розв'язок відповідної крайової задачі.

Для найшвидшої збіжності записаних вище ітераційних процесів слід взяти найменше можливе значення β, що отримується при побудові інваріантного відрізка $<0, \beta>$.

Підсумовуючи викладене, сформулюємо умови збіжності запропонованих ітераційних процесів та умови існування узагальнених розв'язків відповідних крайових задач.

Зауважимо, що найменший корінь рівняння $\beta e^{-\beta} = \dfrac{\lambda}{8}$ для $0 < \lambda < \dfrac{8}{e}$ завжди менше 1. Тоді $L_1 = \dfrac{\lambda}{8} e^{\beta} < 1$. Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \lambda < \dfrac{8}{e}$. *Тоді крайова задача (5), (6) має на* $<0, \beta>$, *де* β *– найменший корінь рівняння* $\beta e^{-\beta} = \dfrac{\lambda}{8}$, *єдиний узагальнений розв'язок* u^*, *до якого двобічно збігається ітераційний процес (28), (29), (36).*

З аналогічних міркувань отримуємо, що $L_2 < 1$, $L_3 < 1$ *і* $L_4 < 1$. *Отже, мають місце такі теореми.*

Теорема 2. *Нехай* $0 < \lambda < \dfrac{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}}{e\left(\operatorname{ch}\frac{\kappa}{2} - 1\right)}$. *Тоді крайова задача (7), (8) має на* $<0, \beta>$, *де* β *– найменший корінь рівняння* $\beta e^{-\beta} = \dfrac{\lambda\left(\operatorname{ch}\frac{\kappa}{2} - 1\right)}{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}}$, *єдиний узагальнений розв'язок* u^*, *до якого двобічно збігається ітераційний процес (30), (31), (36).*

Теорема 3. *Нехай* $0 < \lambda < \dfrac{8 - \kappa^2}{e}$ *і* $0 < \kappa < 2\sqrt{2}$. *Тоді крайова задача (9), (10) має на* $<0, \beta>$, *де* β *– найменший корінь рівняння* $\beta e^{-\beta} = \dfrac{\lambda}{8 - \kappa^2}$, *єдиний узагальнений розв'язок* u^*, *до якого двобічно збігається ітераційний процес (32), (33), (36).*

Теорема 4. *Нехай* $0 < \lambda < \dfrac{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}}{e\left(1-\cos\frac{\kappa}{2}\right)}$, $0 < \kappa < \pi$. *Тоді крайова задача (9), (10) має на* $<0, \beta>$, *де* β *– найменший корінь рівняння* $\beta e^{-\beta} = \dfrac{\lambda\left(1-\cos\frac{\kappa}{2}\right)}{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}}$, *єдиний узагальнений розв'язок* u^*, *до якого двобічно збігається ітераційний процес (34)-(36).*

Теорема 1 для задачі (5), (6) дає умову існування розв'язку лише для $0 < \lambda < \frac{8}{e}$. Проте за рахунок втрат тепла у розглядуваному процесі через охолодження, радіацію, теплообмін (член $+\kappa^2 u$ відповідного рівняння) згідно з теоремою 2 ми отримаємо, що за рахунок вибору κ можна отримати існування розв'язку для як завгодно великих значень λ. З іншого боку запропонований метод аналізу у випадку, коли наявні екзотермічні зворотні процеси, тобто термохімічна реакція сама підсилює температуру (член $-\kappa^2 u$ відповідного рівняння), ми маємо згідно з теорем 3 та 4 лише обмежений діапазон зміни значень κ, якому відповідає зміна λ від 0 до $\frac{8}{e}$.

