ISSN 2308-5878. Mathematical and computer modelling.
Series: Physical and mathematical sciences. 2026. Issue 30. P. 115-126.

УДК 519.624.2:517.988
DOI: 10.32626/2308-5878.2026-30.115-126

Пархоменко В. Г.
ORCID: 0009-0008-7309-0875,
Харківський національний університет
радіоелектроніки, м. Харків, Україна,
E-mail: vladyslav.parkhomenko1@nure.ua

АНАЛІЗ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ СТАЦІОНАРНОЇ РЕАКТИВНО-ДИФУЗИВНОЇ МОДЕЛІ У СФЕРИЧНІЙ ГРАНУЛІ З КІНЕТИКОЮ АРРЕНІУСА

У роботі проведено аналіз методом двобічних наближень стаціонарної реакційно-дифузійної моделі у сферичній гранулі з кінетикою Арреніуса.

Задачі розглядається у сферичній області з неоднорідною першою крайовою умовою на межі, яка після заміни перетворюється на однорідну. Нелінійність подана у вигляді добутку лінійної та експоненціальної функцій. Після переходу до сферичної системи координат з урахуванням радіальної симетрії (розв'язок залежить лише від відстані до центру кулі, а від кутів повороту залежність відсутня), прийшли до крайової задачі для напівлінійного звичайного диференціального рівняння. Оскільки полюс сферичної системи координат є особливою точкою одержаного рівняння, необхідно поставити умову обмеженості розв'язку в цій точці.

Для задачі здійснюється побудова функції Гріна, далі виконується зведення до еквівалентного інтегрального рівняння, яке розглядається як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі неперервних на відрізку функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних на цьому відрізку функцій. Проведено дослідження властивостей відповідного інтегрального оператора такі, як гетеротонність та додатність.

Далі здійснюється пошук кінців сильно інваріантного конусного відрізка, які виступають початковими наближеннями для ітераційного процесу. Потім будуються два ітераційні процеси. Перша ітераційна послідовність не спадає за конусом (послідовність нижніх наближень), друга – не зростає за конусом (послідовність верхніх наближень). За поточне наближення на кожній ітерації обирається середнє арифметичне верхнього та нижнього наближень, що надає можливість одержати

Стаття надійшла до редакції: 19.05.2026
Рекомендовано до друку: 20.05.2026
Оприлюднено (online): 29.05.2026

на кожному кроці ітераційного процесу апостеріорну оцінку похибки. Зроблено висновок про існування та єдиність додатного радіально-симетричного розв'язку розглядуваної задачі.

Теоретичні результати, одержані в роботі, було підтверджено шляхом проведення обчислювального експерименту. Результати обчислювального експерименту подано у графічному вигляді.

Ключові слова: *гетеротонний оператор, інтегральне рівняння Гаммерштейна, метод двобічних наближень, напівлінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа, нелінійна крайова задача, радіально-симетричний додатний розв'язок, реакційно-дифузійна система, сильно інваріантний конусний відрізок, функція Гріна.*

Вступ. Дослідження реакційно-дифузійних процесів [1] є одним із важливих напрямів сучасної математичної фізики, оскільки такі моделі описують широкий клас явищ тепломасообміну та хімічної кінетики. Особливий інтерес становлять задачі, у яких залежність швидкості реакції від температури є нелінійною. Подібні математичні моделі виникають при дослідженні процесів горіння, теплового вибуху, каталітичних реакцій, функціонування пористих каталізаторів, а також у задачах хімічної технології та енергетики. Розглянемо одну з класичних моделей такого типу, а саме – крайову задачу для еліптичного реакційно-дифузійного рівняння з кінетикою Арреніуса [2] в гранулі Ω. Нехай гранула Ω є кулею радіуса R. У такому випадку ставиться задача знаходження радіально-симетричного розв'язку крайової задачі, тобто розв'язку, залежного лише від $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Тоді вихідна задача для рівняння з частинними похідними перетворюється на крайову задачу для напівлінійного звичайного диференціального рівняння.

