УДК 534.1

П. Я. Пукач, д-р техн. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОГО ТІЛА, ВЗДОВЖ ЯКОГО РУХАЄТЬСЯ СУЦІЛЬНИЙ ПОТІК ОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

Отримано та досліджено асимптотичними методами нелінійної механіки математичну модель системи одномірне пружне тіло — суцільний потік однорідного середовища, що враховує нелінійні пружні властивості тіла і його згинальні коливання, а також щільність і швидкість середовища. Для дослідження моделі використана хвильова теорія руху. Отримані закономірності зміни основних параметрів, що визначають динаміку пружного тіла — амплітуду і частоту нелінійних коливань. Ці закони визначаються геометричними характеристиками пружного тіла, фізичними і механічними властивостями матеріалу, швидкістю тіла, кутовою швидкістю обертання пружного тіла і зовнішніми факторами.

Ключові слова: *динамічна система, резонансні явища, математична модель, згинальні коливання.*

Вступ. Аналітичні методи дослідженні динамічних процесів у нелінійних системах з розподіленими параметрами. Актуальність проблеми. Перші результати дослідженнями нелінійних механічних систем з розподіленими параметрами на основі поєднання принципу одночастотності коливань та асимптотичних методів нелінійної механіки були викладені в роботі [1], де узагальнено одночастотний метод на квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. За допомогою рівнянь такого типу, що описують поздовжні та згинальні коливальні процеси одновимірних систем з розподіленими параметрами (стержнів, валів, балок тощо) при близькому до лінійного закону пружності, вдалось розв'язати цілу низку важливих прикладних задач. У праці [2] дано строге обґрунтування застосуванню асимптотичних методів нелінійної механіки для дослідження нестаціонарних динамічних процесів у нелінійних механічних системах з розподіленими параметрами, викладено методи дослідження вказаних систем, які грунтуються на розвитку одночастотного і багаточастотних методів нелінійної механіки. У роботі [3] запропоновано методику дослідження динамічних процесів у системах з розподіленими параметрами для сильно нелінійних гіперболічних рівнянь, які описують коливальні процеси, на основі методу збурень. В [4] за допомогою асимптотичних методів досліджено нестаціонарні коливання роторів турбомашин при переході через критичне число обертів, поздовжні та поперечні коливання нелінійно пружних стержнів, коливання стержнів під дією осьового та поперечного навантаження тощо. Характерною особливістю практично усіх класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують коливальні процеси у системах із розподіленими параметрами, є неможливість застосування методу відокремлення змінних до дослідження їх незбурених аналогів (лінійних моделей). Перші дослідження в цьому напрямку були присвячені вивченню впливу зосередженого рухомого елемента на коливання конструкції типу балки [5]. Вивчення динамічних явищ у механічних системах із зосередженими рухомими навантаженнями проведено в [6]. Задача про згин гнучкого трубопроводу, заповненого рухомою рідиною, була поставлена в праці [7], причому встановлено, що при певних швидкостях руху рідини прямолінійна форма стає нестійкою. У подальших дослідженнях таку задачу знову розглядали для випадку труби, що викликано згинальними коливаннями наземних ліній великих нафтопроводів. У [8] будуються точні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують коливання механічних систем, що перебувають під дією рівномірно розподілених рухомих навантажень; показано, що коливання таких систем можна розглядати як результат накладання динамічних процесів. Дослідження динамічних процесів у різноманітних середовищах та системах на базі хвильової теорії руху набули в останні десятиліття широкого розмаху [9–12]. Основні ідеї хвильової теорії широко використовуються у таких прикладних задачах, де не завжди вдається застосувати класичні методи Фур'є чи Даламбера інтегрування рівнянь з частинними похідними. Це стосується в першу чергу задач, які описують динамічні процеси поздовжньо-рухомих середовищ: поздовжні та згинальні коливання ремінних, канатних чи ланцюгових передач, трубопроводів, по яких переміщається рідина, шнекових машин, вздовж котрих рухається в'язке або сипке середовище; в певній мірі процес вібросепарації та ін. Адже, як показано в [13; 14], поздовжня складова швидкості руху середовища впливає не тільки на кількісні характеристики наведених вище систем, але може суттєво вплинути також на якісну сторону процесу — привести до зриву коливань чи їх стійкості тощо. У [15; 16] розроблено методику дослідження деяких класів наведеного типу систем, а саме пружних тіл, які обертаються навколо нерухомої осі зі сталою кутовою швидкістю (колони для буріння свердловин, шнекові машини тощо) та вздовж яких рухається середовище.