Двобічна збіжність запропонованих ітераційних процесів дає наступні оцінки для точного розв'язку u^* розглядуваних крайових задач

$$0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(k)} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w^{(k)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = \beta .$$

Це означає, що на кожному кроці ітераційного процесу ми маємо гарантовану оцінку $v^{(k)} \le u^* \le w^{(k)}$, а якщо за наближений розв'язок на k-й ітерації обрати $u^{(k)}(x) = \dfrac{v^{(k)}(x) + w^{(k)}(x)}{2}$, то похибка цього наближення оцінюватиметься нерівністю

$$\left\| u^{(k)} - u^* \right\| \le \frac{1}{2} \max_{x\in[0;1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] .$$

Звідси маємо зручний критерій закінчення ітерацій: з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$, якщо

$$\max_{x\in[0;1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)] \le 2\varepsilon . \tag{37}$$

Також зауважимо, що інваріантний конусний відрізок $<0, \beta>$ є апріорною оцінкою розв'язку відповідної крайової задачі, але через сталість його кінців ця оцінка є певною мірою тривіальною. Тоді за апріорну оцінку розв'язку можна взяти відрізок $< v^{(1)}, w^{(1)} >$. Отже:

- для задачі (5), (6)

$$\lambda \int_0^1 G_1(x,s)ds \le u^*(x) \le \lambda e^{\beta} \int_0^1 G_1(x,s)ds \,;$$

- для задачі (7), (8)

$$\lambda \int_0^1 G_2(x,s)ds \le u^*(x) \le \lambda e^{\beta} \int_0^1 G_2(x,s)ds \,;$$

- для задачі (9), (10)

$$\lambda \int_0^1 G_1(x,s)ds \le u^*(x) \le (\kappa^2 \beta + \lambda e^{\beta}) \int_0^1 G_1(x,s)ds$$

або

$$\lambda \int_0^1 G_3(x,s)ds \le u^*(x) \le \lambda e^{\beta} \int_0^1 G_3(x,s)ds \,.$$

Обчисливши відповідні інтеграли від функції Гріна остаточно отримаємо наступні оцінки для розв'язку:

- для задачі (5), (6)

$$\frac{\lambda}{2} x(1-x) \le u^*(x) \le \frac{\lambda e^{\beta}}{2} x(1-x) \,;$$

- для задачі (7), (8)

$$\frac{2\lambda}{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}} \operatorname{sh}\frac{\kappa x}{2} \operatorname{sh}\frac{\kappa(1-x)}{2} \le u^*(x) \le \frac{2\lambda e^{\beta}}{\kappa^2 \operatorname{ch}\frac{\kappa}{2}} \operatorname{sh}\frac{\kappa x}{2} \operatorname{sh}\frac{\kappa(1-x)}{2} \,;$$

- для задачі (9), (10)

$$\frac{\lambda}{2} x(1-x) \le u^*(x) \le \frac{\kappa^2 \beta + \lambda e^{\beta}}{2} x(1-x)$$

або

$$\frac{2\lambda}{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}} \sin\frac{\kappa x}{2} \sin\frac{\kappa(1-x)}{2} \le u^*(x) \le \frac{2\lambda e^{\beta}}{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}} \sin\frac{\kappa x}{2} \sin\frac{\kappa(1-x)}{2} \,.$$

Також зауважимо, що послідовності нижніх $\{v^{(k)}(x)\}$ та верхніх $\{w^{(k)}(x)\}$ наближень, сформованих за запропонованими ітераційними схемами, утворюють дві незалежні послідовності і при організації відповідних обчислювальних процесів їх формування можна проводити з використанням технологій паралельних обчислень.

3. Результати обчислювального експерименту. Крайова задача (5), (6) – це класична задача Брату. Відомо [14], що в залежності від λ ця задача має два розв'язки, один розв'язок чи взагалі не є розв'язною. А саме існує критичне значення $\lambda_{\text{крит.}} \approx 3{,}5138$ таке, що:

- для $0 < \lambda < \lambda_{\text{крит.}}$ існує два розв'язки задачі (5), (6): нижній (стійкий) і верхній (нестійкий);
- для $\lambda = \lambda_{\text{крит.}}$ існує єдиний (граничний) розв'язок задачі (5), (6);
- для $\lambda > \lambda_{\text{крит.}}$ задача (5), (6) не має розв'язків.