Точні розв'язки задач для напівлінійних диференціальних рівнянь відомі лише для поодиноких випадків. Таким чином, виникає необхідність у розв'язанні таких задач за допомогою, наприклад, сіткових, варіаційних чи ітераційних методів. Ітераційні методи є найбільш зручними, оскільки вони є відносно простими в плані обчислювальної реалізації, а також мають властивість самовиправності. Серед ітераційних методів слід виокремити методи двобічних наближень як універсальний засіб дослідження існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь. Також вони надають можливість фактичного знаходження цих розв'язків. Окрім того, за допомогою двобічних наближень можна одержати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації, що в свою чергу дозволяє зручно оцінити похибку наближеного розв'язку.

За теоретичне підґрунтя розробки двобічних ітераційних методів взято теорію нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Ці методи вже застосовувалися до нелінійних диференціальних рівнянь, наприклад, у роботах [5, 11, 12]. Мало місце дослідження аксіально- і радіально-симетричних розв'язків для оператора Лапласа зі степеневими нелінійностями. Проте не було достатньо досліджено знаходження таких розв'язків (з двобічними наближеннями) саме для прикладних задач.

Таким чином, наукова задача чисельного аналізу радіально-симетричних розв'язків реакційно-дифузійної моделі з кінетикою Арреніуса методом двобічних наближень є актуальною. Дана стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [3-8, 11-14], в частині їх перенесення на приклад напівлінійного рівняння з оператором Лапласа, що є математичною моделлю зазначеного процесу.

1. Постановка задачі. В одиничній кулі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

розглядатимемо напівлінійне стаціонарне рівняння:

$$-\Delta y = \lambda^2 (1 + \beta - y) e^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{y}}, \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

з крайовою умовою першого роду

$$y\big|_{\partial\Omega} = 1, \tag{2}$$

де β – параметр тепловиділення реакції, γ – енергія активації, λ – модуль Тіле, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$.

Задача (1), (2) є реакційно-дифузійною системою з кінетикою Арреніуса – математичною моделлю, яка описує одночасно два процеси: просторове поширення речовини або температури (дифузію) та хімічну реакцію, швидкість якої залежить від температури за законом Арреніуса [2].

Поставимо задачу знаходження додатного радіально-симетричного розв'язку крайової задачі (1), (2).

2. Основна частина. Розв'яжемо задачу (1), (2) за допомогою методу двобічних наближень, заснованого на використання методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [9, 10].

В задачі (1), (2) перейдемо до сферичної системи координат за формулами:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \ x_3 = r\cos\theta,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi, \ r \ge 0.$$

Оператор Лапласа у сферичній системі координат має вигляд

$$\Delta y = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}.$$

Оскільки задача полягає у відшуканні радіально-симетричного розв'язку $y = y(r)$ задачі (1), (2), то рівняння (1) зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)=\lambda^2(1+\beta-y)e^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{y}}. \qquad (3)$$

Крайова умова (2), яку задано на сфері $|\mathbf{x}|=1$, зводиться до вигляду

$$y(1)=1.$$

Точка $r=0$ є особливою точкою рівняння (3). В такому випадку необхідно поставити умову обмеженості розв'язку при $r=0$:

$$|y(0)|<+\infty.$$

Тоді крайова задача (1), (2) набуде вигляду

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)=\lambda^2(1+\beta-y)e^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{y}},\ 0<r<1, \qquad (4)$$

$$|y(0)|<+\infty,\ y(1)=1. \qquad (5)$$

Відомо [2], що $y(r)$ є спадною функцією, і для неї виконується умова

$$1<y(r)<1+\beta. \qquad (6)$$

Заміною $y(r)=u(r)-1$ крайова задача (4), (5) зводиться до вигляду

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=\lambda^2(\beta-u)e^{\frac{\gamma u}{u+1}},\ 0<r<1, \qquad (7)$$

$$|u(0)|<+\infty,\ u(1)=0, \qquad (8)$$

а для функції $u(r)$ умова (6) виглядатиме як

$$0<u(r)<\beta. \qquad (9)$$

Функція Гріна задачі (7), (8) має вигляд

$$G(r,s)=\begin{cases}\dfrac{1-s}{s}, & 0\le r\le s,\\[2mm] \dfrac{1-r}{r}, & s<r\le 1.\end{cases} \qquad (10)$$