Асимптотичний метод дослідження нелінійних моделей систем з розподіленими параметрами розроблений відносно повно тільки для так званих квазілінійних їх аналогів обмеженої довжини. Що стосується пружних тіл, вздовж яких рухається суцільний потік однорідного середовища (СПОС), то вони залишаються мало дослідженими в першу чергу через відсутність апарату аналізу навіть лінійних їх математичних моделей. Однак їх широке застосування у різних галузях народного господарства та техніки стало причиною того, що в останні десятиліття набули розвитку різні підходи (чисельні та аналітичні) до дослідження лінійних та нелінійних моделей вказаних систем. Для часткового вирішення зазначеної проблеми у роботі пропонується підхід, основна ідея якого полягає у наступному: кількість відносного руху середовища є малою величиною у порівнянні із кількістю руху пружного тіла при його згинальних коливаннях; швидкість відносного руху потоку суцільного середовища вздовж пружного тіла змінюється повільно.

Математична модель згинальних коливань пружного тіла, вздовж якого рухається СПОС. Для отримання диференціального рівняння, яке описує коливальний процес нелінійно пружного тіла, вздовж якого рухається СПОС, будемо вважати, що:

а) площа поперечного перерізу пружного тіла, маса його одиниці довжини та жорсткість є незмінними величинами;
б) пружні властивості матеріалу тіла задовольняють близькому до лінійного закону пружності;
в) вздовж пружного тіла рухається зі сталою швидкістю суцільне середовище «нульової згинальної жорсткості»;
г) нормальні перерізи пружного тіла знаходяться завжди перпендикулярно до його нейтральної осі, тобто депланація поперечного перерізу відсутня;
д) відхилення окремих точок тіла відбуваються у напрямку перпендикулярному до середньої його лінії, тобто переміщенням точок паралельно до нейтральної осі нехтуємо;
е) відхилення точок осі пружного тіла довільного нормального перерізу відбуваються в одній площинні («в площині коливань»).

За вказаних припущень відхилення точок осі пружного тіла при поперечних його коливаннях однозначно визначаються однією функцією двох змінних — координати x та часу t. Вважатимемо, що $u=u\left(x,t\right)$ — відхилення нейтральної осі тіла з координатою x в довільний момент часу, а розподіл сил, які діють на умовно виділений елемент деформованого тіла довжиною dx вказані на рис. 1.