Відповідно до теореми 1 ми гарантуємо знаходження з двобічними наближеннями нижнього, стійкого, розв'язку (єдиного на виділеному інваріантному конусному відрізку) для значень $0 < \lambda < \tilde{\lambda}$, де $\tilde{\lambda} = \frac{8}{e} \approx 2{,}9430 < \lambda_{\text{крит.}}$.

Для задачі (5), (6) також відомим є точний розв'язок:

$$u^*(x) = 2\ln \frac{\operatorname{ch}\frac{\theta}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\theta}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)},$$

де θ – розв'язок рівняння $\lambda = \dfrac{\theta^2}{2\operatorname{ch}^2\frac{\theta}{4}}$. При цьому

$$\left\| u^* \right\| = u^*\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\operatorname{ch}\frac{\theta}{4}$$

і зі зростанням λ також зростає і $\left\| u^* \right\|$.

Обчислювальний експеримент в задачі (5), (6) було проведено для різних значень параметра λ. Ітераційний процес проводився до виконання нерівності (37) при $\varepsilon = 10^{-4}$. В таблиці 1 наведено значення параметра λ, значення $\underline{\beta}$ і $\overline{\beta}$, кількість зроблених ітерацій k, норма наближеного розв'язку $\left\| u^{(k)} \right\|$, норма точного розв'язку $\left\| u^* \right\|$, оцінка точності наближеного розв'язку $\varepsilon_{\text{оц.}} = \dfrac{1}{2} \max\limits_{x \in [0;1]} [w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)]$ та фактична точність $\varepsilon_{\text{факт.}} = \left\| u^{(k)} - u^* \right\|$.

Таблиця 1

Результати обчислювального експерименту для задачі (5), (6)

λ	0,5	1	1,5	2	2,5	2,9
$\underline{\beta}$	0,066819	0,144421	0,237846	0,357403	0,531956	0,838033
$\overline{\beta}$	4,210067	3,261686	2,647648	2,153292	1,684794	1,181602
k	3	4	5	6	9	13
$\left\lVert u^{(k)} \right\rVert$	0,066033	0,140529	0,226463	0,328911	0,458005	0,596645
$\left\lVert u^{*} \right\rVert$	0,066037	0,140539	0,226482	0,328952	0,458037	0,596692
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,64\cdot 10^{-5}$	$0,15\cdot 10^{-4}$	$0,30\cdot 10^{-4}$	$0,77\cdot 10^{-4}$	$0,45\cdot 10^{-4}$	$0,55\cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{\text{факт.}}$	$0,41\cdot 10^{-5}$	$0,98\cdot 10^{-5}$	$0,19\cdot 10^{-4}$	$0,41\cdot 10^{-4}$	$0,32\cdot 10^{-4}$	$0,34\cdot 10^{-4}$

Як бачимо з таблиці 1, метод (28), (29), (36) дає доволі хороші наближення до точного розв'язку і оцінка похибки наближення (будучи завищеною) майже співпадає з її фактичним значенням. Також можна відмітити, що зі збільшенням λ збіжність методу уповільнюється.

Розглянемо тепер крайову задачу (7), (8). Відповідно до теореми 2 ми гарантуємо знаходження з двобічними наближеннями розв'язку, що є єдиним на виділеному інваріантному конусному відрізку, для значень $0<\lambda<\tilde{\lambda}(\kappa)$, де $\tilde{\lambda}(\kappa)=\dfrac{\kappa^2\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\kappa}{2}}{e\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\kappa}{2}-1\right)}$. Точний розв'язок для задачі (7), (8) не відомий.

У таблиці 2 наведено значення $\tilde{\lambda}(\kappa)$ для деяких κ.

Таблиця 2

Значення $\tilde{\lambda}(\kappa)$ при деяких κ для задачі (7), (8)

κ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\tilde{\lambda}(\kappa)$	3,0197	3,2504	3,6366	4,1811	4,8873	5,7591

Я бачимо з таблиці 2, зі зростанням κ також збільшується порогове значення $\tilde{\lambda}(\kappa)$, до якого ми можемо бути впевнені в збіжності ітераційного процесу (30), (31), (36).