Тоді задача (7), (8) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(r)=\lambda^2\int_0^1 Q(r,s)(\beta-u(s))e^{\frac{\gamma u(s)}{u(s)+1}}ds, \qquad (11)$$

де $Q(r,s)=s^2G(r,s)$.

Функція $Q(r,s)$ є додатною; її графік зображено на рис. 1.

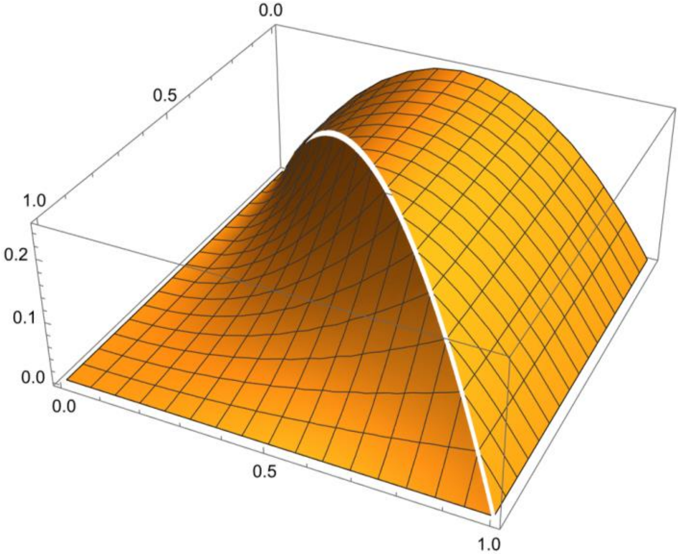

Рис. 1. *Графік функції* $Q(r,s)$

Означення. *Узагальненим розв'язком крайової задачі (7), (8) назвемо функцію* $u^* \in C[0,1]$*, що є розв'язком інтегрального рівняння (11).*

У сенсі даного означення розуміється еквівалентність крайової задачі (7), (8) та інтегрального рівняння (11).

Пов'яжемо з рівнянням (11) нелінійний інтегральний оператор, що діє у просторі $C[0,1]$ за наступним правилом:

$$T(u)(r) = \lambda^2 \int_0^1 Q(r,s)(\beta - u(s)) e^{\frac{\gamma u(s)}{u(s)+1}} ds \,. \tag{12}$$

Тоді рівняння (11) можна подати у вигляді $u = T(u)$. Дане рівняння розглядатимемо в банаховому просторі $C[0,1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $C[0,1]$ функцій [9, 14].

Дослідимо деякі властивості оператора T.

Оскільки $Q(r,s)f(u(s)) \geq 0$ для всіх $0 < u < \beta$ і $r, s \in [0,1]$, то $T(u) \geq \theta$ для всіх $u \geq \theta$, а отже, оператор T є додатним (θ – нульовий елемент простору).

Функція $f(u) = (\beta - u)e^{\frac{\gamma u}{u+1}}$ дозволяє діагональне подання $f(u) = \hat{f}(u,u)$, де $\hat{f}(v,w) = (\beta - w)e^{\frac{\gamma v}{v+1}}$. Функція $\hat{f}(v,w)$ зростає за v

і спадає за w. Тоді оператор (12) є гетеротонним оператором, для якого супутній оператор $\hat{T}(v,w)$ діє за правилом

$$\hat{T}(v,w)(r)=\lambda^2\int_0^1 Q(r,s)(\beta-w(s))e^{\frac{\gamma v(s)}{v(s)+1}}ds\,. \tag{13}$$