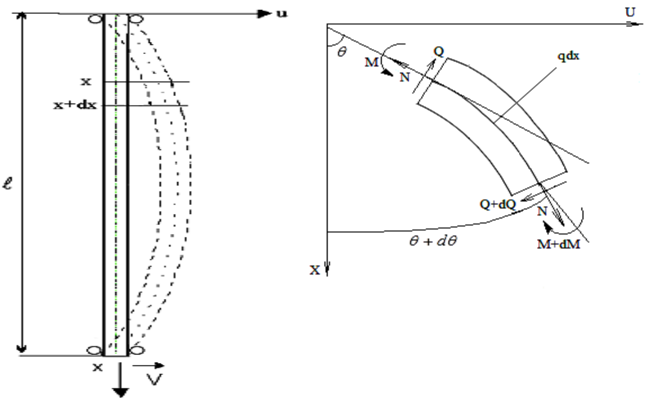

Рис. 1. *Розподіл сил, які діють на умовно виділений елемент пружного тіла*

Позначимо: m — маса одиниці довжини пружного тіла; m_1 — маса одиниці довжини умовної матеріальної лінії СПОС, яке рухається вздовж тіла; E — модуль пружності матеріалу тіла; I — момент інерції поперечного перерізу тіла відносно осі, яка співпадає із нейтральною віссю у недеформованому положенні (вказана вісь є перпендикулярною до площини коливань); M — згинальний момент перерізу із координатою x; $M+\frac{\partial M}{\partial x}dx$ — згинальний момент перерізу із координатою $x+dx$; Q — перерізуюче зусилля у перерізі із координатою x; $Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx$ — перерізуюче зусилля у перерізі к координатою $x+dx$; θ_1 — кут нахилу, який утворює із віссю Ox дотична до нейтральної лінії нормального перерізу із координатою x; θ_2 — кут нахилу, який утворює із віссю Ox дотична до нейтральної лінії нормального перерізу із координатою $x+dx$; $dq = q(x,t)dx$ — складова рівнодійної зовнішніх сил у площині Oxz (площина коливань), які діють на умовно виділений елемент тіла, а $q(x,t)$ їх інтенсивність.

Тоді проекція пришвидшення центру виділеного елементу на вісь Oz дорівнює $a_z = \frac{d^2u}{dt^2}$. Приймаючи до уваги, що для малих коливань розглядуваного елементу тіла $\frac{\partial u}{\partial x}$ і θ_2 будуть також малими величинами, вони зв'язані співвідношенням $\sin\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\sin\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$.

До того ж, ураховуючи зв’язок між перерізуючою силою Q та згинальним моментом M у вигляді $Q = \dfrac{dM}{dx}$, рівняння «динамічної рівноваги» виділеного елементу пружного тіла вздовж котрого рухається суцільний потік однорідного середовища набуває вигляду

$$-N\sin\theta_1 - dq_{in} - \frac{\partial Q}{\partial x}dx + N\sin\theta_2 + q\left(x,t\right)dx = 0\,. \qquad (1)$$

Сили інерції dq_{in} у проекції на вісь Oz визначаються співвідношенням

$$dq_{in} = m_1\frac{d^2u\left(x,t\right)}{dt^2}dx + m\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t^2}dx\,. \qquad (2)$$

У виразі (2) символ $\dfrac{d^2}{dt^2}$ означає повну похідну за часом відповідної функції. Нехай пружні властивості матеріалу тіла задовольняють нелінійному технічному закону пружності [17] $\sigma = E\left(\varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_1^3\right)$, де $\varepsilon_1 = \dfrac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}$ — відносне видовження тіла, а параметр ε характеризує відхилення його пружних властивостей від лінійного закону. Тут і нижче будемо вважати його малим у порівнянні із модулем пружності E. Приймаючи до уваги, що

$$\frac{du\left(x,t\right)}{dt} = \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t} + \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2u\left(x,t\right)}{dt^2} = \frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2},$$

для випадку сталої швидкості руху суцільного середовища вздовж пружного тіла ($\dfrac{dx}{dt} = V = const$) рівняння (1) набуває вигляду

$$\left(m + m_1\right)\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t^2} + 2m_1V\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial t\partial x} - (N - m_1V^2)\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\left(\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2u\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right)^3\right)\right)\right] = q(u,x,t),$$

де EI — жорсткість на згин пружного тіла. Отримане вище диференціальне рівняння подамо у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{m+m_1}\left(2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(N-m_1V^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{EI}{m+m_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=$$

$$=-\varepsilon\frac{EI}{m+m_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3+\frac{m_1}{m+m_1}q(u,x,t).$$

Знайти аналітичний розв'язок навіть відповідної лінійної моделі (без урахування правої частини) наведеного вище рівняння відомими класичними методами не вдається. Тому нижче досліджуватимемо динамічний процес системи пружне тіло — СПОС за малої швидкості руху останнього. Це дозволяє запропоновану модель динамічного процесу представити у загальному вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\varepsilon F\left(u,\theta,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right),\tag{3}$$

де $F\left(u,\theta,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\theta\right)$ — аналітична 2π-періодична за $\nu t=\theta$ функція; $\beta^2=\frac{N-m_1V^2}{m+m_1}$,

$$\varepsilon F\left(u,\theta,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=$$

$$=-\varepsilon\frac{EI}{m+m_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3-\frac{m_1}{m+m_1}2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{m_1}{m+m_1}q(u,x,t).$$