У таблиці 3 наведено значення параметрів κ і λ, значення $\underline{\beta}$ і $\overline{\beta}$, кількість зроблених ітерацій k, норма наближеного розв'язку $\left\lVert u^{(k)} \right\rVert$ та його оцінка точності $\varepsilon_{\text{оц.}}=\dfrac{1}{2}\max\limits_{x\in[0;1]}[w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x)]$.

Як бачимо з таблиці 2, метод (30), (31), (36) також дозволяє отримати в межах умов збіжності хороші наближення до точного розв'язку. При цьому норма розв'язку задачі (7), (8) збільшується зі зростанням λ, але зменшується при зростанні κ. Також можна відмітити, що зі збільшенням λ (для фіксованого κ) уповільнюється швидкість збіжності ітерацій, а зі збільшенням κ (для фіксованого λ), навпаки, збіжність прискорюються.

Таблиця 3

Результати обчислювального експерименту для задачі (7), (8)

	$\kappa = 1$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,060096	0,128730	0,209296	0,308016	0,438828	0,651172
$\overline{\beta}$	4,339724	3,403600	2,804541	2,332604	1,909115	1,455510
k	2	3	4	6	7	10
$\lVert u^{(k)} \rVert$	0,059428	0,125704	0,200835	0,288157	0,393424	0,528999
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,87 \cdot 10^{-4}$	$0,84 \cdot 10^{-4}$	$0,90 \cdot 10^{-4}$	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$0,90 \cdot 10^{-4}$	$0,92 \cdot 10^{-4}$
	$\kappa = 2$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,046067	0,096943	0,153945	0,219072	0,295628	0,389775
$\overline{\beta}$	4,663482	3,753175	3,182900	2,748470	2,382383	2,049610
k	2	3	4	5	6	7
$\lVert u^{(k)} \rVert$	0,045709	0,095390	0,149865	0,210338	0,278579	0,357365
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,40 \cdot 10^{-4}$	$0,29 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-4}$	$0,20 \cdot 10^{-4}$	$0,25 \cdot 10^{-4}$	$0,43 \cdot 10^{-4}$
	$\kappa = 3$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,033011	0,068400	0,106595	0,148159	0,193858	0,244784
$\overline{\beta}$	5,066593	4,181430	3,636270	3,230162	2,898774	2,612455
k	2	3	3	4	4	5
$\lVert u^{(k)} \rVert$	0,032851	0,067731	0,104896	0,144789	0,187813	0,234697
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,15 \cdot 10^{-4}$	$0,75 \cdot 10^{-5}$	$0,43 \cdot 10^{-4}$	$0,19 \cdot 10^{-4}$	$0,68 \cdot 10^{-4}$	$0,41 \cdot 10^{-4}$

Для крайової задачі (9), (10) запропоновано дві ітераційні схеми методу двобічних наближень: схема (32), (33), (36) та схема (34)-(36). Для цієї задачі ми гарантуємо знаходження з двобічними наближеннями розв'язку, що є єдиним на виділеному інваріантному конусному відрізку, для значень $0 < \kappa < 2\sqrt{2}$, $0 < \lambda < \tilde{\lambda}'(\kappa)$, де $\tilde{\lambda}'(\kappa) = \dfrac{8-\kappa^2}{e}$, (згідно з теоремою 3) або для значень $0 < \kappa < \pi$, $0 < \lambda < \tilde{\lambda}''(\kappa)$, де $\tilde{\lambda}''(\kappa) = \dfrac{\kappa^2 \cos\frac{\kappa}{2}}{e\left(1-\cos\frac{\kappa}{2}\right)}$, (згідно з теоремою 4). Точного розв'язку для задачі (9), (10) не відомо.