Супутній оператор (13) є монотонним за v і антимонотонним за w, тобто:

$$\hat{T}(v_1,w)\le\hat{T}(v_2,w)\text{, якщо } v_1\le v_2\,;$$

$$\hat{T}(v,w_1)\ge\hat{T}(v,w_2)\text{, якщо } w_1\le w_2\,.$$

В конусі K_+ для гетеротонного оператора T виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $<v_0,w_0>$ умовами

$$\hat{T}(v_0,w_0)\ge v_0,\ \hat{T}(w_0,v_0)\le w_0\,. \tag{14}$$

Оскільки $f(0)>0$, то його кінці шукатимемо у вигляді $v_0=0$, $w_0=\delta$, $0<\delta<\beta$. Тоді умови (14) набудуть вигляду: для всіх $r\in[0,1]$

$$\lambda^2(\beta-\delta)\int_0^1 Q(r,s)ds\ge 0,\ \lambda^2\beta e^{\frac{\gamma\delta}{\delta+1}}\int_0^1 Q(r,s)ds\le\delta\,. \tag{15}$$

Через невід'ємність функції $Q(r,s)$ перша з умов (15) завжди виконуватиметься. Другу ж умову можна записати у вигляді

$$\frac{\lambda^2}{6}\beta e^{\frac{\gamma\delta}{\delta+1}}\le\delta\,,$$

оскільки $\max\limits_{r\in[0,1]}\int_0^1 Q(r,s)ds=\max\limits_{r\in[0,1]}\frac{1-r^2}{6}=\frac{1}{6}$.

Отже, нерівність, що визначає δ матиме вигляд

$$\delta e^{-\frac{\gamma\delta}{\delta+1}}\ge\frac{\lambda^2\beta}{6}\,. \tag{16}$$

Для крайової задачі (7), (8) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(r)=\lambda^2\int_0^1 Q(r,s)[\beta-w^{(n-1)}(s)]e^{\frac{\gamma v^{(n-1)}(s)}{1+v^{(n-1)}(s)}}ds\,,\ n=1,2,\dots, \tag{17}$$

$$w^{(n)}(r)=\lambda^2\int_0^1 Q(r,s)[\beta-v^{(n-1)}(s)]e^{\frac{\gamma w^{(n-1)}(s)}{1+w^{(n-1)}(s)}}ds\,,\ n=1,2,\dots, \tag{18}$$

$$v^{(0)}(r) = 0,\ w^{(0)}(r) = \delta . \qquad (19)$$

З урахуванням властивостей оператора T та конуса K_+ можна зробити висновок [10], що ітераційний процес (17)-(19) з двох боків збігається до єдиного в конусі K_+ додатного розв'язку крайової задачі (7), (8). Для найшвидшої збіжності ітерацій (17)-(19), очевидно, за δ потрібно обрати найменше значення, що задовольняє нерівність (16), тобто найменший корінь відповідного рівняння.

Теорема. *Нехай $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$ і нерівність (16) має розв'язок δ такий, що $0 < \delta < \beta$. Тоді крайова задача*

$$-\Delta u = \lambda^2 (\beta - u) e^{\frac{\gamma u}{u+1}},\ \mathbf{x} \in \Omega ,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

розглядувана в одиничній кулі $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$, має єдиний додатний радіально-симетричний розв'язок

$$u^*(r) = u^*\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right),$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою (17)-(19).

Двобічну збіжність послідовних наближень (17)-(19) розуміємо у сенсі виконання ланцюга нерівностей

$$0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(n)} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w^{(n)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} \le \delta .$$

Оскільки процес (17)-(19) має двобічний характер збіжності, то він зупиняється за умови

$$\frac{1}{2} \max_{r \in [0,1]} [w^{(k)}(r) - v^{(k)}(r)] < \varepsilon .$$

Тоді з точністю ε за узагальнений розв'язок $u^*(r)$ задачі (7), (8) можна обрати функцію

$$u^{(k)}(r) = \frac{w^{(k)}(r) + v^{(k)}(r)}{2} .$$

Повертаючись до функції $y(r)$, отримаємо узагальнений розв'язок задачі (4), (5)

$$y^*(r) = u^*(r) + 1 .$$

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4), (5) при різних значенням параметрів $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$.