Для рівняння (3) будемо розглядати крайові умови, які відповідають шарнірному закріпленню кінців пружного тіла, тобто

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t)=0\,.\tag{4}$$

Використання хвильової теорії руху у дослідженні коливань пружного тіла, вздовж якого рухається СПОС. Таким чином, дослідження коливань механічної системи звелось до побудови та аналізу розв'язку рівняння (3) за крайових умов (4). Доведемо, що динамічний процес для вказаної системи можна трактувати як накладання двох хвиль однакової довжини, тобто

$$u(x,t)=C_1\cos\left(\kappa x+\omega t+\varphi\right)+C_2\cos\left(\kappa x-\omega t+\psi\right),\tag{5}$$

де $C_1, C_2, \kappa, \varphi, \psi$ — сталі, зміст і вигляд котрих буде встановлено нижче.

Представлення розв'язку рівняння (3) у формі (5) буде задовольняти крайовим умовам (4), якщо хвильове число κ та частота хвильового процесу ω зв'язані дисперсійним співвідношенням

$$\omega^2+\beta^2\kappa^2-\alpha^2\kappa^4=0\,.$$

Отримане дисперсійне співвідношення визначає частоту процесу як функцію хвильового числа у вигляді $\omega=\sqrt{\alpha^2\kappa^4-\beta^2\kappa^2}$. Для визначення сталих C_1 і C_2, а також зв'язку між початковими фазами прямої і відбитої хвиль, тобто параметрами φ і ψ використаємо крайові умови на початку пружного тіла, тобто $u(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=0$. Враховуючи (5), отримуємо тригонометричне рівняння $C_1\cos(\omega t+\varphi)+C_2\cos(-\omega t+\psi)=0$, яке буде правильним для довільного значення часу t якщо $\varphi+\psi=k\pi$, та $C_1=-C_2=a$. Нижче вважатимемо, що $\psi=-\varphi$, а сталу a називатимемо амплітудним параметром. Аналогічним чином, задовольняючи крайові умови на іншому краю тіла $u(l,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t)=0$, з врахуванням отриманого вище, маємо $\cos(\kappa l+\omega t+\varphi)-\cos(\kappa l-\omega t-\varphi)=0$. Останнє співвідношення визначає хвильове число $\kappa=\frac{\pi}{l}$. Отже, частота хвильового процесу у незбуреній системі дорівнює

$$\omega=\frac{k\pi}{l}\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\beta^2}\ .$$

Таким чином, одночастотний хвильовий процес крайової задачі, яка описується незбуреним рівнянням (3) можна представити залежністю

$$\begin{aligned}u(x,t)=a\Bigg[&\cos\left(\frac{k\pi}{l}\left(x+\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\beta^2}\,t+\varphi\right)\right)-\\&-\cos\left(\frac{k\pi}{l}\left(x-\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\beta^2}\,t-\varphi\right)\right)\Bigg].\end{aligned}\tag{6}$$

Для багаточастотного ж процесу незбуреної крайової задачі має місце суперпозиція одночастотних форм коливань, а, отже, вказаний процес можна описати у вигляді

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_k a_k\Bigg[&\cos\left(\frac{k\pi}{l}x+\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4+\gamma t}+\varphi_k\right)-\\&\cos\left(\frac{k\pi}{l}x-\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4+\gamma t}-\varphi_k\right)\Bigg].\end{aligned}\tag{7}$$

У співвідношенні (6) параметри a і φ та у співвідношеннях (7) параметри a_k і φ_k є сталими і вони для випадку (7) знаходяться із початкових умов. Така задача може бути предметом окремого розгляду, а самі співвідношення легко трансформувати до вигляду

$$u(x,t) = 2a\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\left(\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \beta^2}\,t + \varphi\right)$$

та

$$u(x,t) = 2\sum_k a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\left(\sqrt{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \beta^2}\,t + \varphi_k\right).$$