У таблиці 4 наведено значення $\tilde{\lambda}'(\kappa)$, $\tilde{\lambda}''(\kappa)$ для деяких κ.

Таблиця 4

Значення $\tilde{\lambda}'(\kappa)$, $\tilde{\lambda}''(\kappa)$ при деяких κ для задачі (9), (10)

κ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\tilde{\lambda}'(\kappa)$	2,8511	2,5752	2,1153	1,4715	0,6438	–
$\tilde{\lambda}''(\kappa)$	2,8664	2,6372	2,2572	1,7295	1,0589	0,2520

Я бачимо з таблиці 4, зі зростанням κ порогові значення $\tilde{\lambda}'(\kappa)$ і $\tilde{\lambda}''(\kappa)$, до яких ми можемо бути впевнені в збіжності ітераційних процесів (32), (33), (36) і (34)-(36), зменшуються. При цьому для фіксованого значення κ порогове значення $\tilde{\lambda}''(\kappa)$ завжди більше ніж $\tilde{\lambda}'(\kappa)$.

У таблиці 5 для ітераційної схеми (32), (33), (36) наведено значення параметрів κ і λ, значення $\underline{\beta}$ і $\overline{\beta}$, кількість зроблених ітерацій k, норма наближеного розв'язку $\left\|u^{(k)}\right\|$ та його оцінка точності $\varepsilon_{\text{оц.}} = \dfrac{1}{2}\max\limits_{x\in[0;1]}[w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)]$, а у таблиці 6 – ті ж значення для ітераційної схеми (34)-(36).

Як бачимо з таблиць 5 і 6, обидва методи (32), (33), (36) і (34)-(36) в межах своїх умов збіжності дозволяють отримати хороші наближення до точного розв'язку задачі (9), (10). При цьому норма розв'язку задачі (9), (10) збільшується зі зростанням як λ, так і κ. Також бачимо, що зі збільшенням λ уповільнюється швидкість збіжності ітерацій. Порівнюючи ці схеми, можна дійти висновку, що метод (34)-(36) має ширшу множину значень параметрів, для яких має місце його збіжність, і за однакових їх значень швидше збігається, ніж метод (32), (33), (36). Отже, при розв'язуванні задачі (9), (10) перевагу слід віддати ітераційній схемі (34)-(36).

Таблиця 5

Результати обчислювального експерименту для задачі (9), (10)
(ітераційна схема (32), (33), (36))

	$\kappa=1$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,077158	0,169193	0,284929	0,446543	0,775942	–
$\overline{\beta}$	4,033755	3,066421	2,427172	1,888597	1,263524	–
k	4	5	7	9	13	–
$\left\|u^{(k)}\right\|$	0,074156	0,159166	0,259544	0,383745	0,551873	–
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,28\cdot10^{-4}$	$0,51\cdot10^{-4}$	$0,30\cdot10^{-4}$	$0,47\cdot10^{-4}$	$0,77\cdot10^{-4}$	–

Продовження таблиці 5

	$\kappa=2$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,144421	0,357403	–	–	–	–
$\overline{\beta}$	3,261686	2,153292	–	–	–	–
k	9	13	–	–	–	–
$\lVert u^{(k)}\rVert$	0,116986	0,263969	–	–	–	–
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,86\cdot10^{-4}$	$0,62\cdot10^{-4}$	–	–	–	–

Таблиця 6

Результати обчислювального експерименту для задачі (9), (10) (ітераційна схема (34)-(36))

	$\kappa=1$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,075194	0,164423	0,275652	0,428034	0,707679	–
$\overline{\beta}$	4,065391	3,101677	2,467457	1,938503	1,363494	–
k	3	4	5	7	11	–
$\lVert u^{(k)}\rVert$	0,074166	0,159178	0,259529	0,383739	0,551872	–
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,10\cdot10^{-4}$	$0,28\cdot10^{-4}$	$0,68\cdot10^{-4}$	$0,72\cdot10^{-4}$	$0,70\cdot10^{-4}$	–
	$\kappa=2$					
λ	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\underline{\beta}$	0,119899	0,281998	0,556750	–	–	–
$\overline{\beta}$	3,491266	2,439749	1,632504	–	–	–
k	3	5	9	–	–	–
$\lVert u^{(k)}\rVert$	0,116985	0,263965	0,468656	–	–	–
$\varepsilon_{\text{оц.}}$	$0,61\cdot10^{-4}$	$0,73\cdot10^{-4}$	$0,55\cdot10^{-4}$	–	–	–