При $\beta = 0,5$, $\gamma = 50$, $\lambda = 0,1$ збіжність з точністю 10^{-8} було досягнуто за 7 ітерацій. При цьому $\left\| y^{(7)} \right\| = 1,00378075$.

На рис. 2 зображено графіки верхніх $w^{(k)}(r)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(r)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 3 наведено графік наближеного розв'язку $y^{(7)}(r)$, на рис. 4 – графік поверхонь рівня функції $y^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$ (з кроком $0,25 \cdot 10^{-4}$).В таблиці 1 наведено значення наближеного розв'язку на відрізку $[0,1]$ з кроком 0,1.

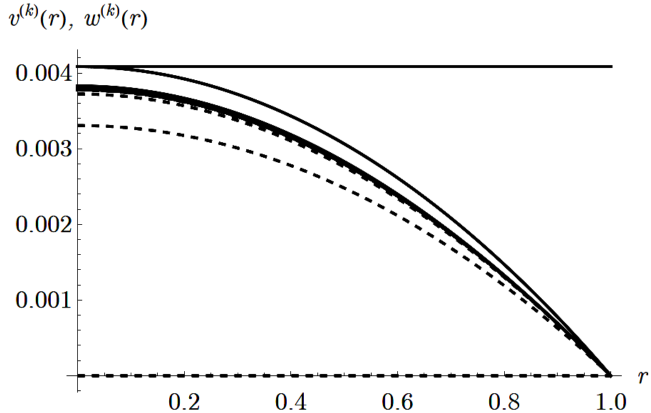

Рис. 2. *Графіки верхніх і нижніх наближень*

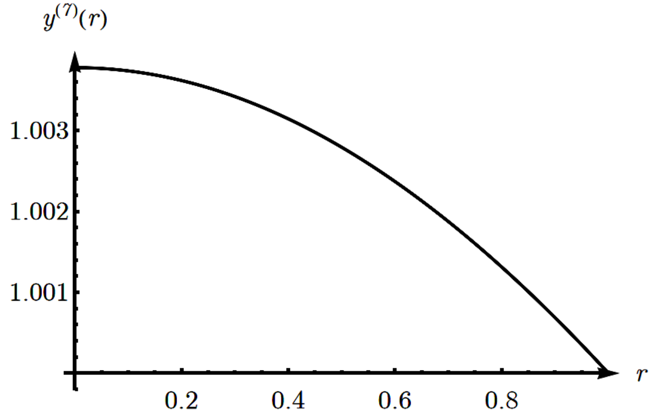

Рис. 3. *Графік наближеного розв'язку* $y^{(7)}(r)$

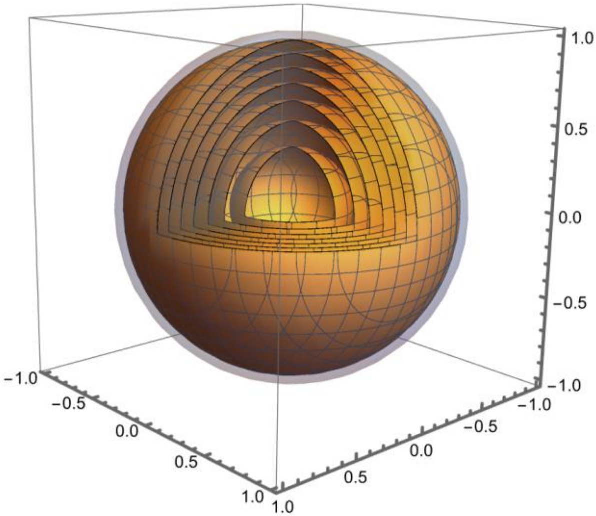

Рис. 4. *Поверхні рівня наближеного розв'язку* $y^{(2)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$