Методика дослідження впливу на нелінійні коливання пружного тіла СПОС. Для дослідження впливу потоку рухомого суцільно середовища на нелінійні коливання пружного тіла необхідно в першу чергу побудувати розв'язок збуреної крайової задачі (3), (4). Її розв'язування дещо спрощують накладені вище на праву частину співвідношень (3), (4) умови, а саме: максимальне значення сил інерції суцільного потоку рухомого середовища є малим у порівняння із $\max \alpha^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Це одночасно є передумовою застосування загальних ідей методів збурень [18] для побудови розв'язку вказаної вище крайової задачі. Найбільш адаптованими стосовно коливальних систем такого типу є асимптотичні методи нелінійної механіки. Вони у поєднанні із принципом одночастотності коливань у нелінійних системах із зосередженими масами та розподіленими параметрами дозволяють отримати двопараметричну множину розв'язків, що описує закони зміни визначальних параметрів динамічного процесу пружного тіла, вздовж якого рухається зі сталою за величиною швидкістю суцільний потік середовища. Відповідно до наведеного у першому асимптотичному наближені одночастотний процес пружного тіла описується залежністю

$$u(x,t) = a\left(\cos(\kappa x + \psi) - \cos(\kappa x - \psi)\right) + \mu\, u_1(a, x\psi, \theta), k = 0,1,2,....,$$

де $\psi = \omega t + \varphi$ і одночасно для розглядуваного випадку параметри a та φ будуть невідомими функціями часу, $u_1(a,\psi,\theta,x)$ — 2π-періодична за ψ та θ функція, яка визначається таким чином, щоб асимптотичне подання розв'язку з точністю до величин другого порядку малості задовольняло вихідне рівняння та крайові умови. До того ж, вказана функція повинна задовольняти крайові умови, які випливають із (4), тобто

$$u_1(a, x\psi, \theta)\big|_{x=0} = u_1(a, x\psi, \theta)\big|_{x=l} = 0\,.$$

На рис. 2 представлено залежність частоти ω_k власних коливань пружного тіла від його довжини та погонної маси суцільного середовища без урахування його відносного руху. Тут і нижче як основні характеристики тіла (якщо додатково не обумовлено інше) вибрано наступні величини: модуль пружності матеріалу — $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, зовнішній діаметр — $d = 0{,}06$ м, товщина стінки — $h = 0{,}003$ м, погонна маса $m = 1$ кг/м.

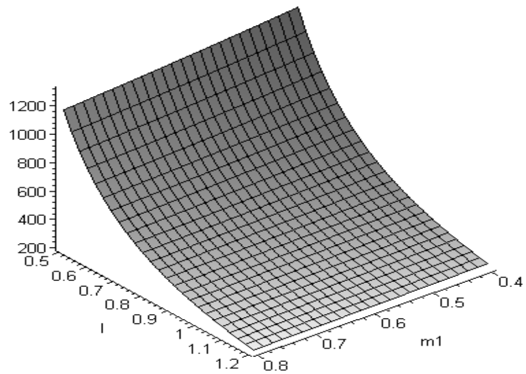

Рис. 2. *Залежність власної частоти пружного тіла від його довжини та погонної маси СПОС*

Зауваження.

1. У нелінійних механічних системах, як правило, встановлюється динамічний процес, частота якого близька до головної частоти спектру власних частот або до частоти вимушуючої сили. Це дозволяє у результатах, які стосуються конкретних систем, приймати $k = 1$.

2. У роботі розглядається випадок так званих «коротких» систем. Для них вплив нелінійних сил проявляється у зміні в часі визначальних параметрів коливань, в той же час для довгих — останні залежать також і від лінійної координати.

Висновки. Математична модель системи пружне одновимірне тіло — СПОС, отримана у роботі, враховує нелінійно пружні властивості тіла при згинальних його коливаннях, а також густину та швидкість руху середовища. Одночасно із наведеними чинниками пов’язані основні труднощі дослідження динаміки вказаної механічної системи. Отримані у роботі результати показують, що на динамічний процес пружних тіл впливають як кутова швидкість обертання, так й основні характеристики СПОС. Вплив останнього більшою мірою проявляється для випадку більших значень погонної маси СПОС. Основними визначальними параметрами динаміки пружного тіла є амплітуда та частота нелінійних його коливань. Закони зміни вказаних параметрів визначаються геометричними характеристиками пружного тіла, фізико-механічними властивостями його матеріалу, швидкістю СПОС вздовж нього, кутовою швидкістю обертання пружного тіла та зовнішніми чинниками.