Крайова задача (5), (6) виникає при дослідженні проблем теплового вибуху [6]. Як ми бачимо з отриманих результатів, додавання у рівняння математичної моделі термохімічного процесу виразу $\pm\kappa^2 u$ ($\kappa>0$) змінює характер його протікання. Доданок $+\kappa^2 u$, що описує теплові втрати в середовище, стабілізує процес ($\lVert u\rVert$ для задачі (7), (8) менша відповідних норм розв'язку задачі (5), (6) для одних і тих самих значень λ) і розв'язок існує для більшої множини значень параметру λ. Доданок $-\kappa^2 u$, описуючи підсилення реакції за рахунок, наприклад, зовнішнього підігріву, навпаки дестабілізує процес: $\lVert u\rVert$ в задачі (9), (10) зростає швидше і розв'язок існує для меншої множини значень параметру λ.

Висновки. У даній роботі отримали подальший розвиток методи двобічних наближень в частині їх застосування до чисельного аналізу одновимірних крайових задач, що є математичними моделями термохімічних процесів, а саме були отримані умови розв’язності відповідних крайових задач з експоненціальною нелінійністю та умови отримання їх розв’язків з двобічною оцінкою точності. Безумовною перевагою запропонованих обчислювальних схем є наявність гарантованої оцінки похибки на кожній ітерації. Результати роботи можуть бути застосовані як при дослідженні конкретних прикладних задач, так і для оцінювання точності інших чисельних методів розв’язання крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Цим визначається наукова новизна та практична значущість результатів, отриманих у роботі.

Наступні дослідження доцільно зосередити на дослідженні методами двобічних наближень дво- та тривимірних математичних моделей термохімічних процесів.

Список використаних джерел:

1. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
2. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
3. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1984. 246 с.
4. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekket, Inc., 2001. XVIII+751 p.
5. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6.
6. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.
7. Afrouzi G. A., Khademloo S. A numerical method to find positive solution of semilinear elliptic Dirichlet problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2006. Vol. 174, № 2. P. 1408-1415. DOI:10.1016/j.amc.2005.05.04.
8. Ananthaswamy V., Rajendran L. Analytical solutions of some two-point nonlinear elliptic boundary value problems. *Applied Mathematics*. 2012. № 3. P. 1044-1058. DOI: 10.4236/am.2012.39154.
9. Kapila A. K., Matkowsky B. J., Vega J. Reactive-diffusive system with Arrhenius kinetics: peculiarities of the spherical geometry. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. Vol. 38, № 3. P. 382-401.
10. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17-26.

11. Mohsen A. A simple solution of the Bratu problem. *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. № 67. P. 26-33. DOI: 10.1016/j.camwa.2013.10.003.
12. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992. 794 p.
13. Syam M. I., Allan F. M. On the computation of fold points for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*. 2011. Vol. 4, № 1. P. 1-17.
14. Tomar S., Pandey R.K. An efficient iterative method for solving Bratu-type equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2019. Vol. 357. P. 71-84. DOI: 10.1016/j.cam.2019.02.025.
15. Yadav N., Yadav A., Deep K. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems. *Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving*. New Delhi: Springer, 2015. P. 113-121.