Таблиця 1

Значення наближеного розв'язку $y^{(7)}$ *на відрізку* $[0,1]$

r	0	0,1	0,2	0,3
$y^{(7)}(r)$	1,00378075	1,00374083	1,00362136	1,00342315
r	0,4	0,5	0,6	0,7
$y^{(7)}(r)$	1,00314752	1,00279632	1,00237182	1,00187673
r	0,8	0,9	1,0	
$y^{(7)}(r)$	1,0013141	1,00068732	1,00000000	

Висновки. У даній статті було проведено чисельний аналіз реакційно-дифузної моделі з кінетикою Арреніуса за допомогою методу двобічних наближень. Розглядався випадок з гетеротонною нелінійністю, представленою у вигляді добутку лінійної та показникової функцій. Знайдено додатний радіально-симетричний розв'язок першої крайової задачі. Результати, одержані в роботі, можна буде використовувати для наступних досліджень прикладних задач математичної фізики в нелінійних середовищах. Таким чином, ці результати мають наукову новизну та практичну значущість.

Список використаних джерел:

1. Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Vol. 1: The theory of the steady state. Oxford: Oxford University Press, 1975. 444 p.

2. Kapila A. K., Matkowsky B. J., Vega J. Reactive-diffusive system with Arrhenius kinetics: peculiarities of the spherical geometry. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1980. Vol. 38, № 3. P. 431-447. DOI: 10.1137/0138030.
3. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв’язків крайових задач із сингулярними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2025. № 27. С. 39-52. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.39-52.
4. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв’язків першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з монотонною степеневою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2025. № 28. С. 81-92. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.81-92.
5. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіоелектроніка та інформатика.* 2018. № 1 (80). С. 48-54.
6. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки.* 2015. № 3. С. 107-120.
7. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки.* 2013. № 1. С. 35-42.
8. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2013. № 3 (62). С. 28-31.
9. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
10. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
11. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку аксіально-симетричних розв’язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Матеріали XXVIII Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті» (Харків, ХНУРЕ, 16-18 квітня 2024).* Т. 7. С. 259-261.
12. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв’язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радіоелектроніка та інформатика.* 2019. № 3 (86). С. 16-23.
13. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* 2019. № 1 (48). С. 57-66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6.
14. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science.* 2018. № 3 (99). С. 78-91. DOI: 10.26577/JMMCS-2018-3-460.

References:

1. Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Vol. 1: The theory of the steady state. Oxford: Oxford University Press, 1975. 444 p.
2. Kapila A. K., Matkowsky B. J., Vega J. Reactive-diffusive system with Arrhenius kinetics: peculiarities of the spherical geometry. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. Vol. 38, № 3. P. 431-447. DOI: 10.1137/0138030.
3. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do znakhodzhennia dodatnykh aksialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach iz synhuliarnymy neliniinostiamy. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky.* 2025. № 27. P. 39-52. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.39-52.
4. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Analiz metodom dvobichnykh nablyzhen dodatnykh aksialno-symetrychnykh rozviazkiv pershoi kraiovoi zadachi dlia rivniannia Helmholtsa z monotonnoiu stepenevoiu neliniinistiu. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky.* 2025. № 28. P. 81-92. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.81-92.
5. Voronenko M. D., Sydorov M. V. Konstruktyvne doslidzhennia neliniinykh kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian. *Radioelektronika ta informatyka.* 2018. № 1 (80). P. 48-54.
6. Kolosova S. V., Lukhanyn V. S., Sydorov M. V. O postroenyy dvustoronnykh pryblyzhenyi k polozhytelnomu reshenyiu uravnenyia Lane-Emdena. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Seriia: fizyko-matematychni nauky.* 2015. № 3. P. 107-120.
7. Kolosova S. V., Lukhanyn V. S., Sydorov M. V. O postroenyy yteratsyonnykh metodov reshenyia kraevykh zadach dlia nelyneinykh ellyptycheskykh uravnenyi. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Seriia: fizyko-matematychni nauky.* 2013. № 1. P. 35-42.
8. Kolosova S. V., Sydorov M. V. Prymenenye yteratsyonnykh metodov k reshenyiu ellyptycheskykh kraevykh zadach s eksponentsyalnoi nelyneinostiu. Radioelektronika ta informatyka. 2013. № 3 (62). P. 28-31.
9. Krasnoselskyi M. A. Polozhytelnye reshenyia operatornykh uravnenyi. Moskva: Fyzmathyz, 1962. 394 p.
10. Opoitsev V. Y., Khurodze T. A. Nelyneinye operatory v prostranstvakh s konusom. Tbylysy: Yzd-vo Tbylys. un-ta, 1984. 246 p.
11. Parkhomenko V. H. Metod dvobichnykh nablyzhen poshuku aksialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach z monotonnymy neliniinostiamy. *Materialy XXVIII Mizhnarodnoho molodizhnoho forumu «Radioelektronika i molod u XXI stolitti» (Kharkiv, KhNURE, 16-18 kvitnia 2024).* T. 7. P. 259-261.
12. Parkhomenko V. H., Sydorov M. V. Zastosuvannia metodu dvobichnykh nablyzhen do znakhodzhennia dodatnykh radialno-symetrychnykh rozviazkiv kraiovykh zadach z monotonnymy neliniinostiamy. *Radioelektronika ta informatyka.* 2019. № 3 (86). P. 16-23.
13. Sydorov M. V. Metod dvobichnykh nablyzhen rozviazannia pershoi kraiovoi zadachi dlia neliniinykh zvychainykh dyferentsialnykh rivnian na osnovi vykorystannia funktsii Hrina. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia.* 2019. № 1 (48). P. 57-66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6.

14. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. 2018. № 3 (99). S. 78-91. DOI: 10.26577/JMMCS-2018-3-460.

ANALYSIS BY THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS OF A STATIONARY REACTION–DIFFUSION MODEL IN A SPHERICAL PELLET WITH ARRHENIUS KINETICS

The paper analyzes, by means of the method of two-sided approximations, a stationary reaction–diffusion model in a spherical granule with Arrhenius kinetics.

The problem is considered in a spherical domain with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition on the boundary, which is transformed into a homogeneous one after an appropriate substitution. The nonlinearity is represented as the product of a linear and an exponential function. After transforming to the spherical coordinate system and taking radial symmetry into account (the solution depends only on the distance from the center of the sphere and does not depend on the angular variables), the problem is reduced to a boundary value problem for a semilinear ordinary differential equation. Since the pole of the spherical coordinate system is a singular point of the obtained equation, it is necessary to impose a boundedness condition on the solution at this point.

For the problem under consideration, the Green's function is constructed, after which the problem is reduced to an equivalent integral equation, which is treated as a nonlinear operator equation in the Banach space of functions continuous on a segment and semiordered by the cone of nonnegative functions on this segment. The properties of the corresponding integral operator, such as heterotonicity and positivity, are investigated.

Next, the endpoints of a strongly invariant conical segment are determined, serving as initial approximations for the iterative process. Then, two iterative processes are constructed. The first iterative sequence is nondecreasing with respect to the cone (the sequence of lower approximations), while the second one is nonincreasing with respect to the cone (the sequence of upper approximations). At each iteration step, the current approximation is chosen as the arithmetic mean of the upper and lower approximations, which makes it possible to obtain an a posteriori error estimate at every step of the iterative process. As a result, the existence and uniqueness of a positive radially symmetric solution to the considered problem are established.

The theoretical results obtained in the paper were confirmed by means of a computational experiment. The results of the computational experiment are presented graphically.

Key words: *Green's function, Hammerstein integral equation, heterotone operator, method of two-sided approximations, nonlinear boundary value problem, positive radially symmetric solution, reaction–diffusion system, semilinear elliptic equation with the Laplace operator, strongly invariant conical segment.*