Список використаних джерел:

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974. — 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков. — К. : Вища школа, 1976. — 596 с.
3. Филимонов А. М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными / А. М. Филимонов // Дифференц. уравнения. — 1976. — Вып. 12. — № 11. — С. 2077–2084.
4. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин / В. А. Гробов. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. — 165 с.
5. Порхун Л. М. Про нестаціонарні коливання балки на нелінійній основі під дією рухомого навантаження / Л. М. Порхун // Доп. АН УРСР. — 1967. — № 10. — С. 900–903.
6. Тарме М. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении / М. Тарме, Л. Моут // Труди Американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. — М. : Мир, 1969. — Вып. 36. — № 1. — С. 87–98.
7. Доценко П. Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / П. Д. Доценко // Прикладная механика. — 1971. — Вып. 3. — С. 85–91.
8. Горошко О. А. О продольных колебаниях балки с подвижным экипажем / О. А. Горошко // Прикладная механика. — 1978. — Вып. 14. — № 8. — С. 70–78.
9. Додд Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Ейблек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 694 с.
10. Мартинців М. П. Одне узагальнення методу Д’Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом / М. П. Мартинців, М. Б. Сокіл // Науковий вісник : збірник наук.-техн. праць. — Львів : УДЛТУ, 2003. — Вип. 13.4. — С. 64–67.
11. Пукач П. Я. Вплив руху рідини та кутової швидкості обертання колони при бурінні свердловин на її нелінійні згинні коливання / П. Я. Пукач, І. В. Кузьо // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2012. — № 1 (17). — С. 60–66.
12. Пукач П. Я. Нелинейные изгибные колебания вращающихся вокруг неподвижной оси тел и методика их исследования / П. Я. Пукач, И. В. Кузьо, М. Б. Сокил // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2013. — № 7. — С. 141–149.
13. Шевченко Ф. Л. Влияние скорости протекающей жидкости на устойчивость бурильной колонны / Ф. Л. Шевченко, Ю. В. Петтик // Науковий вісник Національного гірничого ун-ту. — 2010. — № 1. — С. 69–72.

14. Гащук П. М. Вплив змушувальної сили на параметричні коливання гнучкого робочого елемента механічного приводу / П. М. Гащук, І. І. Назар // Динаміка і міцність машин. — Львів, 2008. — № 614. — С. 55–65.
15. Пукач П. Я. Методика исследования нелинейных изгибных колебаний вращающихся вокруг неподвижной оси тел / П. Я. Пукач, И. В. Кузьо // VII Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла», м. Донецьк, с. Мелекіно Донецької обл., 11–14.06.2013 р. : збірник наукових праць. — Донецьк, 2013. — Т. 2. — С. 123–126.
16. Пукач П. Я. Нелінійні згинні коливання тіл, що обертаються навколо нерухомої осі / П. Я. Пукач // 11-ий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові, Львів, 15–17 травня 2013 р. : тези доповідей. — Львів : ТзОВ «КінпатріЛТД», 2013. — С. 82–83.
17. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер ; [пер. с нем. Я. Г. Пановко]. — М. : ИЛ, 1961. — 777 с.
18. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ ; [пер. с англ. А. А. Мелиняна и А. А. Миронова ; под ред. Ф. Л. Черноусько]. — М. : Мир, 1976. — 456 с.

A one-dimensional elastic body — continuous flow of a homogeneous environment mathematical model that takes into account the nonlinear elastic properties of the body and its bending oscillations, as well as the density and velocity of the medium is received. To study the motion of the model wave theory was used. The obtained laws of change of the basic parameters defining the dynamics of an elastic body — amplitude and frequency of its nonlinear oscillations. These laws are determined by geometrical characteristics of an elastic body, physical and mechanical properties of the material, velocity observed along it, the angular rotation velocity of an elastic body and external factors.

Key words: *dynamic system, resonance phenomena, mathematical model, bending oscillations.*

Отримано: 20.03.2015