References:

1. Voronenko M. D., Sidorov M. V. Konstruktyvne doslidzhennia neliniinykh kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian. Radioelektronika ta informatyka. 2018. № 1 (80). P. 48-54.
2. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
3. Opoitsev V. I., Khurodze T. A. Nelineinye operatory v prostranstvakh s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo universiteta, 1984. 246 p.
4. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekket, Inc., 2001. XVIII+751 p.
5. Sidorov M. V. Metod dvobichnykh nablyzhen rozviazannia pershoi kraiovoi zadachi dlia neliniinykh zvychainykh dyferentsialnykh rivnian na osnovi vykorystannia funktsii Hryna. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia.* 2019. No. 1 (48). P. 57-66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6.
6. Frank-Kamenetskii D. A. Osnovy makrokinetiki. Diffuziia i teploperedacha v khimicheskoi kinetike. Dolgoprudnyi: Izdatelskii Dom «Intellekt», 2008. 408 s.
7. Afrouzi G. A., Khademloo S. A numerical method to find positive solution of semilinear elliptic Dirichlet problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2006. Vol. 174, № 2. P. 1408-1415. DOI:10.1016/j.amc.2005.05.04.
8. Ananthaswamy V., Rajendran L. Analytical solutions of some two-point nonlinear elliptic boundary value problems. *Applied Mathematics*. 2012. № 3. P. 1044-1058. DOI: 10.4236/am.2012.39154.
9. Kapila A. K., Matkowsky B. J., Vega J. Reactive-diffusive system with Arrhenius kinetics: peculiarities of the spherical geometry. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. Vol. 38, № 3. P. 382-401.
10. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020. Vol. 14, № 3-4. P. 17-26.
11. Mohsen A. A simple solution of the Bratu problem. *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. № 67. P. 26-33. DOI: 10.1016/j.camwa.2013.10.003.
12. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992. 794 p.

13. Syam M. I., Allan F. M. On the computation of fold points for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*. 2011. Vol. 4, № 1. P. 1-17.
14. Tomar S., Pandey R.K. An efficient iterative method for solving Bratu-type equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2019. Vol. 357. P. 71-84. DOI: 10.1016/j.cam.2019.02.025.
15. Yadav N., Yadav A., Deep K. Artificial neural network technique for solution of nonlinear elliptic boundary value problems. *Proceedings of Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving*. New Delhi: Springer, 2015. P. 113-121.

ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL STEADY-STATE THERMOCHEMICAL PROBLEMS USING THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS WITH GREEN'S FUNCTION

This paper considers the first boundary value problem for a semilinear ordinary differential equation, which serves as a mathematical model of a thermochemical process. In particular, the classical Bratu problem and two of its generalizations are studied, taking into account both heat losses due to cooling and external heating. The exponential nonlinearity in the equations corresponds to the Frank-Kamenetskii approximation of the Arrhenius law.

Using Green's function, each of the considered problems is reduced to an equivalent Hammerstein integral equation, which is analyzed within the framework of nonlinear operator theory in semi-ordered Banach spaces. For this purpose, the integral equation is represented as an operator equation with a nonlinear operator acting in the space of continuous functions partially ordered by the cone of nonnegative functions. The operator is investigated with respect to positivity, monotonicity, Lipschitz continuity, and the existence of an invariant conical segment.

For the numerical analysis of these integral equations (and hence the corresponding boundary value problems), iterative schemes based on the method of two-sided approximations are proposed. The endpoints of the invariant conical segment are chosen as initial approximations. For each scheme, convergence conditions and conditions for the existence of positive solutions to the corresponding boundary value problems are established. Additionally, two-sided a priori estimates for these solutions are obtained.

Computational experiments are carried out for various parameter values, and in the case of the Bratu problem, the results are compared with the exact solution. Based on the analysis, conclusions are drawn regarding the efficiency of the proposed computational schemes. In particular, their advantages include the availability of guaranteed a posteriori error estimates for the approximate solution and a convenient stopping criterion for the iterative process.

The results obtained in this work can be extended to two- and three-dimensional mathematical models of thermochemical processes with exponential nonlinearities.

Key words: *mathematical modelling, thermochemical processes, two-sided approximation method, Green's function, first boundary value problem, semilinear ordinary differential equation.*